A propos des tables de logarithmes.

Par

J. Franel.

(Als Manuskript eingegangen am 19. März 1917.)

M. Henri Poincaré, dans un article sur le calcul des probabilités[1]), s'exprime de la manière suivante: Envisageons les 10000 premiers logarithmes que je trouve dans une table. Parmi ces 10000 logarithmes, j'en prends un au hasard; quelle est la probabilité pour que sa troisième décimale soit un nombre pair? Vous n'hésiterez pas à répondre $^1/_2$, et, en effet, si vous relevez dans une table les troisièmes décimales de ces 10000 nombres, vous trouverez à peu près autant de chiffres pairs que de chiffres impairs.

Cet énoncé de M. Poincaré suggère l'idée d'un problème précis: Considérons dans une table de logarithmes, prolongée aussi loin qu'on le voudra, les décimales d'un ordre déterminé quelconque i et, parmi ces décimales, retenons les n premières, n étant un nombre très grand. Soient $P_i(n)$ le nombre de celles qui sont paires, $Q_i(n)$ le nombre de celles qui sont impaires, de sorte que

$$P_i(n) + Q_i(n) = n.$$

Le rapport $\frac{P_i(n)}{n}$ tend-il vers une limite déterminée quand n augmente indéfiniment, i étant supposé fixe?

La réponse, comme nous le verrons, est négative. Nous montrerons aussi que la moyenne des n premières décimales de l'ordre i ne tend pas vers une limite déterminée quand n croît indéfiniment.

I.

Soit $$c = c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{10^n},$$

le développement en fraction décimale d'un nombre positif c. Si les

[1]) La Science et l'Hypothèse, page 224.

décimales, à partir de l'une d'entre elles c_{n+1}, étaient toutes égales à 9, le nombre c serait égal à $c_a, c_1 c_2 \cdots c_{n-1} d_n$,

où
$$d_n = c_n + 1.$$

On peut donc supposer que les décimales du nombre c ne sont pas toutes égales à 9 à partir d'un certain rang.

Dans ces conditions nous aurons

$$[10^n \cdot c] = c_0 \cdot 10^n + c_1 \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_n,$$

en désignant par $[x]$ le plus grand nombre entier contenu dans x.

On aura de même

$$[10^{n-1} \cdot c] = c_0 \cdot 10^{n-1} + c_1 \cdot 10^{n-2} + \cdots + c_{n-1},$$

d'où résulte

(1)
$$c_n = [10^n \cdot c] - 10\,[10^{n-1} \cdot c],$$

ce qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$c_n = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=9} \left\{ \left[10^{n-1} \cdot c + \frac{\alpha}{10}\right] - \left[10^{n-1} \cdot c\right] \right\}.$$

Si donc on désigne par $c_r^{(i)}$ la $i^{\text{ième}}$ décimale dans le développement de $\log r$, on aura

(2)
$$c_r^{(i)} = [10^i \cdot \log r] - 10\,[10^{i-1} \cdot \log r]$$

et la somme $\sum_n^{(i)}$ des n premières décimales de l'ordre i de la table de logarithmes se présentera sous la forme

(3)
$$\sum\nolimits_n^{(i)} = S_n^{(i)} - 10\, S_n^{(i-1)},$$

si l'on fait, pour abréger,

(4)
$$S_n^{(i)} = \sum_{r=1}^{r=n} [10^i \log r].$$

Cette somme $S_n^{(i)}$ est égale au nombre des points P dont les coordonnées sont des nombres entiers qui sont contenus dans la région du plan (contour compris) limitée par la courbe

$$y = 10^i \cdot \log x$$

et les deux droites

$$y = 1, \ x = n.$$

Pour l'évaluer il suffira de retrancher du nombre des points considérés appartenant au rectangle formé par les quatre droites

$$x = 1, \ x = n, \ y = 1, \ y = b_n^{(i)},$$

où

$$b_n^{(i)} = [10^i \cdot \log n], \tag{5}$$

le nombre des points P contenus dans la région limitée par la courbe

$$y = 10^i \cdot \log x$$

et par les deux droites

$$x = 1, \quad y = b_n^{(i)}.$$

Nous obtenons de la sorte

$$S_n^{(i)} = n\, b_n^{(i)} - \sum_{y=1}^{y=b_n^{(i)}} \left[10^{\frac{y}{10^i}}\right] + R. \tag{6}$$

