Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefässe mit linear veränderlicher Wandstärke.

Von

Ernst Meissner.

(Manuskript eingegangen am 21. Februar 1917.)

In frühern Arbeiten[1]) habe ich eine Integrationstheorie für das Elastizitätsproblem von Rotationsschalen gegeben. Es soll hier am Beispiel des Zylinders mit linear veränderlicher Wandstärke gezeigt werden, wie gross die Vorteile jener Methode für die numerische Berechnung sind. Derartige Zylinder finden als Reservoire Verwendung, und sind daher schon früher behandelt worden.[2]) Meine Methode legt zunächst die analytische Natur der in jenen Arbeiten verwendeten Reihen dar: Es handelt sich um komplexe Zylinderfunktionen. Sodann gibt sie für die gesuchten Spannungen und Verschiebungen fertige Reihenausdrücke, die ausserordentlich rasch konvergieren, da die einzelnen Glieder im Nenner Produkte dreier Fakultäten enthalten (Formeln 29). Endlich ist sie auch auf den der Reihenmethode praktisch entzogenen Fall sehr schlanker Zylinder ausdehnbar. Es können nämlich die asymtotischen Entwicklungen der Bessel'schen Funktionen gerade in diesem Fall mit Vorteil benutzt werden. Die zugehörigen Formeln werden nicht nur sehr einfach, sie geben auch eine gute Einsicht in den Verlauf der Spannungen und Formänderungen.

---

[1]) E. Meissner: Das Elastizitätsproblem f. dünne Schalen. Phys. Zeitschr. 14 (1913).
„ : Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Diese Zeitschrift 16 (1915).

[2]) H. Reissner: Über die Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden. Beton und Eisen 1908 (S. 150).
H. Lorenz: Techn. Elastizitätslehre. München 1913 (S. 619).
C. Runge: Über die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1904.

1. Die Differentialgleichung des Problems.

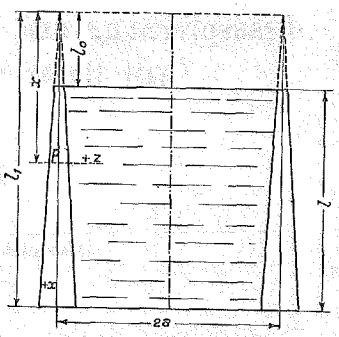
Es bedeuten (Fig. 1):

l, a Länge und Halbmesser des zylindrischen Gefässes;

$h = \eta x$ die halbe Wandstärke im Abstand x von oben;

$p = \gamma x - \delta$ den von innen wirkenden Flüssigkeitsdruck pro Flächeneinheit;

Fig. 1



u, w die Verschiebungen, die ein Punkt $P(x)$ der Mittelfläche in der Richtung x der Axe, resp. radial nach innen (z) erfährt;

ε_1, ε_2 die Dehnungen der Mittelfläche in axialer (x) und tangentialer Richtung (y);

$\varkappa_1 = \dfrac{d^2 w}{dx^2}$ die Krümmung der deformierten Erzeugenden;

T_1, T_2 die Spannungsresultierenden, bezogen auf die Längeneinheit und die ganze Schalendicke, für ein Element normal zur x- resp. y-Richtung;

G_1, G_2 die analog bezogenen Spannungsmomente;

N die analog bezogene Schubspannungsresultierende auf ein Flächenelement senkrecht zur x-Richtung;

$E, \nu, D = \dfrac{2E}{3(1-\nu^2)}$ die Elastizitätszahlen des Materials;

Akzente $(\,)'$ Ableitungen nach x.

Dann gelten die Verzerrungsgleichungen

$$\varepsilon_1 = u' \qquad \varepsilon_2 = -\frac{w}{a} \qquad \varkappa_1 = w''; \tag{1}$$

ferner die elastischen Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 3D\eta \cdot x\left(u' - \nu\frac{w}{a}\right) & G_1 &= -D\eta^3 \cdot x^3 w'' \\ T_2 &= 3D\eta \cdot x\left(-\frac{w}{a} + \nu u'\right) & G_2 &= -\nu D\eta^3 \cdot x^3 w'' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und endlich die Gleichgewichtsbedingungen:

$$T_1' = 0 \qquad T_2 = -aN' + ap \qquad G_1' = N. \tag{3}$$

Aus $T_1' = 0$ folgt, da am Rand kein Axialdruck wirken soll:

$$T_1 = 0, \qquad \text{also} \qquad u' = \frac{\nu}{a} w. \tag{4}$$

Man setze:

$$U = x w' \qquad V = \frac{N}{x} \qquad L(\,) = x(\,)'' + (\,)' - \frac{(\,)}{x} \tag{5}$$

eliminiere N aus (3) und führe dort U und V ein. Man erhält:

$$L(U) = -\lambda_1 V \qquad \left(\lambda_1 = \frac{1}{D\eta^3}\right). \tag{I}$$

Dazu gesellt sich die Verträglichkeitsbedingung. In Gleichung (2) kann T_2 wegen (4) (5) durch U ausgedrückt werden, und wenn man in (3) einträgt, so kommt

$$L(V) = \lambda_2 U + \frac{\delta}{x} \qquad \left(\lambda_2 = \frac{2E\eta}{a^2}\right). \tag{II}$$

Eine Partikularlösung von (I) (II) ist

$$U_0 = -\frac{\delta}{\lambda_2} \cdot \frac{1}{x} \qquad V_0 = 0 \tag{6}$$

Additiv ist dazuzufügen die Lösung von (I) und von

$$L(V) = \lambda_2 U. \tag{II'}$$

Die Elimination von V ergibt dann

$$LL(U) + \varkappa^2 U = 0 \qquad \left(\varkappa^2 = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2\eta^2} = \lambda_1 \lambda_2\right). \tag{III}$$

2. Die Integration durch Bessel'sche Funktionen.

Gleichung (3) zerfällt in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$L(U) + i\varkappa U = 0 \tag{IV$_1$}$$

$$L(U) - i\varkappa U = 0 \tag{IV$_2$}$$

von denen nur die erste gelöst zu werden braucht. Zerlegt man nämlich zwei unabhängige Lösungen derselben in ihre reellen und imaginären Bestandteile, so erhält man in jenen vier unabhängige Lösungen von III.

