Über das Anwachsen von ganzen Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen.

Von

Georg Pólya.

(Als Manuskript eingegangen am 5. Juni 1916.)

1. Wohlbekannt ist der Liouville'sche Satz über die Approximation algebraischer Zahlen durch rationale. Vorliegende Abhandlung soll die Frage aufwerfen, ob sich nicht ein Analogon dieses Satzes in der Theorie der Differentialgleichungen finden liesse?

Es sei α eine reelle irrationale Zahl, und es sei unter allen rationalen Zahlen, deren Nenner n nicht übersteigt, die Zahl r_n der Zahl α am nächsten gelegen. Die Folge der rationalen Zahlen

$$(1) \qquad r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$$

strebt gegen α. Der Liouville'sche Satz besagt nun, dass die Folge (1) nicht beliebig schnell gegen α konvergieren kann, wenn α einer Gleichung m-ten Grades mit rationalen Koeffizienten genügt. [1])

Meine Frage lautet nun so: Die Potenzreihe

$$(2) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

genüge einer algebraischen Differentialgleichung m-ter Ordnung, d. h. einer Gleichung

$$(3) \qquad R(x, y, y', y'', \ldots y^{(m)}) = 0,$$

wo die Funktion R von ihren $m+2$ Argumenten $x, y, y', y'', \ldots y^{(m)}$ rational abhängig ist. Wenn die Reihe (2) eine ganze Funktion (jedoch kein Polynom) darstellt, kann dann ihre Konvergenz beliebig schnell sein?

Die Schnelligkeit der Konvergenz von Reihe (2) wird gemessen durch die Schnelligkeit, mit welcher a_n gegen Null konvergiert. Je schneller a_n gegen Null konvergiert, um so langsamer wächst der absolute Betrag der Funktion (2) mit wachsendem $|x|$ an. Meine Frage kann also auch so gefasst werden: Wenn eine ganze Funktion

[1]) Vergl. etwa Borel, Théorie des fonctions (Paris, 1898), S. 26 ff.

einer algebraischen Differentialgleichung genügt, kann dann ihr absoluter Betrag beliebig langsam anwachsen?

Weit entfernt davon, diese Frage erschöpfend behandeln zu können, bin ich doch in dieser Richtung zu einem Satz gelangt, der mir nicht ohne Interesse zu sein scheint, nämlich zu

Satz I. Es seien die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ der ganzen transzendenten Funktion

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2}$$

rationale Zahlen. Wenn die ganze Funktion (2) einer algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lg |a_n|}{n (\lg n)^2}$$

endlich.

Ich fand diesen Satz, indem ich den Gedankengang einer Untersuchung von Herrn Hurwitz[1]) weiter verfolgte. Den Beweis bringe ich unter 2—4.

Zum besseren Verständnis von Satz I sei bemerkt: setzt man

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lg |a_n|}{n \lg n} = -\frac{1}{p},$$

so heisst p die Ordnung, oder, wie ich sagen will, das Wachstum[2]) der ganzen Funktion (2). Satz I besagt also etwas weniger, als dass das Wachstum einer ganzen Funktion, die rationale Koeffizienten hat und einer algebraischen Differentialgleichung genügt, grösser als Null sein muss. Satz reicht aber hin zu beweisen, dass etwa die ganze Funktion von x

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n,$$

wo q einen rationalen echten Bruch bezeichnet, d. h. die rechte Hälfte einer gewissen Thetareihe, keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. In der Tat hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lg q^{n^2}}{n (\lg n)^2} = -\infty.$$

Betrachtet man anstatt allgemeine algebraische Differentialgleichungen nur lineare, so kann bei der Untersuchung des Wachstums

[1]) A. Hurwitz, Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique, Annales de l'Ecole Normale, 3e série, Tome VI (1889), S. 327—332.

[2]) Ich gebrauche die ungewohnte Bezeichnung „Wachstum" an Stelle der eingebürgerten Bezeichnung „Ordnung", weil ich später zu gleicher Zeit auf die Ordnung einer Differentialgleichung und auf das Wachstum der ihr genügenden ganzen Funktion zu sprechen komme.

die Beschränkung auf Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten wegfallen. Diese Untersuchung wurde von Herrn Perron[1]) mit bestem Erfolg und in gewissem Sinne erschöpfend durchgeführt. Ich gebe im Folgenden sein für meine Fragestellung wichtigstes Resultat, übrigens für inhomogene Gleichungen ausgesprochen, mit direktem Beweise wieder (Satz II) und folgere daraus die Irreduzibilität gewisser Differentialgleichungen (Satz IV).

