

Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen.

Von

ERNST MEISSNER.

(Als Manuskript eingegangen am 21. Dezember 1914.)

In der modernen Technik werden dünnwandige Gewölbe und Gefäße häufig verwendet und es ist daher für sie wichtig, das elastische Verhalten und die Festigkeit derselben zu kennen. Dabei wird es sich fast immer um Schalen handeln, deren Mittelfläche eine Rotationsfläche ist und die axial symmetrisch belastet sind. Solche Schalen sind deshalb schon früh untersucht worden.¹⁾ Eine genaue Theorie, die auch der Biegesteifigkeit der Schale im vollen Umfang Rechnung trägt und so allgemein ist, dass sie jedem Belastungsfall angepasst werden kann, ist von Love²⁾ gegeben worden. Doch führt sie schon in den einfachsten Fällen zu so verwickelten Differentialgleichungen, dass bis vor kurzem ihre Anwendung auf die ebene Platte und die Zylinderschale beschränkt war. Zwar hat Reissner³⁾ für die Kugelschale mit konstanter Wandstärke die Differentialgleichungen in symmetrische Form zu bringen gewusst, so dass das von Blumenthal⁴⁾ entwickelte Verfahren der asymptotischen Integration Aussicht auf Erfolg hat. Doch liegen bis heute numerische Ergebnisse auch für diesen Fall nicht vor.

Von seiten der Ingenieure wurden verschiedene Versuche gemacht, das Schalenproblem in einfachen Fällen zu lösen. Vor allem hat Stodola⁵⁾ die Festigkeit von Kegelschalen konstanter Wandstärke

¹⁾ Man vergleiche die kurze geschichtliche Darstellung des Problems bei H. Lorenz: Lehrbuch d. techn. Physik, Bd. IV, S. 682/83.

²⁾ H. Love, Treatise on the Theory of Elasticity (1906), deutsch von Timpe (1907). Die in Anmerkungen unter [] gegebenen Ziffern beziehen sich stets auf die in der deutschen Übersetzung dort entwickelten Formeln.

³⁾ Reissner, Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau-Festschrift. Leipzig, Kröner 1912.

⁴⁾ Blumenthal, Asympt. Integration. Intern. Congr. of Math. 1912; Zeitschr. für Mathematik und Physik (3) 19., 136 ff., 1912.

⁵⁾ Stodola, Die Dampfturbinen. 4. Auflage. Berlin, Springer 1910. S. 597 ff.

untersucht, indem er durch Reihenansätze die simultanen Differentialgleichungen 2. und 3. Ordnung dieses Problems integrierte und so zu numerischen Resultaten gelangte. Für die Kugelschale haben die Ingenieure Keller¹⁾ und Fankhauser²⁾ Ähnliches versucht; ihre Methoden sind aber sehr umständlich, zum Teil ungenau und jetzt überholt.

Es hat sich nämlich herausgestellt³⁾, dass für Kegel-, Kugel- und Ringflächenschale das Elastizitätsproblem überhaupt viel einfacher ist, als angenommen wurde, weil die Differentialgleichung 4. Ordnung, auf die es hinausläuft, zerfällt und nur eine solche 2. Ordnung gelöst zu werden braucht, was besonders für Kegel und Kugel einfach ist. Bolle⁴⁾ hat das für die Kugelschale durchgeführt und ist zu allgemeinen und praktisch brauchbaren Resultaten gelangt. Kegel- und Ringfläche sind noch in Bearbeitung.

In der vorliegenden Arbeit soll das allgemeine Schalenproblem um einen weitem Schritt gefördert werden. Sie bringt als Hauptresultat die Tatsache, dass für jede Schalenform eine ähnliche Reduktion eintritt, wenn die Schalendicke in passender Weise als veränderlich angenommen wird. Auch dann ist bloss eine Differentialgleichung 2. Ordnung zu lösen, und es wird gezeigt, dass dies wenigstens für ausgedehnte Flächenklassen möglich ist. Der Kegel mit linearer, veränderlicher Wandstärke gehört hierher, und es ist bemerkenswert, dass in einem Fall die Lösung sogar ganz elementar wird. Da dieses Beispiel Licht auf verwickeltere Fälle wirft, ist es am Schluss der Arbeit bis zur numerischen Auswertung durchgeführt worden.