Wenn man

$$\xi = \sqrt{4 i \varkappa x} \qquad y = \varkappa x \tag{7}$$

einführt, so lautet IV$_1$

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dU}{d\xi} + U\left[1 - \frac{2^2}{\xi^2}\right] = 0. \tag{IV$'_1$}$$

Bedeutet also $J_2(\xi)$ die zweite Bessel'sche Funktion erster Art[1]), und schreibt man, Imaginäres und Reelles trennend,

$$J_2(\xi) = R_2(y) + i\,S_2(y), \tag{8}$$

so sind R_2 und S_2 diejenigen zwei Lösungen von III, die in $x = 0$ endlich bleiben. Es empfiehlt sich, zur Herstellung der zweiten Integralgruppe die erste Hankel'sche[2]) Funktion zweiter Ordnung

$$H_2^{(1)} = J_2 + i\,Y_2$$

einzuführen, die ebenfalls IV_1' genügt. Trennt man auch hier wieder Reelles und Imaginäres, indem man

$$H_2^{(1)}(\xi) = R_2^*(y) + i\,S_2(y) \tag{8'}$$

setzt, so sind R_2, S^* wieder reelle Lösungen von (III). Sie werden in $x = 0$ unendlich. Läuft x positiv ins Unendliche, so bewegt sich

$$\xi = \sqrt{4\varkappa x}\; e^{i\frac{\pi}{4}}$$

in der komplexen ξ-Ebene auf dem Halbstrahl $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ins Unendliche, und die Hankel'sche Funktion $H_2^{(1)}$ geht dabei nach null. Mithin gelten die für die praktische Berechnung wichtigen Relationen:

$$\lim_{x=\infty} R_2^*(\varkappa x) = 0 \qquad \lim_{x=\infty} S_2^*(\varkappa x) = 0. \tag{9}$$

Das allgemeine Integral von III ist

$$U = c_1 R_2 + c_2 S_2 + c_3 R_2^* + c_4 S_2^*.$$

Wegen IV_1, (8) (8') ist

$$L(R_2) = \varkappa S_2 \qquad L(S_2) = -\varkappa R_2 \qquad L(R_2^*) = \varkappa S_2^* \qquad L(S_2^*) = -\varkappa R_2^*$$

und daher nach I

$$V = \frac{\varkappa}{\lambda_1}(-c_1 S_2 + c_2 R_2 - c_3 S_2^* + c_4 R_2^*)$$

und nach (5)

$$N = \frac{\varkappa}{\lambda_1}\left[-c_1(x S_2) + c_2(x R_2) - c_3(x S_1^*) + c_4(x R_2^*)\right] \tag{10}$$

$$w' = -\frac{\delta}{\lambda_2 x^2} + c_1\frac{R_2}{x} + c_2\frac{S_2}{x} + c_3\frac{R_2^*}{x} + c_4\frac{S_2^*}{x}. \tag{11}$$

---

[1]) Vergl. etwa N. Nielsen. Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig (1904) § 2.

[2]) Nielsen a. a. O. § 4.

Ferner ist nach (4) (2) (3)

$$T_2 = -\frac{2\eta E}{a}\cdot x\cdot w \qquad w = -\frac{1}{\lambda_2}\left(\gamma - \frac{\delta}{x} - \frac{N'}{x}\right)$$

und durch Einsetzen von (10)

$$w = -\frac{\gamma}{\lambda_2} + \frac{\delta}{\lambda_2 x} - c_1\frac{(x S_2)'}{\varkappa x} + c_2\frac{(x R_2)'}{\varkappa x} - c_3\frac{(x S_2^*)'}{\varkappa x} + c_4\frac{(x R_2^*)'}{\varkappa x}. \quad (12)$$

Zwischen einer Zylinderfunktion, ihrer Ableitung und den Zylinderfunktionen von benachbartem Index bestehen bekanntlich[1]) lineare Gleichungen, von denen wir folgende benützen:

$$\frac{d J_2}{d\xi} = \frac{\xi}{2}\left[J_0 + \left(1 - \frac{4}{\xi^2}\right) J_2\right]$$

und die analoge für H_2 und H_0. Setzt man entsprechend wie früher

$$J_0(\xi) = R_0(y) + i S_0(y) \qquad H_0(\xi) = R_0^*(y) + i S_0^*(y) \quad (8'')$$

und bezeichnet man Ableitungen nach y mit einem Punkt, so geht dies über in

$$\frac{(x R_2)'}{x} = \varkappa\frac{(y R_2)^{\cdot}}{y} = -\varkappa(S_0 + S_2); \quad \frac{(x S_2)'}{x} = \varkappa\frac{(y S_2)^{\cdot}}{y} = +\varkappa(R_0 + R_2)$$