2. Man kann ohne Beschränkung voraussetzen, dass die rationale Funktion R in Gleichung (3) rational ganz ist, dass ihre Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind, dass die Differentialgleichung (3) diejenige von niedrigster Ordnung ist, der die Reihe (2) genügt und dass R von möglichst kleinem Grade in $y^{(m)}$ ist. Dies alles auf Grund geläufiger Schlussweisen.

Wie gesagt, stützt sich der Ausgang meines Beweises auf die Untersuchung von Herrn Hurwitz.

Ich kann das Nötige wohl am allerbesten wiedergeben, indem ich mit der freundlichen Genehmigung des hochverehrten Herrn Verfassers die betreffende Stelle[2]) in deutscher Übersetzung wörtlich wiederhole.

„Bezeichnen wir, der Kürze halber, mit

$$f_r, \; g_r, \; \ldots$$

rationale ganze Funktionen der Grössen

$$x, y, y', \ldots y^{(r)}$$

mit rationalen ganzen Koeffizienten. Durch Differenzieren von (3) finden wir eine Gleichung von der Form

$$y^{(m+1)} f_m + g_m = 0. \tag{4}$$

Substituieren wir für y die Reihe (2), so ergibt sich

$$f_m = C x^k + \cdots, \quad k \geqq 0 \tag{5}$$

und wir können $C \gtrless 0$ annehmen, d. h. wir können annehmen, dass die Reihe (2) der Gleichung

$$f_m \equiv \frac{\partial R}{\partial y^{(m)}} = 0$$

nicht genügt.

[1]) O. Perron, Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten Acta Mathematica, Bd. 34 (1910), S. 139—163.

[2]) Vergl. a. a. O. S. 328—329.

Dies also angenommen, differenzieren wir die Gleichung (3) 2ϱ-mal nach x. Wir erhalten

$$(6)\quad y^{(m+2\varrho)} f_m + y^{(m+2\varrho-1)} f_{m+1} + \cdots + y^{(m+\varrho+1)} f_{m+\varrho-1} + f_{m+\varrho} = 0$$

wie durch vollständige Induktion leicht einzusehen ist.

Erteilen wir nun der ganzen Zahl ϱ einen bestimmten Wert, der der Bedingung $m+\varrho+1 \leqq m+2\varrho-k$ genügt, d. h. der Bedingung $\varrho > k$, und setzen wir der Kürze halber $m+2\varrho = p$. Die Gleichung (6) schreibt sich nun so:

$$(7)\qquad y^{(p)} f_m + y^{(p-1)} f_{m+1} + \cdots + y^{(p-k)} f_{m+k} + f_{p-k-1} = 0.$$

Diese Gleichung wird durch die Reihe (2) befriedigt, und sie ist linear in bezug auf $y^{(p)}, y^{(p-1)}, \ldots y^{(p-k)}$. Ich werde von dieser Gleichung (7) ausgehen. Indem ich sie q-mal nacheinander differenziere, finde ich

$$(8)\quad y^{(p+q)} f_m + y^{(p+q-1)} \left[f_{m+1} + q f_m'\right] + \cdots$$
$$+ y^{(p+q-k)} \left[f_{m+k} + q f'_{m+k-1} + \cdots + \binom{q}{k} f_m^{(k)}\right] + f_{p+q-k-1} = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so reduzieren sich die Koeffizienten von $y^{(p+q)}, y^{(p+q-1)}, \ldots y^{(p+q-k)}$ auf gewisse rationale ganze Funktionen von q mit rationalen Koeffizienten. Diese Funktionen können nicht sämtlich identisch verschwinden, da in der letzten Funktion der Koeffizient von q^k die Zahl C ist. Also reduziert sich für $x = 0$ die Gleichung (8) auf eine Gleichung

$$y_0^{(p+q-\alpha)} \left(b_0 + b_1 q + \cdots + b_\alpha q^\alpha\right) = G\left(y_0, y_0', \ldots y_0^{(p+q-\alpha-1)}\right)$$

wo die ganze Zahl α zwischen 0 und k enthalten ist. Setzen wir $p+q-\alpha = n$, so haben wir endlich

$$(9)\qquad y_0^{(n)} \left(c_0 + c_1 n + \cdots + c_\alpha n^\alpha\right) = c\, G\left(y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}\right)$$

für jeden Wert von n, der eine gewisse Grenze übersteigt, wobei die ganzen Zahlen $c_0, c_1, \ldots c_\alpha, c$ unabhängig von n sind."

Ich bemerke noch, dass die Gleichung (9) durch $n-m+\alpha$-maliges Differenzieren der Gleichung (3), durch Nullsetzen von x und durch Multiplikation durch eine ganze Zahl entstanden ist.

