Über algebraische Gleichungen mit nur reellen Wurzeln.

Von

Georg Pólya.

(Als Manuskript eingegangen am 5. Juni 1916.)

Die beiden Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$(a_n \gtrless 0)$ und

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \cdots + b_{n+m} x^{n+m}$$

$(m \geqq 0)$ sollen nur reelle Nullstellen besitzen, und überdies seien die ersten $n+1$ Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$ des letzteren positiv.

Dann hat die Kurve n-ter Ordnung

$$(1) \quad F(x, y) \equiv b_0 f(y) + b_1 x f'(y) + b_2 x^2 f''(y) + \cdots + b_n x^n f^{(n)}(y) = 0$$

n **reelle** Durchschnittspunkte mit jeder Geraden

$$s x - t y + u = 0,$$

vorausgesetzt, dass

$$s \geqq 0, \ t \geqq 0, \ s + t > 0, \ u \text{ reell.}$$

Dieser Satz gehört wohl zu den allgemeinsten bekannten Sätzen über Wurzelrealität. Durch Spezialisierung der Werte s, t, u bekommt man die Geraden

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad x = y,$$

und diesen drei Geraden entsprechend gewinnt man die drei wichtigsten Spezialfälle unseres Satzes, nämlich dass die Polynome

$$\text{I.} \quad b_0 f(y) + b_1 f'(y) + b_2 f''(y) + \cdots + b_n f^{(n)}(y)$$

$$\text{II.} \quad a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + 2!\, a_2 b_2 x^2 + \cdots + n!\, a_n b_n x^n$$

$$\text{III.} \quad b_0 f(x) + b_1 x f'(x) + b_2 x^2 f''(x) + \cdots + b_n x^n f^{(n)}(x)$$

nur reelle Nullstellen besitzen. Diese Spezialfälle sind bekannt. Der erste ist von Hermite und Poulain[1]), der zweite von Herrn J. Schur[2]), und der dritte von Herrn J. Schur und mir[3]) gefunden worden. Umgekehrt folgt der allgemeine Satz aus diesen drei Spezialfällen durch leicht ersichtliche Vertauschungen der Veränderlichen. Ich hatte nur die Absicht, diese drei speziellen Sätze in einer Aussage und in einem einheitlichen geometrischen Bilde zu vereinigen.

Ich will dieses geometrische Bild entwickeln, indem ich mir die Aufgabe stelle, von dem leicht beweisbaren und wohlbekannten Hermite-Poulain'schen Satze ausgehend, den tiefer liegenden Satz des Herrn J. Schur über das Polynom II zu beweisen.

Aus Stetigkeitsgründen kann man die n reellen Wurzeln von $f(x)$ als verschieden voraussetzen. In diesem Falle hat jede Gerade $x =$ konst. n reelle und verschiedene Durchschnittspunkte mit der Kurve (1). (Vergl. J. Schur a. a. O.) Daher besteht die Kurve (1) aus n verschiedenen, stetigen Zügen. Ich behaupte, dass in jedem dieser n Züge y von $+\infty$ bis $-\infty$ geht, wenn x die ganze Abscissenaxe durchlaufend sich von $-\infty$ bis $+\infty$ ändert. In der Tat, wie auch $x \gtrless 0$ gewählt sei, hat die Gleichung n-ten Grades für t

$$F(x, tx) = 0$$

nur reelle Wurzeln. Folglich hat auch die Gleichung

$$(2) \quad \lim_{|x| = \infty} \frac{F(x, tx)}{x^n} = a_n (b_0 t^n + n b_1 t^{n-1} + n(n-1) b_2 t^{n-2} + \cdots + \\ + n(n-1) \ldots 2 . 1\, b_n) = 0$$

nur reelle Wurzeln. Diese Wurzeln von (2) sind aber alle **negativ** (< 0), da $a_n \gtrless 0$, und $b_0 > 0$, $b_1 > 0, \ldots b_n > 0$, laut Voraussetzung.

Das Verhältnis von y zu x ist also endlich und negativ für $|x| = \infty$, und so variiert wirklich y von $+\infty$ bis $-\infty$ in jedem Zuge der Kurve (1), wenn x die Abscissenaxe beschreibt. Daher wird irgendeine Gerade $y =$ konst. alle n Züge von (1) schneiden, d. h. die Kurve (1) hat wenigstens n reelle Schnittpunkte mit irgendeiner Geraden $y =$ konst. Sie hat übrigens genau n Schnittpunkte, da sie

---

[1]) Hermite, Nouvelles Annales, 1866, S. 432, 479, Poulain, dieselbe Zeitschrift, 1867, S. 21—33.

[2]) J. Schur, Crelle's Journal, Bd. 144, S. 75—88. Vergl. auch Malo, Journal des mathématiques spéciales, 1895, S. 7.

[3]) G. Pólya und J. Schur, Crelle's Journal, Bd. 144, S. 107.

von n-ter Ordnung ist. (Das geht, nebenbei bemerkt, nur so, dass alle n Züge monoton abnehmend sind.)

Betrachten wir speziell die Gerade $y = 0$, so ergibt sich, dass die Gleichung

$$F(x, 0) \equiv a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 x + 2! a_2 b_2 x^2 + \cdots + n! a_n b_n x^n = 0$$

n reelle und verschiedene Wurzeln hat: dies ist das bemerkenswerte Resultat von Herrn J. Schur. Aus dem entwickelten geometrischen Bilde ergibt sich nun mühelos der volle am Anfang dieser Note ausgesprochene Satz.