und Analoges gilt für die mit Stern versehenen Grössen, die übrigens den Beziehungen (9) auch genügen. Daher wird nun nach (12) und (2) (11)

$$\left.\begin{aligned} w = -\frac{\gamma}{\lambda_2} + \frac{\delta}{\gamma_2 x} - c_1(R_0 + R_2) - c_2(S_0 + S_2) - \\ - c_3(R_0^* + R_2^*) - c_4(S_0^* + S_2^*) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G_1 = -\frac{D\eta^3}{\varkappa}\cdot y\cdot\Big\{\frac{2\delta\varkappa}{\lambda_2 y} - c_1\left[y(S_0 + S_2) + 2R_2\right] + c_2\left[y(R_0 + R_2) - 2S_2\right] - \\ - c_3\left[y(S_0^* + S_2^*) + S R_2^*\right] + c_4\left[y(R_0^* + R_2^*) - 2S_2^*\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

3. Die Reihenentwicklungen für die Integrale.

Sie können wegen (8) (8′) sofort aus denjenigen für die Bessel'schen und Hankel'schen Funktionen entnommen werden.[2]). Man hat

$$\left.\begin{aligned} R_2(y) &= \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q y^{2q+2}}{(2q+1)!\,(2q+3)!} & S_2(y) &= \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q y^{2q+1}}{(2q)!\,(2q+2)!} \\ R_0 + R_2 &= \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q y^{2q}}{(2q)!\,(2q+1)!} & S_0 + S_2 &= \sum_{q=1}\frac{(-1)^q y^{2q-1}}{(2q-1)!\,(2q!)} \end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

---

[1]) Nielsen a. a. O. § 1.

[2]) Nielsen a. a. O. § 1, § 3.

Die Ausdrücke für die Grössen R_2^*, S_2^* etc. werden verwickelter. Wir begnügen uns, hier etwa die zwei ersten anzuschreiben:

$$\left.\begin{aligned} -\pi R_2^* &= -\frac{\pi}{2} R_2 + 2CS_2 + S_2 \lg y + \\ &\quad + \frac{1}{y} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s y^{2s+1}}{(2s)!\,(2s+2)!} \left[\frac{1}{2s+2} + \frac{1}{2s+3} - 2\lambda(2s+2)\right] \\ \pi S_2^* &= \frac{\pi}{2} S_2 + 2CR_2 + R_2 \lg y - 1 + \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} y^{2s}}{(2s-1)!\,(2s+1)!} \left[\frac{1}{2s+1} + \frac{1}{2s+2} - 2\lambda(2s+1)\right] \end{aligned}\right\} . \quad (14')$$

Hierin ist C die Mascheroni-Euler'sche Konstante, und es bedeutet

$$\lambda(r) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} \qquad \lambda(o) = 0.$$

Alle aufgeschriebenen Reihen sind beständig konvergent und konvergieren für nicht allzugrosse Werte von y verhältnismässig rasch, da im Nenner jedes Gliedes zwei Fakultäten auftreten.

Es wird weiter unten gezeigt, dass für grosse Werte von y diese Reihen gar nicht gebraucht werden müssen.

4. Die Randbedingungen.

Das zylindrische Gefäss sei von zwei Parallelkreisen $x = l_0$ und $x = l_1 > l_0$, dem dünnen und dem dicken Rand begrenzt, und bis zum dünnen Rand mit Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht γ gefüllt. Da für $x = l_0$ $p = 0$ wird, so hat δ den Wert γl_0.

Für einen eingespannten Rand ist $\quad w = 0 \quad w' = 0$,
für einen kräftefreien Rand dagegen $\quad G_1 = 0 \quad N = 0$.

Für die zwei Ränder erhält man vier derartige Bedingungen, die für die vier Integrationskonstanten $c_1 \ldots c_4$ ebensoviele lineare Gleichungen ergeben.

Sehen wir von dem Grenzfall ab, wo c_3 und c_4 sehr gross werden, und nennen wir einen Zylinder schlank, wenn der Ausdruck

$$y_1 = \varkappa l_1 = \sqrt{3(1-\nu^2)}\,\frac{l_1}{a\eta} \qquad (15)$$

gross ist, so werden wegen (9) alle Spannungs- und Deformationsgrössen in der Nähe des dicken Randes ($x \infty l_1$) für einen solchen Zylinder ungefähr dieselben Werte annehmen, wie auch c_3 und c_4 ausfallen. c_1 und c_2 bestimmen sich wesentlich aus den Randbedingungen am dicken Rand allein; aus denen am dünnen folgen dann c_3 und c_4.

Mithin ist für einen schlanken Zylinder Spannungs- und Verzerrungszustand gegen das dicke Ende zu praktisch unabhängig davon, wie das dünne Ende beansprucht wird.

Man wird in diesem Satz eine Bestätigung des Prinzips von de St. Venant erblicken.

5. Die Wandstärke verschwindet am obern Rand.

Dieser Fall, wo also $l_0 = 0$ $\delta = 0$ zu setzen ist, soll in der Folge ausschliesslich betrachtet werden.[1])

Da für $x = 0$ die mit Stern behafteten Grössen unendlich werden (Gl. (14′), während w, G_1 etc. endlich bleiben müssen, so hat man

$$c_3 = c_4 = 0$$

zu setzen. Es verschwinden dann G_1 und N am obern Rand. Dieser ist spannungsfrei zu denken.

5A. Das untere Ende des Gefässes ist eingespannt.