3. Die Funktion R hat die Form

$$R\left(x, y, y', \cdots y^{(m)}\right) = \sum A x^k y^{k_0} (y')^{k_1} \cdots (y^{(m)})^{k_m},$$

wo die A gewisse ganze Zahlen bedeuten. Es wird folgenden mit der Funktion R verbundenen Zahlen eine gewisse Rolle zufallen:

D ist die grösste unter den Zahlen $k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_m$,

E ist die grösste unter den Zahlen $k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m$,

$S = E - m + \alpha$, wo m die Ordnung der Gleichung (3) ist und α in der Formel (9) auftritt. Es ist $S \geq 0$.

Aus dem Glied $Ax^k y^{k_0}(y')^{k_1}(y'')^{k_2} \cdots (y^{(m)})^{k_m}$ entstehen durch ν-maliges Differenzieren und durch Nullsetzen von x mehrere Glieder von der Form

$$By_0^{(\alpha_{01})} y_0^{(\alpha_{02})} \cdots y_0^{(\alpha_{0k_0})} y_0^{(\alpha_{11}+1)} \cdots y^{(\alpha_{mk_m}+m)} =$$
$$= B \prod_{\mu=0}^{m} y_0^{(\alpha_{\mu 1}+\mu)} y_0^{(\alpha_{\mu 2}+\mu)} \cdots y_0^{(\alpha_{\mu k_\mu}+\mu)},$$

wobei B eine gewisse ganze Zahl und

$$k + \sum_{\mu=0}^{m} (\alpha_{\mu 1} + \alpha_{\mu 2} + \cdots + \alpha_{\mu k_\mu}) = \nu.$$

Ist $\nu = n - m + \alpha$, so ist also

$$k + \sum_{\mu=0}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_\mu} \alpha_{\mu j} \right) = n - m + \alpha$$

$$\sum_{\mu=0}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_\mu} (\alpha_{\mu j} + \mu) \right) = n - m + \alpha - k + k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m$$

$$\sum_{\mu=0}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_\mu} (\alpha_{\mu j} + \mu) \right) \leq n + S.$$

Die Gleichung (9) kann also sicher in der Form

$$y_0^{(n)} g(n) = \sum B y_0^{(a)} y_0^{(b)} y_0^{(c)} \cdots y_0^{(l)} \tag{10}$$

geschrieben werden, wo

$$\begin{gathered} 0 \leq a \leq n-1, \quad 0 \leq b \leq n-1, \ldots \quad 0 \leq l \leq n-1 \\ a + b + c + \cdots + l \leq n + S \end{gathered} \tag{11}$$

und die Anzahl der Zahlen $a, b, c, \ldots l$ höchstens D ist. Dabei sind die Zahlen B ganze Zahlen und das Polynom α-ten Grades

$$g(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_\alpha n^\alpha$$

hat ganze Koeffizienten. — Alles Folgende gründet sich auf (10) und (11).

4. Ich will zuerst zeigen, dass ohne Schaden für die Allgemeinheit $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(S)}$ als rationale ganze Zahlen vorausgesetzt werden können. Denn sei die ganze Zahl N so gewählt, dass alle Zahlen $Ny_0, Ny'_0, \ldots Ny_0^{(S)}$ ganz werden. Aus Gleichung (10) folgt durch Multiplikation mit N^D

$$\left(Ny_0^{(n)}\right) N^{D-1} g(n) = \sum C \left(Ny_0^{(a)}\right)\left(Ny_0^{(b)}\right) \cdots \left(Ny_0^{(l)}\right), \tag{12}$$

wobei C aus dem früheren B durch Multiplikation mit einer nicht-negativen Potenz von N entsteht. Betrachtet man die Funktion Ny anstatt y, so fällt man von (12) nach einer kleinen Veränderung der Bezeichnung auf (10) zurück und dabei sind $y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(S)}$ ganze Zahlen. —

Sei die Zahl T so gross gewählt, dass $T > S$ und dass für $n > T$ erstens ausnahmslos die Gleichung (10) gilt und zweitens $g(n)$ nicht verschwindet.

Ich führe die unendliche Folge von ganzen Zahlen

$$(13) \qquad u_1, u_2, u_3, \ldots u_\nu, \ldots \qquad (u_\nu \gtreqless 0)$$

durch folgende Vorschrift ein: für $1 \leqq \nu \leqq T - S$ sei u_ν der reduzierte Nenner der rationalen Zahl $y_0^{(S+\nu)}$, und für $\nu > T - S$ sei

$$u_\nu = g(S + \nu).$$

Ich führe ferner die unendliche Folge von ganzen Zahlen

$$U_1, U_2, U_3, \ldots U_\nu, \ldots$$

ein, deren Glieder Potenzprodukte der Zahlen (13) sind. Es ist nämlich

$$U_\nu = u_1^{\left[\frac{\nu}{1}\right]} u_2^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} u_3^{\left[\frac{\nu}{3}\right]} \ldots u_\nu^{\left[\frac{\nu}{\nu}\right]},$$

also z. B.

$$U_1 = u_1, \quad U_2 = u_1^2 u_2, \quad U_3 = u_1^3 u_2 u_3, \ldots$$

Ist $\quad 1 \leqq \alpha < \nu, \; 1 \leqq \beta < \nu, \; \ldots \; 1 \leqq \lambda < \nu \quad$ und

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda \leqq \nu,$$

so ist U_ν teilbar durch das Produkt $u_\nu U_\alpha U_\beta \ldots U_\lambda$.