R désigne ici le nombre des points P à coordonnées entières situés sur la courbe

$$y = 10^i \cdot \log x,$$

et à l'intérieur du rectangle dont il est question plus haut. Ce nombre R est de l'ordre $\log n$. On commet une erreur du même ordre en remplaçant dans le second membre de la formule (6) chacun des entiers $\left[10^{\frac{y}{10^i}}\right]$ par la grandeur correspondante $10^{\frac{y}{10^i}}$, en sorte que

$$\begin{aligned} S_n^{(i)} &= n\, b_n^{(i)} - \sum_{y=1}^{y=b_n^{(i)}} 10^{\frac{y}{10^i}} + 0(\log n) \\ &= n\, b_n^{(i)} - \frac{10^{\frac{1}{10^i}}}{10^{\frac{1}{10^i}} - 1}\left(10^{\frac{b_n^{(i)}}{10^i}} - 1\right) + 0(\log n), \end{aligned} \tag{7}$$

en désignant, avec M. Landau, par

$$0(b(n)),$$

toute quantité telle que

$$\left|\frac{0(b(n))}{b(n)}\right|,$$

reste, quelque grand que soit n, inférieure à une quantité fixe assignable.

Faisons, pour abréger,

$$b_n^{(i)} = [10^i \log n] = 10^i \log n - \delta_n^{(i)} \tag{8}$$

$$\text{et} \quad 10^{\frac{1}{10^i}} = q_i ;$$

il viendra

$$S_n^{(i)} = n b_n^{(i)} - \frac{q_i}{q_i - 1} \cdot 10^{\log n - \frac{\delta_n^{(i)}}{10^i}} + 0\,(\log n)$$

$$= n \left[b_n^{(i)} - \frac{q_i^{1-\delta_n^{(i)}}}{q_i - 1} \right] + 0\,(\log n)$$

d'où

$$\frac{\Sigma_n^{(i)}}{n} = \frac{S_n^{(i)} - 10\,S_n^{(i-1)}}{n} = \left(b_n^{(i)} - 10\,b_n^{(i-1)}\right) - \frac{q_i^{1-\delta_n^{(i)}}}{q_i - 1}$$

$$+ 10\,\frac{q_{i-1}^{1-\delta_n^{(i-1)}}}{q_{i-1} - 1} + 0\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

La $n^{\text{ième}}$ décimale de l'ordre i à laquelle on s'arrête $c_n^{(i)}$, a pour expression

$$c_n^{(i)} = b_n^{(i)} - 10\,b_n^{(i-1)} = 10\,\delta_n^{(i-1)} - \delta_n^{(i)}.$$

D'autre part

$$q_{i-1} = q_i^{10}.$$

Par conséquent la moyenne des n premières décimales de l'ordre i peut se mettre sous la forme

$$\frac{\Sigma_n^{(i)}}{n} = c_n^{(i)} + q_i^{-\delta_n^{(i)}} \left[10\,\frac{q_i^{10 - c_n^{(i)}}}{q_i^{10} - 1} - \frac{q_i}{q_i - 1} \right] + 0\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{9}$$

Si n est une puissance de 10, $c_n^{(i)}$ et $\delta_n^{(i)}$ sont nuls.

Nous avons donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma_n^{(i)}}{n} = 10\,\frac{q_i^{10}}{q_i^{10} - 1} - \frac{q_i}{q_i - 1} \tag{10}$$

quand n augmente indéfiniment par des puissances de 10.

Cette limite diffère peu de 4,5 quand i est très grand, c'est-à-dire quand q_i est très voisin de l'unité.