Für $x = l_1$ $y = y_1 = \varkappa l_1$ ist dann $w = 0$ $w' = 0$. Dies gibt nach (13) (11)

$$c_1 \mathfrak{R}_2 + c_2 \mathfrak{S}_2 = 0 \qquad c_1 \mathfrak{R}_0 + c_2 \mathfrak{S}_0 = -\frac{\gamma}{\lambda_2}. \tag{16}$$

Hier sind die Funktionen mit deutschen Lettern bezeichnet, um anzudeuten, dass sie für den untern Rand ($x = l_1$) zu bilden sind. Es wird mit

$$\varDelta = \mathfrak{R}_0 \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0 \mathfrak{R}_2 \tag{17}$$

nun

$$c_1 = -\frac{\gamma}{\lambda_2} \frac{\mathfrak{S}_2}{\varDelta} \qquad c_2 = +\frac{\gamma}{\lambda_2} \frac{\mathfrak{R}_2}{\varDelta}. \tag{18}$$

Beachtet man, dass

$$R_0(0) = 1 \qquad S_0(0) = R_2(0) = S_2(0) = 0,$$

so findet man für die besonders interessierende Radialverschiebung w_0 des freien Randes nach innen

$$w_0 = -\frac{\gamma}{\lambda_2}\left(1 - \frac{\mathfrak{S}_2}{\varDelta}\right) \tag{19}$$

und für das Biegungsmoment G_1 an der Einspannungsstelle

$$G_1 = -\frac{l_1^2 \gamma}{\varkappa} \cdot \frac{Z}{\varDelta} = -\frac{p_{\max} l}{\varkappa} \frac{Z}{\varDelta}, \tag{20}$$

[1]) Dieser Fall entspricht dem von Reissner a. a. O. behandelten.

wo abkürzend

$$Z = (\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_2)\,\mathfrak{R}_2 + (\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_2)\,\mathfrak{S}_2 \tag{21}$$

gesetzt ist.

5B. Das untere Ende des Gefässes ist festgehalten.

Dann ist für $x = l_1$ wieder $w = 0$; dazu aber kommt $G_1 = 0$. die c bestimmen sich aus

$$c_1(\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_2) + c_2(\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_2) = -\frac{\gamma}{\lambda_2};$$

$$c_1\left[y_1(\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_2) + 2\mathfrak{R}_2\right] = c_2\left[y_1(\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_2) - 2\mathfrak{S}_2\right]$$

zu $\quad c_1 = -\frac{\gamma}{\lambda_2}\,\frac{y_1(\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_2) - 2\mathfrak{S}_2}{\Delta_1} \qquad c_2 = \frac{\gamma}{\lambda_2}\,\frac{y_1(\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_2) + 2\mathfrak{R}_2}{\Delta_1}.$

Die Radialverschiebung am freien Ende wird

$$w_0 = -\frac{\gamma}{\lambda_2}\left(1 - \frac{K_2}{\Delta_1}\right), \tag{22}$$

die Neigung der Erzeugenden am festgehaltenen Ende

$$w_1' = \operatorname{tg}\tau_1 = -\frac{\gamma\cdot\varkappa}{\lambda_2}\cdot\frac{Z}{\Delta_1} \tag{23}$$

und die Schubkraft ebendort

$$N_1 = -\frac{\gamma\, y_1}{\varkappa^2}\cdot\frac{Z_1}{\Delta_1}. \tag{24}$$

Hiebei ist Z aus (21) erklärt, und es bedeuten

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= 2(\mathfrak{R}_2^2 + \mathfrak{S}_2^2) - y_1\,\Delta \\ K_2 &= y_1(\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_2) - 2\,\mathfrak{S}_2 \\ \Delta_1 &= y_1\left[(\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_2)^2 + (\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_2)^2\right] - 2\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

6. Die Umformung der Reihenprodukte in eine einzige Reihe.

Für die praktische Berechnung der aufgestellten Grössen ist nun sehr wichtig, dass für die in (17) bis (25) auftretenden Determinanten fertige Reihen angegeben werden können, so dass die einzelnen Glieder gar nicht berechnet zu werden brauchen. Es ist bemerkenswert, dass diese Reihen auch sehr rasch konvergieren, da ihre Glieder im Nenner nicht bloss zwei Fakultäten, wie die Bessel'schen, sondern sogar deren drei enthalten. Diese Entwicklungen entsprechen

denjenigen, die für die Produkte zweier Besselfunktionen von Schönholzer[1]) gegeben worden sind.

Hier soll an dem Beispiel der Determinante (21) die Methode gezeigt werden, die zu ihrer Herleitung dient.

Es ist nach (14)

$$\mathfrak{R}_2(\mathfrak{R}_0+\mathfrak{R}_2)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q+r}y_1^{2q+2r+2}}{(2q+1)!\,(2q+3)!\,(2r)!\,(2r+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y_1^{2n+2}}{(2n+1)!\,(2n+4)!}\alpha_n \tag{26}$$

wo
$$\alpha_n=\sum_{q=0}^{n}\frac{(2n+1)!\,(2n+4)!}{(2q+1)!\,(2n-2q)!\,(2q+3)!\,(2n-2q+1)!}=\sum_{q=0}^{n}\binom{2n+1}{2q+1}\binom{2n+4}{2q+3}.$$

Nach dem Residuensatz ist

$$\binom{2n+4}{2q+3}=\binom{2n+4}{2n-2q+1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0\circlearrowleft}\frac{(1+t)^{2n+4}}{t^{2n+2-2q}}\,dt,$$

also

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0\circlearrowleft}\frac{(1+t)^{2n+4}}{t^{2n+3}}\sum_{q=0}^{n}t^{2q+1}\binom{2n+1}{2q+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0\circlearrowleft}\frac{(1+t)^{2n+4}}{t^{2n+3}}\cdot\frac{1}{2}\left\{(1+t)^{2n+1}-(1-t)^{2n+1}\right\}dt$$

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)^{4n+5}}{t^{2n+3}}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(1-t^2)^{2n+1}(1+t)^3}{t^{2n+3}}\,dt.$$

Alle Integrale sind in der komplexen t-Ebene um den Nullpunkt in positivem Sinne zu erstrecken.