Es tritt nämlich die Zahl u_j $(j < \nu)$ im Produkte $u_\nu U_\alpha U_\beta \ldots U_\lambda$ in der Potenz

$$\left[\frac{\alpha}{j}\right] + \left[\frac{\beta}{j}\right] + \cdots + \left[\frac{\lambda}{j}\right]$$

auf, und in U_ν in der nicht geringeren Potenz $\left[\frac{\nu}{j}\right]$.

Ist $n > S$, so ist $y_0^{(n)} U_{n-S}$ eine ganze Zahl.

Für $n = S + 1, S + 2, \ldots T$ ist diese Behauptung evident. Sei also $n > T$ und die Behauptung für jede ganze Zahl, die grösser als S und kleiner als n ist, als erwiesen angenommen. In diesem Falle ist also nach (10)

$$(14) \qquad y_0^{(n)} g(n) = y_0^{(n)} u_{n-S} = \sum B y_0^{(a)} y_0^{(b)} \ldots y_0^{(g)} y_0^{(h)} \ldots y_0^{(l)}.$$

Ich unterscheide mehrere Fälle:

1) Alle Zahlen $a, b, \ldots g, h, \ldots l$ sind $\leqq S$. Dann ist das Glied $B y_0^{(a)} y_0^{(b)} \ldots y_0^{(l)}$ eine ganze Zahl, folglich auch das Produkt

$$(15) \qquad \frac{U_{n-S}}{u_{n-S}} B y_0^{(a)} y_0^{(b)} \ldots y_0^{(l)}.$$

2) Es ist $a > S, b, c, \dots l$ sind $\leqq S$. Dann ist, weil doch $a < n$, das Produkt

$$B\, U_{a-S}\, y_0^{(a)}\, y_0^{(b)} \dots y_0^{(l)}$$

eine ganze Zahl, und folglich auch das Produkt (15).

3) Es gibt zwei oder mehr Zahlen $a, b, \dots g$, die $> S$ sind, während die übrigen $h, \dots l$ alle $\leqq S$ sind. Es ist nach der Voraussetzung der vollständigen Induktion

$$B\, U_{a-S}\, y_0^{(a)}\, U_{b-S}\, y_0^{(b)} \dots U_{g-S}\, y_0^{(g)}\, y_0^{(h)} \dots y_0^{(l)}$$

eine ganze Zahl. Aus (11) folgt aber im vorliegenden Falle

$$a - S + b - S + \cdots + g - S \leqq n - S$$

und daher ist wieder das Produkt (15) eine ganze Zahl.

Multipliziert man also beide Seiten der Gleichung (14) mit $\dfrac{U_{n-S}}{u_{n-S}}$, so ergibt sich, dass $y_0^{(n)}\, U_{n-S}$ eine ganze Zahl ist, w. z. b. w.

Daraus folgt nun Satz I durch einfache Rechnung. Es gibt unendlich viele Zahlen n, für welche $y_0^{(n)} \gtrless 0$, für welche also (an diesem Punkte greift die Rationalität der Zahlen $y_0^{(n)}$ mit vollem Gewicht in den Beweis ein)

$$\left| y_0^{(n)}\, U_{n-S} \right| \geqq 1,$$

also

$$| a_n | = \frac{| y_0^{(n)} |}{n!} \geqq \frac{1}{n!\, | U_{n-S} |} \geqq \frac{1}{n!\, | U_n |}$$

$$\lg | a_n | \geqq - \lg n! - \lg | U_n | = - \lg n! - \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{n}{j} \right] \lg | u_j |.$$

Auf die Definition der Folge (13) zurückgreifend, bestimmt man leicht eine Zahl M so, dass für jeden Wert von n

$$| u_n | \leqq M n^{\alpha}.$$

Es folgt weiter

$$\lg | a_n | \geqq - n \lg n - \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j} \lg | u_j |$$

$$\geqq - n \lg n - n\, (\lg M + \alpha \lg n) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

$$\geqq - n \lg n - n\, (\lg M + \alpha \lg n)\, (1 + \lg n).$$

Da dies für unendlich viele n stattfindet, ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\; \frac{\lg | a_n |}{n\, (\lg n)^2} \geqq - \alpha.$$

Derselbe grösste Grenzwert ist offenbar $\leqq 0$, und damit ist Satz I bewiesen.