Soient l l'un quelconque des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 9,$$

et α une grandeur arbitrairement choisie, comprise entre 0 et 1,

$$0 < \alpha < 1.$$

Il existe une infinité de nombres entiers positifs r tels que la $i^{\text{ème}}$ décimale de $\log r$ soit égale à l et tels, en outre, que $\delta_r^{(i)}$ diffère de α d'aussi peu qu'on le veut. En effet, p désignant un nombre entier positif quelconque, envisageons les entiers r définis par les inégalités

$$10^{\frac{p}{10^{i-1}}+\frac{l}{10^i}} \leqq r < 10^{\frac{p}{10^{i-1}}+\frac{l+1}{10^i}}.$$

Le nombre de ces entiers r qui est égal à

$$\left[10^{\frac{p}{10^{i-1}}+\frac{l+1}{10^i}}\right] - \left[10^{\frac{p}{10^{i-1}}+\frac{l}{10^i}}\right]$$

surpassera tout nombre donné d'avance, si l'on choisit p suffisamment grand. On aura

$$\log r = \frac{p}{10^{i-1}} + \frac{l+\xi}{10^i}, \quad 0 < \xi < 1$$

d'où

$$c_r^{(i)} = [10^i \cdot \log r] - 10\,[10^{i-1} \cdot \log r] = l.$$

On voit que dans la suite

$$1,\ 2,\ \ldots \quad n,\ \ldots$$

il existe une infinité de groupes comprenant chacun autant de nombres consécutifs qu'on le veut ayant tous cette propriété commune que la $i^{\text{ème}}$ décimale de leurs logarithmes est égale à l.

Soient r un nombre jouissant de cette propriété et ε une quantité positive aussi petite qu'on le veut. Nous choisirons ε assez petit pour que

$$\alpha - \varepsilon > 0$$

et

$$\alpha + \varepsilon < 1.$$

La différence

$$10^{\frac{[10^i \log r] + \alpha + \varepsilon}{10^i}} - 10^{\frac{[10^i \log r] + \alpha - \varepsilon}{10^i}} = 10^{\frac{[10^i \log r] + \alpha}{10^i}} \left[10^{\frac{\varepsilon}{10^i}} - 10^{\frac{-\varepsilon}{10^i}}\right]$$

sera > 1 si l'on choisit r suffisamment grand. Il existera donc au moins un nombre entier s compris entre les deux termes de cette différence et l'on aura

$$10^i \log s = [10^i \log r] + \alpha + \xi \qquad \text{où } |\xi| < \varepsilon$$

d'où

$$[10^i \log r] = [10^i \log s] = 10\,p + l,$$

p étant un entier positif.

De l'équation

$$10^i \log s = 10p + l + \alpha + \xi$$

résulte ensuite immédiatement

$$c_s^{(i)} = [10^i \log s] - 10\,[10^{i-1} \log s] = l,$$

de sorte que l'entier s appartient à la classe des nombres r tels que

$$c_r^{(i)} = l.$$

Pour ces entiers s dont le nombre est illimité

$$\delta_s^{(i)} = 10^i \log s - [10^i \cdot \log s] = \alpha + \xi,$$

s'est-à-dire diffère de α d'aussi peu qu'on le veut.

On peut donc, vu l'équation (9) énoncer le résultat suivant: Il existe une infinité de nombres entiers positifs s tels que la moyenne des décimales de l'ordre i des s premiers nombres entiers diffère aussi peu qu'on le veut de l'expression

$$l + q_i^{-\alpha}\left[10\,\frac{q_i^{10-l}}{q_i^{10}-1} - \frac{q_i}{q_i - 1}\right]$$ [1])

dans laquelle l est l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ... 9, et α une grandeur arbitrairement choisie entre 0 et 1.

M. Polya auquel nous avons communiqué les résultats qui précèdent a trouvé, de son côté, plusieurs propriétés intéressantes et curieuses des nombres de la suite

$$c_n^{(i)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

II.

Pour évaluer le nombre $P_i(n)$ des décimales paires de la suite

$$c_r^{(i)} \, (r = 1, 2, \ldots n),$$

nous remarquerons que

$$c_r^{(i)} = [10^i \cdot \log r] - 10\,[10^{i-1} \cdot \log r]$$

est pair en même temps que

$$[10^i \cdot \log r].$$

Il suffira donc de déterminer les nombres r de la suite 1, 2, ... n, pour lesquels

$$[10^i \cdot \log r].$$

est un nombre pair $2m$.