Die Integrale sind wesentlich die Koeffizienten von t^{2n+2} in den Entwicklungen von

$$(1+t)^{4n+5}\ \text{resp.}\ (1-t^2)^{2n+1}(1+3t+3t^2+t^3).$$

Man hat daher

$$\alpha_n=\frac{1}{2}\binom{4n+5}{2n+2}+\binom{2n+1}{n}(-1)^{n+1} \tag{26'}$$

Ganz ähnlich findet man

$$\mathfrak{S}_2(\mathfrak{S}_0+\mathfrak{S}_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}y_1^{2n+2}}{(2n+1)!\,(2n+4)!}\beta_n\quad \beta_n=\frac{1}{2}\binom{4n+5}{2n+2}-\binom{2n+1}{n}(-1)^{n+1}, \tag{27}$$

worauf durch Addition von (26) und (27)

$$Z=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_1^{2n+2}}{n!\,(n+1)!\,(2n+4)!}. \tag{28}$$

[1]) Schönholzer: Über die Auswertung bestimmter Integrale etc. Bern 1877. Vergl. auch Nielsen a. a. O. § 6.

Wir stellen im folgenden weitere analog hergestellte Reihenentwicklungen zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= \sum_0^\infty \frac{y_1^{2n+1}}{n!\,(n+1)!\,(2n+2)!} \\
\Delta_1 &= 2\sum_1^\infty \frac{y_1^{2n+1}}{(n-1)!\,(n+1)!\,(2n+2)!} \\
K_2 &= \sum_1^\infty \frac{(-1)^n y_1^{2n+1}}{(2n-1)!\,(2n+2)!} \\
Z_1 &= -\sum_0^\infty \frac{y_1^{2n+2}(2n)(2n+3)}{n!\,(n+1)!\,(2n+4)!}
\end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Mit Hülfe dieser Reihen, die für nicht zu grosse Werte von

$$y_1 = \sqrt{3(1-\nu^2)}\,\frac{l_1}{a\eta}$$

sehr rasch konvergieren, kann man, ohne vorerst auf die Berechnung der Integrationskonstanten eingehen zu müssen, direkt die in (19), (20), (22) und (23) aufgeführten Grössen, die praktisch allein interessieren, ermitteln. Die Rechnungsarbeit wird dadurch auf ein Mindestmass zurückgeführt.

Die Nennergrössen Δ und Δ_1 wachsen mit y_1 von null an bis ins Unendliche; die angegebenen Formeln sind immer brauchbar. Die Formeln (28) und (29) haben den weitern Vorteil, dass sie nur rein numerische Koeffizienten enthalten. Sie können daher tabuliert werden.

7. Asymptotische Entwicklungen für schlanke Zylinder.

Schon Reissner[2]) hat festgestellt, dass bei der Anwendung der Formeln auf den Fall eiserner Gefässe der Wert von y_1 so beträchtlich gross ist, dass eine Berechnung der Reihen $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{S}_2$ (die er wesentlich benutzt) mühsam oder unausführbar wird. Er empfiehlt, für diesen Fall das Gefäss in Ringe aufzuteilen, und für jeden Ring die Wandstärke als unveränderlich zu betrachten.

Nachdem die analytische Natur jener Reihen, und ihr Zusammenhang mit den Bessel'schen erkannt ist, bietet es keine Schwierigkeit, die Theorie auch auf den Fall eines grossen y_1 auszudehnen. In der Tat kann man von den asymptotischen Ausdrücken Gebrauch machen, die die Bessel'schen Funktionen für grosse Werte des Argumentes darstellen. Ja, es lässt sich sogar behaupten, dass rechnerisch der Fall eines grossen y_1 einfacher liegt, und man sehr einfach gebaute,

aus wenigen Gliedern bestehende Formeln aufstellen kann, die um so genauer und einfacher sind, je schlanker der vorliegende Zylinder ausfällt.

Grundlage für die folgenden Entwicklungen ist die von Hankel[1]) gegebene asymptotische Darstellung für die nach ihm benannten Funktionen $m$ter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} e^{-i\left(\xi-\frac{2m+1}{4}\pi\right)} H_m^{(1)}(\xi) &\backsim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left[P_n(\xi)+i\,Q_n(\xi)\right] \\ e^{+i\left(\xi-\frac{2m+1}{4}\pi\right)} H_m^{(2)}(\xi) &\backsim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left[P_n(\xi)-i\,Q_n(\xi)\right] \end{aligned}\right\}.$$

Hier bedeutet das $\backsim$ Zeichen asymptotische Gleichheit im Sinne Poincaré's, und $P_n(\xi)$, $Q_n(\xi)$ sind gewisse, nach fallenden Potenzen von ξ fortschreitende Reihen.