5. Herr Perron hat in seiner erwähnten Arbeit u. a. bewiesen, dass eine ganze transzendente Funktion von positivem, endlichem und rationalem Wachstum sein muss, wenn sie einer linearen (homogenen oder inhomogenen) Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten genügt. Er hat auch erforscht, wie das Wachstum der ganzen Funktion mit den Koeffizienten der Differenzialgleichung zusammenhängt. Von der Mannigfaltigkeit seiner wichtigen und tiefgreifenden Resultate betrifft unsere Frage hauptsächlich das folgende[1]):

II. Genügt die ganze transzendente Funktion

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots + D_n x^n + \cdots \tag{16}$$

einer linearen, homogenen oder inhomogenen Differentialgleichung m-ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, so ist ihr Wachstum nicht kleiner als $\frac{1}{m}$, d. h. es ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{lg\,|D_n|}{n\,lg\,n} \geqq -m.$$

Satz II besagt mit andern Worten, dass die Potenzreihe (16) einer ganzen Funktion, die Lösung einer Gleichung der erwähnten Art ist, nicht schneller konvergieren kann als die Potenzreihe

$$\frac{x}{1^m} + \frac{x^2}{2^{2m}} + \frac{x^3}{3^{3m}} + \frac{x^4}{4^{4m}} + \cdots$$

Um dieses durch Satz II ausgedrückte vereinzelte Resultat zu beweisen, bedarf man natürlich nicht der vollen Perron'schen Theorie. Ich zeige im folgenden einen ganz einfachen Abkürzungsweg, der zu Satz II führt.

Ich schicke voraus den Satz

III. Die unendliche Zahlenfolge

$$D_0, D_1, D_2, \ldots D_n, \ldots \tag{17}$$

soll nicht aus lauter verschwindenden Gliedern bestehen und soll der Differenzengleichung

$$D_\nu + a_1^{(\nu)} D_{\nu+1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_{\nu+r} = 0 \tag{18}$$

genügen.

---

[1]) A. a. O. letzte Zeile von Theorem V.

Die r Funktionen $a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \dots a_r^{(\nu)}$ der ganzzahligen Variablen ν seien folgenden Bedingungen unterworfen:

$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \dots) \tag{19}$$

$$\left| a_i^{(\nu)} \right| \leqq a\, \nu^m \qquad (i = 1, 2, \dots r;\ \nu = 1, 2, 3, \dots) \tag{20}$$

(a, m positive Konstanten).

Dann ist

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{lg\,|D_\nu|}{\nu\, lg\, \nu} \geqq -m. \tag{21}$$

Ich führe die r-zeiligen Matrices

$$A_\nu = \begin{Bmatrix} 1 & a_1^{(\nu)} & a_2^{(\nu)} & \dots & a_{r-1}^{(\nu)} \\ 0 & 1 & a_1^{(\nu+1)} & \dots & a_{r-2}^{(\nu+1)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{r-3}^{(\nu+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix}, \quad B_\nu = - \begin{Bmatrix} a_r^{(\nu)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{r-1}^{(\nu+1)} & a_r^{(\nu+1)} & 0 & \dots & 0 \\ a_{r-2}^{(\nu+2)} & a_{r-1}^{(\nu+2)} & a_r^{(\nu+2)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1^{(\nu+r-1)} & a_2^{(\nu+r-1)} & a_3^{(\nu+r-1)} & \dots & a_r^{(\nu+r-1)} \end{Bmatrix}$$

ein. Die r Gleichungen

$$D_\nu + a_1^{(\nu)} D_{\nu+1} + \dots + a_{r-1}^{(\nu)} D_{\nu+r-1} = - a_r^{(\nu)} D_{\nu+r}$$

$$D_{\nu+1} + \dots + a_{r-2}^{(\nu+1)} D_{\nu+r-1} = - a_{r-1}^{(\nu+1)} D_{\nu+r} - a_r^{(\nu+1)} D_{\nu+r+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D_{\nu+r-1} = - a_1^{(\nu+r-1)} D_{\nu+r} - a_2^{(\nu+r-1)} D_{\nu+r+1} - \dots - a_r^{(\nu+r-1)} D_{\nu+2r-1}$$

lassen sich so zusammenfassen

$$A_\nu (D_\nu, D_{\nu+1}, \dots D_{\nu+r-1}) = B_\nu (D_{\nu+r}, D_{\nu+r+1}, \dots D_{\nu+2r-1})$$

oder auch so

$$(D_\nu, D_{\nu+1}, \dots D_{\nu+r-1}) = A_\nu^{-1} B_\nu (D_{\nu+r}, D_{\nu+r+1}, \dots D_{\nu+2r-1}).$$

Wendet man letztere Formel auf $\nu = 0, r, \dots (\mu - 1) r$ an, so erhält man durch Elimination

$$(D_0, D_1, \dots D_{r-1}) = A_0^{-1} B_0 A_r^{-1} B_r \dots A_{(\mu-1)r}^{-1} B_{(\mu-1)r} (D_{\mu r}, D_{\mu r+1}, \dots D_{\mu r+r-1}). \tag{22}$$

An diese Gleichung will ich die weiteren Schlüsse anknüpfen.