[1]) Pour i très grand, cette expression a une valeur voisine de 4, 5.

On aura

$$2\,m \leqq 10^i \cdot \log r < 2\,m + 1$$

$$10^{\frac{2\,m}{10^i}} \leqq r < 10^{\frac{2\,m+1}{10^i}}$$

de sorte que r peut prendre les valeurs

$$\left[10^{\frac{2\,m}{10^i}}\right] + 1, \qquad \left[10^{\frac{2\,m}{10^i}}\right] + 2, \ldots \qquad \left[10^{\frac{2\,m+1}{10^i}}\right]$$

dont le nombre est égal à

$$\left[10^{\frac{2\,m+1}{10^i}}\right] - \left[10^{\frac{2\,m}{10^i}}\right].$$

Ce nombre toutefois doit être augmenté d'une unité si $2\,m$ est divisible par 10^i.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$b_n^{(i)} = [10^i \cdot \log n]$$

soit un nombre pair $2\,h$; alors le nombre m sera susceptible de prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots h$.

Seulement le dernier groupe, r étant au plus égal à n, ne comprendra que

$$n - \left[10^{\frac{2\,h}{10^i}}\right]$$

termes au lieu de

$$\left[10^{\frac{2\,h+1}{10^i}}\right] - \left[10^{\frac{2\,h}{10^i}}\right].$$

Nous aurons donc

$$P_i(n) = \sum_{m=0}^{m=h-1} \left\{\left[10^{\frac{2\,m+1}{10^i}}\right] - \left[10^{\frac{2\,m}{10^i}}\right]\right\} + n - \left[10^{\frac{2\,h}{10^i}}\right] + R$$

où R désigne le nombre des entiers $0 \leqq m \leqq h$, tels que $2\,m$ soit divisible par 10^i.

$$R = \left[\frac{2\,h}{10^i}\right] + 1$$

est de l'ordre $\log n$ seulement.

Si l'on fait, comme précédemment,

$$q_i = 10^{\frac{1}{10^i}},$$

il viendra

$$P_i(n) = n\left(1 - \frac{q_i^{1-\delta_n^{(i)}}}{q_i + 1}\right) + 0\,(\log n).$$

La condition $b_n^{(i)}$ = nombre pair est satisfaite lorsque n est une puissance de 10; dans ce cas particulier

$$\frac{P_i(n)}{n} = \frac{1}{q_i+1} + 0\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

$$\lim \frac{P_i(n)}{n} = \frac{1}{q_i+1} < \frac{1}{2}$$

quand n croît indéfiniment par des puissances de 10.

Dans le cas général le rapport

$$\frac{P_i(n)}{n}$$

pourra s'approcher autant qu'on le voudra de

$$1 - \frac{q_i^{1-\alpha}}{q_i+1},$$

α étant arbitrairement choisi entre 0 et 1, et n croissant par des valeurs telles que

$$[10^i \cdot \log n]$$

soit un nombre pair.

Si l'on s'arrête à un nombre n pour lequel

$$[10^i \log n]$$

est impair, on obtient

$$P_i^{(n)} = n \cdot \frac{q_i^{1-\delta_n^{(i)}}}{q_i+1} + 0\,(\log n)$$

et, dans ces conditions, le rapport

$$\frac{P_i^{(n)}}{n}$$

peut s'approcher autant qu'on le veut de la fraction

$$\frac{q_i^{1-\alpha}}{q_i+1},$$

α désignant toujours une quantité quelconque comprise entre 0 et 1.

III.