Setzt man diese Beziehungen nach (7) in reelle um, und bezeichnet man abkürzend

$$\varrho = \sqrt{2y} \qquad f = \frac{e^{\varrho}}{\sqrt{2\pi\sqrt{2\varrho}}}, \tag{30}$$

so erhält man folgende asymptotischen Darstellungen:

$$\left.\begin{aligned}
R_2 &\backsim f\left[\cos\sigma_2\cdot p_2+\sin\sigma_2\cdot q_2\right] & p_2 &= 1-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\varrho}-\frac{3\cdot7\cdot15}{4^6}\frac{1}{\varrho^3}- \\
& & &\quad -\frac{7\cdot3\cdot15\cdot11}{2\cdot4^8}\cdot\frac{1}{\varrho^4}+\cdots \\
S_2 &\backsim f\left[\cos\sigma_2\cdot q_2-\sin\sigma_2\cdot p_2\right] & q_2 &= -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\varrho}+\frac{7\cdot15}{4^4}\frac{1}{\varrho^2}+ \\
& & &\quad +\frac{7\cdot9\cdot15}{4^6}\frac{1}{\varrho^3}+\frac{0}{\varrho^4}+\cdots \\
R_0+R_2 &\backsim -f\left[+\cos\sigma_2\,p_{02}+\sin\sigma_2\,q_{02}\right] & p_{02} &= \frac{1}{\varrho}+\frac{15}{4^4}\frac{1}{\varrho^3}+\frac{7\cdot15}{2\cdot4^5}\frac{1}{\varrho^4}+\cdots\cdots \\
S_0+S_2 &\backsim -f\left[\cos\sigma_2\,q_{02}-\sin\sigma_2\,p_{02}\right] & q_{02} &= \frac{1}{\varrho}-\frac{3}{8\varrho^2}-\frac{15}{4^4}\cdot\frac{1}{\varrho^3}+\frac{0}{\varrho^4}+\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

mit

$$\sigma_2 = \varrho - \frac{9\pi}{8}\cdot \tag{31'}$$

Diesen Formeln entsprechend kann man nun die für die Berechnung der wichtigen Grössen notwendigen Ausdrücke für

$$\Delta,\ Z,\ \Delta_1,\ Z_1 \text{ und } K_2$$

entwickeln. So ergeben sich die Formeln:

---

[1]) Math. Ann. 1 (1869). Vergl. auch Nielsen a. a. O. § 58.

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= f_1^2 \left[\frac{1}{\varrho_1} - \frac{3}{8\varrho_1^2} - \frac{15}{128\varrho_1^3} - \frac{45}{4^5}\cdot\frac{1}{\varrho_1^4} + \cdots\right\} \\
Z &= -f_1^2 \left[\frac{1}{\varrho_1} - \frac{15}{8\varrho_1^2} + \frac{15\cdot 7}{2\cdot 4^3}\,\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{15\cdot 7}{4^5}\,\frac{1}{\varrho_1^4} + \cdots\right\} \\
\Delta_1 &= f_1^2 \left[1 - \frac{19}{8\varrho_1} + \frac{15\cdot 7}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{15\cdot 21}{4^5}\,\frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{45\cdot 133}{4^8}\,\frac{1}{\varrho_1^4}\cdots\right\} \\
Z_1 &= f_1^2\,\varrho_1 \left[-\frac{1}{2} + \frac{35}{16\,\varrho_1} - \frac{49}{4^4}\cdot\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{15\cdot 7\cdot 5}{2\cdot 4^5}\,\frac{1}{\varrho_1^3}\cdots\right\} \\
K_2 &= -f_1\,\varrho_1 \left[\cos\sigma_2\cdot\left\{\frac{1}{2} - \frac{15\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4^4\,\varrho_1^2} + \frac{15\cdot 7\cdot 33}{4^6\,\varrho_1^3} + \cdots\right\} + \right. \\
&\qquad \left. + \sin\sigma_0\left\{\frac{1}{2} - \frac{5\cdot 7}{16\,\varrho_1} + \frac{15\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4^4}\cdot\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{0}{\varrho_1^3} + \cdots\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Der an f und ϱ angehängte Index sagt aus, dass diese Werte für $x = l_1$ also $y = y_1$ zu bilden sind.

Die Reihen können um so eher abgebrochen werden, je grösser ϱ_1 ist, d. h. je schlanker der betreffende Zylinder ausfällt. Schon mit $\varrho_1 \cong 8$ erhält man eine Genauigkeit von zirka 1‰, wenn man die angeschriebenen Glieder berücksichtigt. In dem von Reissner[1]) angeführten Beispiel ist der Wert von $p_1 \cong 27{,}3$. Wenn also Fehler von der Grössenordnung 1‰ zugelassen werden, so kann man sich bei den vier ersten Ausdrücken mit den zwei ersten Gliedern allein begnügen. Die Berechnung wird so ausserordentlich kurz.

Übrigens können auch noch die in (19) bis (24) vorkommenden Quotienten in einfache Reihen entwickelt werden. So ergibt sich beispielsweise aus (20) und (32) für das Einspannungsmoment G_1 im Falle 5A:

$$G_1 = -\frac{\gamma\cdot l_1^2}{\varkappa}\cdot\frac{Z}{\Delta} \cong +\frac{\gamma l_1^2}{\varkappa}\left[1 - \frac{6}{(4\varrho_1)}\left(1 - \frac{1}{4\,\varrho_1} + \frac{1}{(4\,\varrho_1)^2}\right)\cdot\cdot\right] \quad (33)$$

und für die dazu proportionale spezifische Randspannung

$$\sigma_{1h} = \frac{3\,G_1}{2h_e^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}}\cdot\frac{a\gamma}{\eta}\cdot\left[1 - \frac{6}{4\,\varrho_1}\left(1 - \frac{1}{4\,\varrho_1} + \frac{1}{(4\,\varrho_1)^2}\right)\cdot\cdot\right]. \quad (33')$$

Diese Spannung nähert sich also mit wachsender Schlankheit rasch dem Grenzwert

$$\sigma_{1h} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}}\cdot\frac{a\gamma}{\eta}.$$

In dem Reissner'schen Beispiel ($\varrho \infty 27$) wird dieser Grenzwert schon bis auf ½% genau erreicht. Für den Fall $\varrho \infty 8$ geht die

[1]) Reissner a. a. O. S. 153.