§ 1. Problemstellung.

Eine dünne Schale aus einem homogenen, isotropen Material liege vor. Ihre Mittelfläche sei nach einer Rotationsfläche geformt und von einem oder zwei Parallelkreisen begrenzt. Die Schale soll durch ein Kräftesystem belastet werden, das die Rotationsaxe zur Symmetrieaxe hat, und es werde vorausgesetzt, dass dabei die Elastizitäts-

¹⁾ H. Keller, Berechnung gewölbter Platten. Diss. techn. Hochschule Zürich. Berlin 1912.

²⁾ Ed. Fankhauser, Festigkeit von Kegel- und Kugelböden. Diss. techn. Hochsch. Zürich 1913.

³⁾ E. Meissner, Das Elastizitätsproblem dünner Schalen etc. Phys. Zeitschr. (14) 1913, S. 343/49.

⁴⁾ L. Bolle, Calcul de la résistance d'une calotte sphérique. Diss. techn. Hochsch. Zürich 1915. Ein Auszug dieser Arbeit dürfte in nächster Zeit in der „Schweiz. Bauzeitung“ erscheinen.

grenze nicht überschritten wird, dass die auftretenden Formänderungen klein seien, und dass das Gesetz von Hooke gelte, wonach sie mit den Spannungen in linearem Zusammenhang sind.

Unter diesen Voraussetzungen sollen Spannungs- und Deformationszustand der Schale ermittelt werden.

§ 2. Bezeichnungen und theoretische Grundlagen.

1. Die Schalenform ist durch den Meridian der Mittelfläche und durch die Schalendicke bestimmt.

Es sei in Fig. 1 P ein beliebiger Punkt des Meridians α der Winkel der Meridiannormalen in P mit der Axe

ξ die Entfernung von P zur Axe,

ξ die Entfernung von P bis zu einer festen Parallelkreisebene,

R_1 der Krümmungsradius des Meridians in P ,

$R_2 = PQ$ der 2. Hauptkrümmungsradius der Meridianfläche in P .

Es gelten dann folgende Beziehungen¹⁾:

$$R_1 = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\xi'}{\cos \alpha} \quad R_2 = \frac{\xi}{\sin \alpha} \quad \xi = \int \operatorname{tg} \alpha \cdot d\xi = \int \operatorname{tg} \alpha \cdot \xi' d\alpha. \quad (1)$$

Zur Abkürzung setze man ferner

$$\psi = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\xi}{\xi' \operatorname{tg} \alpha}. \quad (2)$$

Die Schalendicke $2h$ wird als klein vorausgesetzt. Längs jedes Breitenkreises sei sie konstant; längs eines Meridians kann sie schwach veränderlich sein. Sie ist sonach eine Funktion von α .

2. Um die Belastung der Schale angeben zu können, legen wir folgendes Axensystem im Punkte P :

Eine $+x$ -Axe in die Meridiantangente.

Eine $+y$ -Axe in die Tangente an den Breitenkreis.

Eine $+z$ -Axe in die nach innen gerichtete Meridiannormale.

Die an der Stelle P wirkende äussere Kraft liegt wegen der vorausgesetzten Symmetrie in der (xz) -Ebene, und habe pro Flächeneinheit der Mittelfläche die Komponenten X, Z . Auch diese werden als Funktionen von α anzusehen sein.

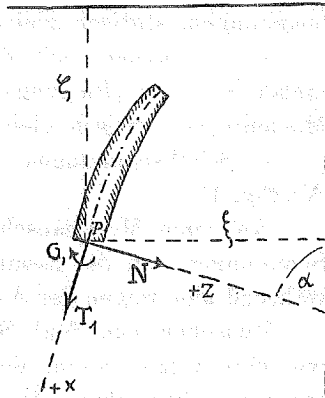


Fig. 1.

¹⁾ Akzente bedeuten hier und im folgenden stets Ableitungen nach α .