Um die nun folgenden Abschätzungen gleichmässiger zu gestalten, will ich annehmen, dass die in Ungleichung (20) auftretende Zahl a noch den Ungleichungen

$$a \geqq 1 \tag{23}$$

$$a \geqq \left| a_i^{(0)} \right| \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{24}$$

genügt.

Die Determinante der Matrix A_ν ist $= 1$, und darum sind die Elemente der Matrix A_ν^{-1} Unterdeterminanten $r-1$-ter Ordnung der Matrix A_ν. Daher ist kein Element der Matrix A_ν^{-1} dem absoluten Betrage nach grösser als

$$(r-1)!\, a\, \nu^m\, a\,(\nu+1)^m\, a\,(\nu+2)^m \ldots a\,(\nu+r-2)^m =$$
$$= (r-1)!\, a^{r-1} \frac{(\nu+r-2)!^m}{(\nu-1)!^m}$$

(es wurde von (20) und (23) Gebrauch gemacht). Folglich ist kein Element der Matrix $A_\nu^{-1} B_\nu$ absolut genommen grösser als

$$\begin{aligned} r \cdot (r-1)!\, a^{r-1} \frac{(\nu+r-2)!^m}{(\nu-1)!^m} \cdot a\,(\nu+r-1)^m &= \\ = r!\, a^r \frac{(\nu+r-1)!^m}{(\nu-1)!^m} \end{aligned} \tag{25}$$

für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ Für $\nu = 0$ lautet die analoge Schranke (vergl. auch (24))

$$r!\, a^r\, (r-1)!^m.$$

Wendet man die Abschätzung (25) μ-mal an, so findet man, dass alle r^2 Elemente der in Formel (22) auftretenden Matrix

$$A_0^{-1} B_0 A_r^{-1} B_r \ldots A_{(\mu-1)r}^{-1} B_{(\mu-1)r}$$

dem absoluten Werte nach unter der Schranke

$$\begin{aligned} r^{\mu-1} \cdot r!\, a^r\, (r-1)!^m \cdot r!\, a^r \frac{(2r-1)!^m}{(r-1)!^m} \cdots r!\, a^r \frac{(\mu r-1)!^m}{(\mu r - r - 1)!^m} &= \\ = \frac{1}{r} (r!\, a^r\, r)^\mu (\mu r - 1)!^m \end{aligned} \tag{26}$$

bleiben.

Unter den r Zahlen $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ muss wenigstens eine, etwa D_s, von Null verschieden sein. Denn sonst folgte, aus der Bedingung (19), dass auch alle Zahlen $D_r, D_{r+1}, D_{r+2}, \ldots$ verschwinden. Es heisse $D_{\mu r + s_\mu}$ eine der absolut grössten unter den r Zahlen $D_{\mu r},$

$D_{\mu r+1}, \ldots D_{\mu r+r-1}$. Mit Benutzung der unter (26) erzielten Schranke folgt nun aus (22)

$$\left|D_s\right| \leqq \frac{1}{r}(r!\, a^r r)^\mu (\mu r - 1)!^m \left(\left|D_{\mu r}\right| + \left|D_{\mu r+1}\right| + \cdots + \left|D_{\mu r+r-1}\right|\right),$$

also

$$\left|D_{\mu r+s_\mu}\right| \geqq \frac{|D_s|}{(r!\, a^r r)^\mu (\mu r - 1)!^m}$$

woraus sich (21) durch geläufige Schlüsse ergibt.

6. Eine lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, die mindestens ein für $x = 0$ reguläres Integral besitzt, lässt sich immer in die Form

$$(27)\qquad P_0(x)\, y + x P_1(x) \frac{dy}{dx} + x^2 P_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots + x^m P_m(x) \frac{d^m y}{dx^m} = Q(x)$$

setzen[1]), wo $Q(x)$ ein Polynom ist,

$$P_i(x) = c_{i0} + c_{i1} x + c_{i2} x^2 + \cdots + c_{ir} x^r \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots m)$$

und die Konstanten c_{ik} den drei Bedingungen:

$$(28)\qquad \begin{aligned} &|c_{0,0}| + |c_{1,0}| + |c_{2,0}| + \cdots + |c_{m,0}| > 0 \\ &|c_{0,r}| + |c_{1,r}| + |c_{2,r}| + \cdots + |c_{m,r}| > 0 \\ &|c_{m,0}| + |c_{m,1}| + |c_{m,2}| + \cdots + |c_{m,r}| > 0 \end{aligned}$$

genügen.