Annäherung auf 4 %, so dass für ϱ über dieser Grenze praktisch mit dem Wert (34) gerechnet werden kann.

Um endlich noch einen Begriff über die Genauigkeit der asymptotischen Darstellungen, die hier verwendet wurden, zu geben, diene die Bemerkung, dass die Formel (33) mit den angeschriebenen Gliedern für $\varrho \cong 8$ einen Wert ergibt, der von dem durch Reihen berechneten um weniger als ein Tausendstel abweicht.

Die Reihen (32) dürfen also für technischo Zwecke unbedenklich benutzt werden. Ja, es wird schon etwa von $\varrho = 4$ an ein Abbrechen beim zweiten Glied erlaubt sein.

Da bis zu dieser Grenze der Schlankheit und sogar noch weit darüber hinaus die Reihenentwicklungen (28) (29) bequem verwendbar sind, weil sie schnell konvergieren, so ist damit die numerische Berechnung auf rasche Weise gesichert.

8. Die Formveränderung der Gefässwand.

Die ursprünglich gerade Zylindererzeugende geht bei der Deformation in eine Kurve über, welche durch den Ausdruck (13) für w wesentlich bestimmt ist. Es lässt sich zeigen, dass die dort auftretenden Funktionen schwingenden Verlauf haben, dass also eine Querfaltung des Zylinders auftritt, die besonders für schlanke Zylinder recht lebhaft ist. Für solche gelten angenähert die Entwicklungen (31). Aus (30) (31′) erkennt man, dass die Zylindererzeugende zu einer Wellenlinie verbogen wird, deren Amplituden in unmittelbarer Nähe des unteren Endes gross sind, aber sehr rasch nach einem Exponentialgesetz gegen oben abklingen, während auch die Längen der Wellen abnehmen. In der Nähe des unteren Endes berechnet sich die halbe Wellenlänge L aus

$$\sqrt{2\varkappa_1 l_1} - \sqrt{2\varkappa(l_1 - L)} = \pi = \varrho_1\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L}{l_1}}\right)$$

zu
$$L = l_1 \frac{2\pi}{\varrho_1}\left(1 - \frac{\pi}{2\varrho_1}\right) \backsim l_1 \frac{2\pi}{\varrho_1} = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{2(1-\nu^2)}} \sqrt[2]{\frac{a(\eta l_1)}{l_1^2}}.$$

Dieser Wert stimmt überein mit dem entsprechenden für einen Zylinder von konstanter Wandstärke $2\eta l_1$.

Die spezifischen Ringspannungen $\sigma_t = \frac{T_2}{2\eta x}$ sind wegen (2) und (4) zu w proportional. Es wird daher durch die angestellten Betrachtungen eine Behauptung Reissners bestätigt, dass bis in unmittelbare Nähe des unteren Endes der Wasserdruck in der Hauptsache von den Ringspannungen aufgenommen wird.

9. Numerische Berechnungen für den unten eingespannten Zylinder. (Fall 5 A.)

In Fig. 2 gibt die Kurve C_1 den Verlauf der Funktion $-\frac{Z}{\Delta}$, wobei als Abszisse die Grösse $y_1 = \varkappa l_1$ gewählt ist. Sie hängt mit dem Biegungsmoment G_1 an der Einspannungsstelle, resp. mit der zugehörigen maximalen Biegungsspannung σ_{1h} nach folgenden Formeln zusammen:

$$G_1 = \frac{l_1^2 \gamma}{\varkappa}\left(-\frac{Z}{\Delta}\right) \qquad \sigma_{1h} = \frac{\gamma a}{2\eta} \cdot \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \cdot \left(-\frac{Z}{\Delta}\right).$$

Die Kurve wurde bis $y_1 = \sqrt{1000}$ mit den Reihen (29), darüber hinaus nach (32) berechnet. Die Formeln (32) können übrigens schon mit hinreichender Genauigkeit für ein viel kleineres y_1 benützt werden. Nach (32) nähert sich die Schaulinie asymptotisch dem Wert 1, die Biegungsspannung dem Wert

$$\sigma_{1h}^* = \frac{\gamma \cdot a}{2\eta} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}}.$$

Die Kurve C_2 gibt über das Verhalten der Radialdurchbiegung w_0 am freien Ende, und damit über die dort herrschende Ringspannung

$$\sigma_{t0} = -\frac{E}{a} w_0$$

Aufschluss. Um einen direkten Vergleich mit der Biegungsspannung σ_{1h} zu ermöglichen, ist als Funktion von y_1 aufgetragen die Grösse

$$\frac{2\eta}{\gamma a}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\sigma_{t0} = -\frac{\lambda_2}{\gamma}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \cdot w_0 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\left(1-\frac{\mathfrak{S}_2}{\Delta}\right),$$

so dass sich die Ordinaten beider Kurven verhalten wie $\sigma_{1h} : \sigma_{t0}$. Wegen (31) (32) nähert sich C_2 rasch dem festen Wert $\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}$, um den herum sehr rasch abklingende Schwingungen stattfinden. Die Schaubilder zeigen, dass von $y_1 \infty 11$ an die Biegungsspannung die Ringspannung übertrifft. Freilich ist die Ringspannung am freien Ende nicht am grössten, und es wäre denkbar, dass ihr grösster Wert den von σ_{1h} überträfe.