3. Der Spannungszustand an der Stelle P kann durch fünf Grössen beschrieben werden, wenn man noch diejenigen Vernachlässigungen macht, die in der Theorie dünner Schalen zulässig und üblich sind.¹⁾

Man lege einen Normalschnitt zur Schale längs des Parallelkreises durch P . Auf ein Stück dieses Schnittes von der Länge a wirken dann:

a) gleichförmig über die Schalendicke verteilte, normale Zugspannungen, statisch gleichwertig der Einzelkraft T_1 (Fig. 1);

b) proportional mit dem Abstand von der Schalenmitte zunehmende normale (Biegungs-) Spannungen, die einem Kräftepaar vom Momente G_1 statisch gleichwertig sind;

c) Schubspannungen in der z -Richtung von der Resultierenden N (Fig. 1).

Auf einen Meridianschnitt in P wirken pro Längeneinheit analoge Spannungen von der Resultierenden T_2 und dem Biegemoment G_2 , während hier wegen der Axialsymmetrie des Problems der Schub fehlt.

Zwischen den fünf Spannungsgrössen T_1 , G_1 , N , T_2 , G_2 , die, wie man zeigen kann, den Spannungszustand in P vollständig bestimmen, herrschen drei Gleichgewichtsbedingungen. Man schneide aus der Schale durch zwei unendlich benachbarte Meridiane und zwei unendlich benachbarte Breitenkreise ein Körperelement heraus, und drücke aus, dass an diesem Element sich die äusseren Kräfte und die Oberflächenkräfte das Gleichgewicht halten. Von den sechs Gleichgewichtsbedingungen sind drei trivial; die Komponentengleichungen für die x - und die z -Richtung, und die Momentengleichung für die y -Axe lauten²⁾:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 R_2 \sin \alpha)' - T_2 R_1 \cos \alpha - N R_2 \sin \alpha + R_1 R_2 \sin \alpha \cdot X &= 0 \\ (N R_2 \sin \alpha)' + T_1 R_2 \sin \alpha + T_2 R_1 \sin \alpha + R_1 R_2 \sin \alpha \cdot Z &= 0 \\ (G_1 R_2 \sin \alpha)' - G_2 R_1 \cos \alpha - N R_1 R_2 \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Aus den zwei ersten erhält man das Integral

$$\left. \begin{aligned} R_2 \sin \alpha \cdot (T_1 \sin \alpha + N \cos \alpha) &= -F(\alpha), \\ \text{wobei } F(\alpha) &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1 R_2 \sin \alpha (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) d\alpha + k_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hier ist α_0 ein beliebiger Wert, k_0 der Wert des Ausdrucks

$$R_2 \sin \alpha (T_1 \sin \alpha + N \cos \alpha)$$

für $\alpha = \alpha_0$. Das Integral (4) bringt zum Ausdruck, dass auch das

¹⁾ Love, Loc. cit. [Kap. XXIV].

²⁾ [45] [46].

Schalenstück zwischen den Parallelkreisen α_0 und α im Gleichgewicht ist.

4. Die Formänderungen der Mittelfläche werden folgenderweise beschrieben:

u und w seien die Verschiebungen, die der Punkt P in der x - resp. z -Richtung bei der Deformation erfährt. Sie sind von α abhängig;

ε_1 und ε_2 seien die Dehnungen (spezifischen Längenänderungen) der Mittelfläche in der x - und y -Richtung;

κ_1 und κ_2 die sog. Krümmungsänderungen der Love'schen Theorie, zwei Funktionen von α , die mit ε_1 und ε_2 zusammen den Verzerrungszustand in P charakterisieren. Mit den Verschiebungen sind sie durch folgende Gleichungen verknüpft¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u' - w}{R_1}; & \varepsilon_2 &= \frac{u \cotg \alpha - w}{R_2}; & \kappa_1 &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{u + w'}{R_1} \right)'; \\ \kappa_2 &= \frac{\cotg \alpha}{R_2} \left(\frac{u + w'}{R_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

5. Das Elastizitätsgesetz von Hooke verbindet die Spannungs- und Verzerrungsgrößen durch lineare Beziehungen, die in folgende Form gebracht werden können:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2E}{1-\nu^2} h (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); & T_2 &= \frac{2E}{1-\nu^2} h (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \\ G_1 &= -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} h^3 (\kappa_1 + \nu \kappa_2); & G_2 &= -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} h^3 (\kappa_2 + \nu \kappa_1). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dabei bedeuten E und ν die elastischen Konstanten des Materials, E den sog. Young'schen Modul, ν das Reziproke der Poisson'schen Zahl.²⁾