Führt man die Polynome in ν

$$\begin{aligned} f_0(\nu) &= c_{0,0} + c_{1,0}\,\nu + c_{2,0}\,\nu(\nu-1) + \cdots + c_{m,0}\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1) \\ f_1(\nu) &= c_{0,1} + c_{1,1}\,\nu + c_{2,1}\,\nu(\nu-1) + \cdots + c_{m,1}\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1) \\ f_2(\nu) &= c_{0,2} + c_{1,2}\,\nu + c_{2,2}\,\nu(\nu-1) + \cdots + c_{m,2}\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(\nu) &= c_{0,r} + c_{1,r}\,\nu + c_{2,r}\,\nu(\nu-1) + \cdots + c_{m,r}\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1) \end{aligned}$$

ein und setzt man die nicht abbrechende Potenzreihe

$$y = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots + D_n x^n + \cdots$$

in die Gleichung (27) ein, so schreibt sich der Koeffizient von $x^{\nu+r}$ an der linken Seite von (27) folgendermassen

$$f_0(\nu+r)\, D_{\nu+r} + f_1(\nu+r-1)\, D_{\nu+r-1} + \cdots + f_r(\nu)\, D_\nu.$$

[1]) Vergl. Perron a. a. O. S. 141. Die Bedingung, dass mindestens ein Integral für $x = 0$ regulär sei, ist für die Ableitung der ersten der drei Ungleichungen (28) wesentlich.

Man beachte, dass kraft (28) die Polynome $f_0(\nu)$ und $f_r(\nu)$ nicht identisch verschwinden können.

Abgesehen höchstens von einer endlichen Anzahl, haben alle positiven ganzen Zahlen ν folgende Eigenschaften:

$$\nu + r \text{ ist grösser als der Grad von } Q(x),$$
$$f_0(\nu + r) \neq 0,$$
$$f_r(\nu) \neq 0.$$

Abgesehen von einer endlichen Anzahl Werte von ν besteht also die Gleichung

$$f_r(\nu) D_\nu + f_{r-1}(\nu + 1) D_{\nu+1} + \cdots + f_0(\nu + r) D_{\nu+r} = 0,$$

oder auch die Gleichung

$$(29) \qquad D_\nu + \frac{f_{r-1}(\nu+1)}{f_r(\nu)} D_{\nu+1} + \frac{f_{r-2}(\nu+2)}{f_r(\nu)} D_{\nu+2} + \cdots + \frac{f_0(\nu+r)}{f_r(\nu)} D_{\nu+r} = 0.$$

Diese Gleichung erfüllt nun von einem gewissen Werte von ν ab für alle folgenden die Bedingungen des Satzes III. Ist aber k irgendeine Zahl, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{n \, lg\, n}{(n+k)\, lg\,(n+k)} = 1,$$

und daher folgt aus dem auf die Gleichung (29) angewandten Satz III der zu beweisende Satz II. —

Einige Bemerkungen noch zu dem eben bewiesenen Satze II! Genügt eine ganze Funktion einer nichtlinearen algebraischen Differentialgleichung von der Ordnung m, so kann ihr Wachstum wohl kleiner als $\frac{1}{m}$ ausfallen. So genügt z. B. die Funktion

$$y = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \cdots$$

der Gleichung

$$y^2 - 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

1-er Ordnung, während ihr Wachstum durch $1/2$ gemessen wird.

Satz II gibt eine untere Grenze für das Wachstum einer ganzen Funktion, die Integral einer linearen Gleichung von der Ordnung m ist. Eine endliche obere Grenze kann nicht angegeben werden, da doch Funktionen von beliebig hohem endlichen Geschlechte schon einer Gleichung erster Ordnung genügen können, wie etwa das Beispiel

$$y = e^{x^p}, \qquad \frac{dy}{dx} - p\, x^{p-1}\, y = 0$$

zeigt, wo p positiv ganz ist.

Wichtig ist ferner, dass die untere Grenze, die der Satz II für das Wachstum angibt, die bestmögliche ist. Sie wird erreicht durch eine Lösung der Gleichung

$$(30) \qquad x^{m-1}\frac{d^m y}{dx^m} + a_1 x^{m-2}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + a_{m-1}\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

wo $a_1, a_2, \cdots a_{m-1}$ Konstanten bedeuten.