Il est aisé de déterminer le nombre

$$P_i^{(l)}(n)$$

des entiers r non supérieurs à n, tels que la $i^{\text{ème}}$ décimale de $\log r$

$$c_r^{(i)},$$

soit égale à un nombre donné l. Les nombres cherchés r devront satisfaire à des inégalités de la forme

$$p + \frac{l}{10} \leqq 10^{i-1} \cdot \log r < p + \frac{l+1}{10},$$

où p est un entier positif ou nul. On devra distinguer trois cas:

$$\text{Si} \qquad l < c_n^{(i)},$$

le nombre p peut prendre les valeurs

$$0, 1, 2, \ldots b_n^{(i-1)}.$$

Lorsque
$$l = c_r^{(i)},$$

on doit attribuer à p les valeurs

$$0, 1, 2, \ldots b_n^{(i-1)} - 1;$$

à la valeur $p = b_n^{(i-1)}$ correspond un dernier groupe de nombres r comprenant

$$n - \left[10^{\frac{b_n^{(i-1)}}{10^{i-1}} + \frac{c_n^{(i)}}{10^i}} \right]$$

termes.

Enfin si $l > c_n^{(i)}$, la sommation relative à p doit s'étendre aux nombres $0, 1, 2, \ldots b_n^{(i-1)} - 1$. On obtient ainsi les formules:

$$P_i^{(l)}(n) = n \left(\frac{q_i - 1}{q_{i-1} - 1} \right) q_{i-1}^{1 - \delta_n^{(i-1)}} \cdot q_i^l + 0 (\log n), \quad l < c_n^{(i)}$$

$$P_i^{(l)}(n) = n \left(\frac{q_i - 1}{q_{i-1} - 1} \right) q_{i-1}^{-\delta_n^{(i-1)}} \cdot q_i^l + n - n\, q_i^{-\delta_n^{(i)}} + 0 (\log n), \quad l < c_n^{(i)}$$

$$P_i^{(l)}(n) = n \left(\frac{q_i - 1}{q_{i-1} - 1} \right) q_{i-1}^{-\delta_n^{(i-1)}} \cdot q_i^l + 0 (\log n), \quad l > c_n^{(i)}$$

dans lesquelles

$$q_{i-1} = q_i^{10}, \; c_n^{(i)} = 10\, \delta_n^{(i-1)} - \delta_n^{(i)}.$$

Les résultats relatifs à la moyenne arithmétique des décimales

$$c_r^{(i)} \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

et au nombre $P_i(n)$ de celles d'entre elles qui sont paires établis précédemment sont naturellement des conséquences immédiates de ces formules comme on le vérifie sans peine.

On voit que la fréquence de la décimale l, si l'on suppose $l < c_n^{(i)}$ ou $l > c_n^{(i)}$, croît avec l. On suppose, bien entendu, n assez grand pour que le terme de l'ordre $\log n$ soit négligeable.

IV.

La méthode qui vient d'être exposée est applicable à toute fonction croissante $f(n)$ qui croit moins rapidement que n, par exemple à la fonction

$$f(n) = n^\alpha,$$

où α est positif mais < 1.

Soit $c_n^{(i)}$ la $i^{\text{ième}}$ décimale dans le développement de n^α, de sorte que

$$c_n^{(i)} = [10^i \cdot n^\alpha] - 10\,[10^{i-1} \cdot n^\alpha].$$

Dans ce cas particulier le nombre $P_i^{(l)}(n)$ des entiers r, non supérieurs à n, tels que la $i^{\text{ième}}$ décimale de r^α, $c_r^{(i)}$ soit égale à l, où l est l'un quelconque des nombres

$$0,\ 1,\ 2, \ldots\ 9,$$

a pour expression

$$\frac{n}{10} + 0\ (n^\sigma),$$

σ désignant la plus grande des deux quantités α, $1-\alpha$. La valeur principale de $P_i^{(l)}(n)$ est donc indépendante de l.

La moyenne arithmétique des n premières décimales de l'ordre i tend par conséquent vers la limite 4,5, quand n augmente indéfiniment, et le rapport du nombre des décimales paires de la suite

$$c_r^{(i)}\ (i = 1,\ 2, \ldots\ n),$$

au nombre n vers la limite $\frac{1}{2}$.

Le présent travail a été entrepris après lecture d'un mémoire très intéressant, plein de vues ingénieuses, mais dont quelques-unes nous paraissent discutables, publié par M. Pierre Cérésole dans les Archives de psychologie, Tome XV, juin 1915, sous le titre: L'irréductibilité de l'intuition des probabilités et l'existence de propositions mathématiques indémontrables.

Zurich, mars 1917.