6. Die Lösung des vorliegenden Problems erfordert die Bestimmung von u und w als Funktionen von α . Durch die Gleichungen (6) und (5) können die Größen T_1 T_2 G_1 G_2 durch die Verschiebungen und deren Ableitungen nach α ausgedrückt werden. Geht man damit in die Gleichungen (3) ein, so enthalten diese nur noch die Unbekannten N , u und w , und die Elimination von N liefert zwei simultane Differentialgleichungen für u (α) und w (α). Die bei ihrer Integration auftretenden Konstanten sind so zu bestimmen, dass die an den Schalenrändern herrschenden Bedingungen erfüllt werden. Das ist nur auf eine einzige Art möglich.

¹⁾ [21] [26].

²⁾ Für die meisten Metalle liegt ν in der Gegend von 0,3. Mit den Kirchhoff'schen Konstanten K , Θ sind E und ν durch die Gleichungen verbunden:

$$K = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \Theta = \frac{\nu}{1-2\nu}.$$

§ 3.

Die 1. Form der Grundgleichungen.

Der Differentialoperator L_1 der Schalenform bei konstanter Wandstärke.

Wenn die Verschiebungen in der angegebenen Weise in die Rechnung eingeführt werden, so bekommen die Differentialgleichungen eine verwickelte und unsymmetrische Form. Es empfiehlt sich, an ihrer Stelle die zwei Grössen

$$U = R_2 \varkappa_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{u + w'}{R_1}; \quad V = NR_2 \quad (7)$$

zu verwenden. Aus den zwei ersten Gleichgewichtsbedingungen (3) folgt dann

$$T_1 = -\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{R_2} V - \frac{F}{R_2 \sin^2 \alpha}; \quad T_2 = -\frac{V'}{R_1} + \frac{H}{R_1} \text{ mit } H = \frac{F}{\sin^2 \alpha} - R_1 R_2 Z, \quad (8)$$

während die letzte übergeht in

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1^2} U'' + \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)' + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{cotg} \alpha \right) \frac{U'}{R_1} - \left(\frac{R_1}{R_2} \operatorname{cotg}^2 \alpha + \nu \right) U \\ + \frac{3h'}{R_1 h} \left(\frac{R_2}{R_1} U' + \nu \operatorname{cotg} \alpha U \right) = -\frac{V}{h^3} \frac{3(1-\nu^2)}{2E}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\lambda_1 = \frac{3(1-\nu^2)}{2E}$$

und führen nun folgenden linearen Differentialoperator ein:

$$\begin{aligned} L_1(U) &= \frac{h}{R_1 \sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{R_2 \sin \alpha}{R_1} \frac{dU}{d\alpha} \right] - \frac{h}{R_2} \operatorname{cotg}^2 \alpha \cdot U \\ &= \frac{h}{R_1} \left\{ \frac{R_2}{R_1} U'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)' + \operatorname{cotg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \right] U' - \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cotg}^2 \alpha \cdot U \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Dann schreibt sich die letzte der erhaltenen Gleichungen einfacher

$$L_1(U) - \nu \frac{h}{R_1} U + \frac{3h'}{R_1} (\psi U' + \nu \operatorname{cotg} \alpha \cdot U) = -\lambda_1 h^{-2} V. \quad I$$

Dies ist die 1. Hauptgleichung.

Eine zweite Beziehung zwischen U und V wird erhalten, indem man die sogenannte Verträglichkeitsbedingung für die Verzerrungen aufstellt. Aus (5) folgt nämlich:

$$u = \sin \alpha \int \frac{\varepsilon_1 R_1 - \varepsilon_2 R_2}{\sin \alpha} d\alpha \quad w = \cos \alpha \cdot \int \frac{\varepsilon_1 R_1 - \varepsilon_2 R_2}{\sin \alpha} d\alpha - \varepsilon_2 R_2$$

und aus (7):

$$R_1 U = u + w' = -(\varepsilon_2 R_2)' + \operatorname{cotg} \alpha (R_1 \varepsilon_1 - R_2 \varepsilon_2).$$