Um dies einzusehen, betrachte man das Polynom m-ten Grades

$$P(z) = z(z-1)\ldots(z-m+1) + a_1 z(z-1)\ldots(z-m+2) + \cdots +$$
$$+ a_{m-1} z = \sum_{\nu=1}^{m} \nu!\, a_{m-\nu}\binom{z}{\nu}.$$

Es ist

$$P(0) = 0.$$

Es sei r die grösste ganzzahlige Wurzel von $P(z)$, also $r \geqq 0$. Die ganze Funktion

$$(31) \qquad f(x) = x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{r+n}}{P(r+1)\,P(r+2)\ldots P(r+n)}$$

genügt der Gleichung (30) von der Ordnung m, und sie selbst hat das Wachstum $\frac{1}{m}$.

Aus dem Umstande, dass die Funktion (31) die durch den Satz II angegebene untere Grenze erreicht, kann geschlossen werden, dass die Gleichung (30) irreduzibel ist, wie ich es sofort näher ausführen werde.

7. Man kann den Begriff der Irreduzibilität für homogene lineare Differentialgleichungen auf verschiedene Weisen fassen, indem man das Rationalitätsbereich der Koeffizienten verschieden festlegt. Eine gewisse Wichtigkeit kommt dem folgenden Irreduzibilitätsbegriff zu: die Differentialgleichung

$$R_0(x)\,y + R_1(x)\frac{dy}{dx} + R_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + R_m(x)\frac{d^m y}{dx^m} = 0,$$

wo $R_0(x), R_1(x), \ldots R_n(x)$ rationale Funktionen von x mit (beliebigen komplexen) konstanten Koeffizienten bedeuten, heisst irreduzibel, wenn kein Integral von ihr einer Differentialgleichung ähnlicher Art aber von niedrigerer Ordnung genügt. Dieser Irreduzibilitätsbegriff ist dem am Ende von 6 ausgesprochenen Satze zugrunde gelegt:

IV. Die Differentialgleichung

$$(30)\qquad x^{m-1}\frac{d^m y}{dx^m}+a_1 x^{m-2}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+a_{m-1}\frac{dy}{dx}-y=0$$

ist irreduzibel.

Ich bezeichne die Operation, die durch die linke Seite von (30) auf y ausgeübt wird, mit $\mathfrak{A}$, d. h.

$$\mathfrak{A}=x^{m-1}\frac{d^m}{dx^m}+a_1 x^{m-2}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\cdots+a_{m-1}\frac{d}{dx}-1.$$

Wäre die Differentialgleichung (30), d. h. die Gleichung

$$(30')\qquad \mathfrak{A}\,y=0$$

reduzibel, so sei

$$\mathfrak{B}\,y\equiv b_0(x)\frac{d^r y}{dx^r}+b_1(x)\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}+\cdots+b_r(x)\,y=0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung von geringster Ordnung r $(1\leq r<m)$, die mit (30′) ein Integral gemeinsam hat, und deren Koeffizienten $b_0(x), b_1(x), \ldots b_r(x)$ Polynome in x sind. Dann gibt es bekanntlich[1]) einen homogenen linearen Differentialausdruck

$$\mathfrak{C}=c_0(x)\frac{d^{m-r}}{dx^{m-r}}+c_1(x)\frac{d^{m-r-1}}{dx^{m-r-1}}+\cdots+c_{m-r}(x),$$

deren Koeffizienten $c_0(x), c_1(x), \ldots c_{m-r}(x)$ rationale Funktionen sind, so beschaffen, dass

$$\mathfrak{A}\,y\equiv\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}\,y.$$

Diese Identität gilt für jede Funktion y. Ich setze insbesondere $y=f(x)$, wo $f(x)$ durch (31) definiert ist. Ich werde zeigen, dass die sich so ergebende Gleichung

$$(32)\qquad \mathfrak{A}f(x)=\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}f(x)=0$$

unmöglich ist.

Die Funktion

$$(33)\qquad \mathfrak{B}f(x)=b_0(x)f^{(r)}(x)+b_1(x)f^{(r-1)}(x)+\cdots+b_r(x)f(x)$$

ist eine ganze Funktion, aber sie ist kein Polynom. Denn sonst hätten wir in $f(x)$ eine ganze Funktion vom Wachstum $\frac{1}{m}<\frac{1}{r}$ gefunden, die einer linearen Differentialgleichung r-ter Ordnung genügt,

[1]) Vergl. etwa L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, S. 84.

was durch Satz II ausgeschlossen ist. Also ist die Funktion (33) eine ganze transzendente Funktion. Ihr Wachstum kann, wie aus den Elementen der Theorie der ganzen Funktion folgt, die Zahl $\frac{1}{m}$ nicht überschreiten. Da nun

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{m-r}$$

ist, kann, ebenfalls nach Satz II, die Funktion $\mathfrak{B} f(x)$ keiner linearen Differentialgleichung $m-r$-ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten genügen: eine solche wäre jedoch die Gleichung (32). Folglich ist (32) unmöglich und die Gleichung (30′) ist irreduzibel, w. z. b. w.