Um hierüber Aufschluss zu erhalten, ist für den Fall $y_1 = \sqrt{1000}$ die Deformation des Zylinders berechnet worden. Die Kurve C_3 gibt mit der Abszisse $y = \varkappa x$ als Ordinate die Radialverschiebung w in einem Masstab, der aus C_2 leicht ermittelt werden kann. Es bestätigt sich, dass w nur am untern Ende stark variiert, und am obern

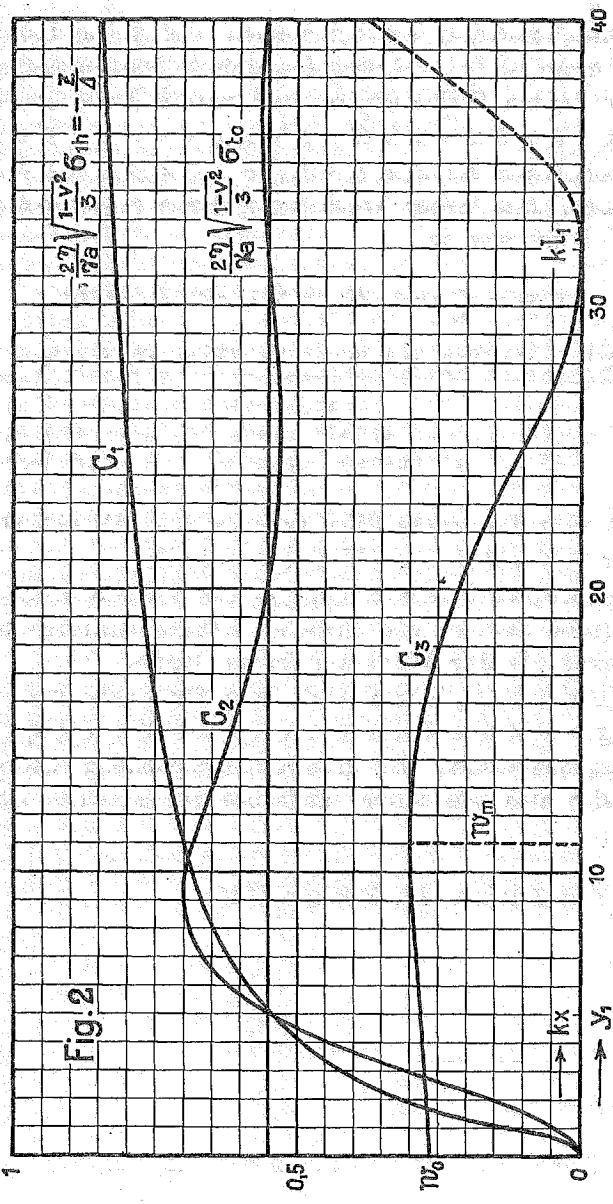


Fig. 2
$\frac{2\eta}{\varkappa a}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\sigma_{1h} = -\frac{Z}{\Delta}$
$\frac{2\eta}{\varkappa a}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\sigma_{to}$
C_1
C_2
C_3
kl_1
η_m
η_0
kx
y_1
1
0,5
0
10
20
30
40

Ende nahezu den konstanten Wert

$$w^* = -\frac{\gamma}{\lambda_2}$$

hat, und dies, trotzdem die Schlankheit des gewählten Zylinders noch nicht gross ist ($\varrho_1 = 7,95$). Die grösste Durchbiegung w_m entspricht dem ersten Wellenscheitel vom untern Ende ab gerechnet. Sie tritt an einer Stelle auf, für welche ϱ dem angenäherten Wert $\varrho^* = \varrho - \pi$ annimmt. Es wird $\varrho^* = 4,81$ $y^* = 11,5$. Aus der Figur ist ersichtlich, dass dieser Wert jener Stelle schon genügend gut entspricht. Setzt man in

$$w = -\frac{\gamma}{\lambda_2} - c_1 (R_0 + R_2) - c_2 (S_0 + S_2)$$

die Ausdrücke (31) (32) und für ϱ den Wert ϱ^* ein, so ergibt sich

$$-\frac{\lambda_2}{\gamma} w_m \cong 1 + \frac{1}{e^\pi} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1 - \frac{3}{8(\varrho_1 - \pi)}}{1 - \frac{3}{8\varrho_1}} \backsim 1 + \frac{1}{e^\pi} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \pi}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Für $\varrho_1 \cong 8$ wird das zweite Glied noch ca. $^1/_{10}$. Es nähert sich mit wachsender Schlankheit dem Wert $e^{-\pi} = 1:23$.

Für schlanke Zylinder ($\varrho_1 \geq 8$) ist die maximale Durchbiegung (und ebenso die grösste Ringspannung) um 5 bis 10 % grösser als der Wert am freien Ende.

Die Kurven C_1 C_2 lehren jetzt, dass für solche und selbst für noch weniger schlanke Zylinder die grösste Biegungsspannung im Einspannungsquerschnitt die grösste Ringspannung übertrifft. Es empfiehlt sich also, das untere Ende des zylindrischen Gefässes zu verstärken.

Zollikon-Zürich, 14. Februar 1917.