Führt man rechts aus den Gleichungen (6) die Grössen T_1 T_2 ein, so kommt

$$2ER_1U = - \left[\frac{R_2}{h} (T_2 - \nu T_1) \right]' + \frac{\cotg \alpha}{h} \left[(R_1 + \nu R_2) T_1 - (R_2 + \nu R_1) T_2 \right].$$

Da die Gleichungen (8) bestehen, so kann man auf der rechten Seite alles durch V ausdrücken. Nach einigen Umformungen erhält man eine Gleichung von der Form:

$$L_1(V) + \nu \frac{h}{R_1} V + \frac{h'}{R_1} (-\psi V' + \nu \cotg \alpha \cdot V) = 2Eh^2U + \chi. \quad \text{II}$$

χ bedeutet eine Funktion, die nur von der Belastung der Schale abhängt.¹⁾

Die Grundgleichungen I und II sind zwei Differentialgleichungen für die Unbekannten U und V , deren Koeffizienten noch von der Schalenform und dem Gesetz der Schalendicke abhängen. Will man sie integrieren, so muss vor allem das homogene System ($\chi = 0$) gelöst werden, das einer unbelasteten, nur an den Rändern beanspruchten Schale entspricht. Wir werden uns hier nur mit dem homogenen System beschäftigen, und dürfen das um so mehr, als gerade in dem wichtigsten Anwendungsfall (dem Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke) sich eine elementare Partikularlösung des inhomogenen Systems angeben lässt. Diese ist dann einfach zur Lösung des homogenen Systems zu superponieren.

§ 4. Schalen konstanter Wandstärke.

Reduzible Fälle.

Ist die Schalendicke $2h$ konstant, so wird, wie ich früher gezeigt habe, unter Umständen das Problem besonders einfach. Der Vollständigkeit wegen werde jene Theorie hier angedeutet.

Die Gleichungen I und II werden mit $h' = 0$ (und $\chi = 0$):

$$L_1(U) - \nu \frac{h}{R_1} U = -\lambda_3 V \quad \left(\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{h^2} \right) \quad \text{(I)}$$

$$L_1(V) + \nu \frac{h}{R_1} V = \lambda_4 U \quad \left(\lambda_4 = 2Eh^2 \right). \quad \text{(II)}$$

Eliminiert man V , so folgt:

$$L_1 L_1(U) - \nu h L_1 \left(\frac{U}{R_1} \right) + \frac{\nu h}{R_1} L_1(U) + (\lambda_3 \lambda_4 - \nu^2 \frac{h^2}{R_1^2}) U = 0. \quad \text{III}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung für U .

¹⁾ Man hat

$$\chi = - \frac{h'}{R_1} \left(\psi H + \nu \frac{F}{\sin^2 \alpha} \right) + \frac{h}{R_1} \left[\left(\psi H + \frac{\nu F}{\sin^2 \alpha} \right)' + \left(\nu + \frac{1}{\psi} \right) \frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + H \cotg \alpha (\nu + \psi) \right].$$

Sie zerfällt in zwei solche zweiter Ordnung, wenn R_1 konstant ist, d. h. im Fall einer Ring-, Kugel- oder Kegelfläche.

In der Tat ist dann $L_1 \left(\frac{U}{R_1} \right) = \frac{1}{R_1} L_1(U)$, und wenn man $\lambda_0 \lambda_4 - \nu^2 h^2 R_1^{-2} = x^2$ setzt, so lautet sie

$$L_1 L_1(U) + x^2 U = 0. \quad \text{III'}$$

Diese Gleichung zerfällt in die zwei folgenden:

$$\begin{aligned} L_1(U) + ixU &= 0 \\ L_1(U) - ixU &= 0. \end{aligned} \quad \text{IV}$$

deren Integrale konjugiert sind, so dass nur eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen ist. Bedeuten J_1 und iJ_2 reellen und imaginären Teil des allgemeinen Integrals von $L(U) + ixU = 0$, so sind J_1 und J_2 (reelle) Integrale von III', aus denen das allgemeine Integral von III' kombiniert werden kann.

Im Fall der Ringfläche kann die Gleichung IV in eine solche der Fuchs'schen Klasse übergeführt werden, und die Integration durch Reihen macht keine prinzipiellen Schwierigkeiten, da man über deren Struktur und Konvergenz durch die allgemeine Theorie zum voraus orientiert ist.

Handelt es sich um die Kugelschale, so lässt sich (IV) durch hypergeometrische Reihen in $\sin^2 \alpha$ integrieren. Dies ist von Herrn Bolle in seiner Dissertation bis zur numerischen Auswertung durchgeführt worden.

Die Kegelschale endlich kann als Grenzfall betrachtet werden. Es treten an Stelle der hypergeometrischen beständig konvergierende, den Bessel'schen ähnliche Reihen, die ausserdem nur rein numerische Koeffizienten besitzen, also ein für allemal tabuliert werden können.

§ 5. Transformation der Grundgleichungen.

Der allgemeine Differentialoperator bei veränderlicher Wandstärke.

Die Gleichungen I und II, die jetzt (mit $\chi = 0$) gelöst werden müssen, weisen zunächst die Symmetrie der Gleichungen I' II' nicht auf. Es gelingt jedoch, durch eine einfache Transformation die Symmetrie herzustellen. Man setze

$$U = h^a A; \quad V = h^b B, \quad (10)$$

dann gehen I und II über in

$$\frac{\psi h}{R_1} A'' + \left[(2a + 3) \psi h' + (\psi' + \cotg \alpha \cdot \psi) h \right] \frac{A'}{R_1} - \frac{h \cotg^2 \alpha}{\psi R_1} A + \varphi_1 A = -\lambda_1 B h^{b-a-2} \quad (V)$$

und

$$\frac{\psi h}{R_1} B'' + \left[(2b - 1) \psi h' + (\psi' + \cotg \alpha \cdot \psi) h \right] \frac{B'}{R_1} - \frac{h \cotg^2 \alpha}{\psi R_1} B + \varphi_2 B = 2EA h^{a-b+2}. \quad (VI)$$

Hiebei ist gesetzt

$$\varphi_1 = \frac{1}{R_1 h} \left[a \psi h h'' + a(a+2) \psi h'^2 + a(\psi' + \cotg \alpha \cdot \psi) h h' - \nu h^2 + 3\nu \cotg \alpha h h' \right] \quad (11)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{R_1 h} \left[b \psi h h'' + b(b-2) \psi h'^2 + b(\psi' + \cotg \alpha \cdot \psi) h h' + \nu h^2 + \nu \cotg \alpha \cdot h h' \right]. \quad (11')$$

Ein Blick auf die Gleichungen V, VI lehrt jetzt, dass die Koeffizienten der Ableitungen von A und B beziehungsweise gleich werden, wenn man

$$b = a + 2 \quad (12)$$

setzt, und dass dann auch auf den rechten Seiten h wegfällt. Deshalb empfiehlt es sich jetzt, den Differentialoperator

$$L_2(A) = \frac{R_2}{R_1^2} h \cdot A'' + \left[(2a + 3) \frac{R_2}{R_1} h' + \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)' + \cotg \alpha \frac{R_2}{R_1} h \right) \right] \frac{A'}{R_1} - \frac{h \cotg^2 \alpha}{R_2} A \quad (13)$$

einzuführen, der die ganze Theorie beherrscht, und für $h = \text{const.}$ in den früher eingeführten Operator L_1 übergeht. Jetzt schreiben sich nämlich die Gleichungen V und VI einfacher

$$L_2(A) + \varphi_1 \cdot A = -\lambda_1 B \quad (V')$$

$$L_2(B) + \varphi_2 B = \lambda_2 A \quad (\lambda_2 = 2E). \quad (VI')$$

In dieser einfachen Form erlauben sie auch sofort, die Differentialgleichungen 4. Ordnung für A resp. B aufzustellen. Sie lauten:

$$L_2 L_2(A) + L_2(\varphi_1 \cdot A) + \varphi_2 L_2(A) + (\varphi_1 \varphi_2 + \lambda_1 \lambda_2) A = 0 \quad VII$$

$$L_2 L_2(B) + L_2(\varphi_2 \cdot B) + \varphi_1 L_2(B) + (\varphi_1 \varphi_2 + \lambda_1 \lambda_2) B = 0. \quad VIII$$

Das ganze Elastizitätsproblem läuft auf die Lösung dieser Differentialgleichung hinaus.

§ 6. Reduzible Fälle.

Die Zerfallsbedingung.

Die Tatsache, dass für konstante Schalendicke die Differentialgleichung 4. Ordnung in zwei solche 2. Ordnung zerfällt sobald der Meridian ein Kreis ist, legt es nahe, auch im vorliegenden allgemeinen Problem nach reduzierbaren Fällen zu suchen. Man wird beim Verfolgen der Analogie dazu geführt, für die (IV) entsprechende Zerfallsbedingung den Ansatz

$$L_2(A) + (\varphi_1 + c)A = 0 \quad (c = \text{konstant}) \quad (14)$$

zu machen und hat jetzt nur festzustellen, unter welchen Umständen ein Integral von (14) auch der Gleichung (VIII) genügt.

Wendet man auf (14) den Prozess L_2 an, so folgt

$$L_2 L_2(A) + L_2(\varphi_1 A) + c L_2(A) = 0,$$

ferner in (VIII) eingesetzt:

$$(-c + \varphi_2) L_2(A) + (\varphi_1 \varphi_2 + \lambda_1 \lambda_2) A = 0$$

und mit nochmaliger Benützung von (14):

$$[c^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)c + \lambda_1 \lambda_2] A = 0.$$

Der Ansatz ist sonach zulässig, wenn

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k_0 = \text{konstant} \quad (IX)$$

und c eine Wurzel der Gleichung

$$c^2 + 2k_0 c + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

ist. Es sei demnach

$$c_1 = -k_0 + \sqrt{k_0^2 - \lambda_1 \lambda_2} \quad c_2 = -k_0 - \sqrt{k_0^2 - \lambda_1 \lambda_2}. \quad (15)$$

Dann gilt der Satz:

Ist die Zerfallsbedingung IX erfüllt, so spaltet sich die zu lösende Differentialgleichung (VII) von der 4. Ordnung in die zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\left. \begin{aligned} L_2(A) + (\varphi_1 + c_1)A &= 0 & \text{X} \\ L_2(A) + (\varphi_1 + c_2)A &= 0. & \text{X}' \end{aligned} \right\}$$

Sind A_1 und A_2 die allgemeinen Integrale dieser Gleichungen, so ist

$$A = A_1 + A_2$$

das allgemeine Integral von (VII), und aus der Beziehung (V') folgt sofort, dass B die Form hat

$$B = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2}{\lambda_1}.$$

§ 7. Die Integration der Zerfallsbedingung.

Die Gleichung IX setzt eine Beziehung fest zwischen der Form des Meridians und dem Gesetz, nach dem sich die Schalendicke ändert. Setzt man unter Beachtung von (12) die Ausdrücke (11), (11') für φ_1 und φ_2 ein, so lautet sie:

$$\psi h'' + (\psi' + \cotg \alpha \cdot \psi) h' - \nu \cdot \cotg \alpha \cdot h' + \nu h + k_0 R_1 = 0. \quad (IX')$$

Hier hat sich die noch zur Verfügung stehende Zahl a ganz weggehoben. Die Zerfallsbedingung ist von a also unabhängig. Wir werden deshalb zweckmässig über a so disponieren, dass die Ausdrücke für φ_1 , φ_2 möglichst einfach werden. Dies geschieht, wenn wir $a = -2$ annehmen. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{R_1} \left[-2\psi h'' - 2(\psi' + \cotg \alpha \cdot \psi) h' - \nu h + 3\nu \cotg \alpha h' \right] \\ \varphi_2 &= \frac{1}{R_1} \left[\nu h + \nu \cotg \alpha h' \right] = \frac{\nu h}{R_1} \left[1 + \frac{h'}{h} \cotg \alpha \right]. \end{aligned} \right\} (16)$$

Die Gleichung IX' gibt bei gegebener Meridianform für das Gesetz der Schalendicke eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, in der die Konstante k_0 nach Belieben gewählt werden kann. Im allgemeinen Integral derselben treten zwei weitere willkürliche Konstanten auf.

Der allgemeinste Ausdruck für h bei gegebener Schalenform enthält also drei willkürliche Konstanten.

Es ist bemerkenswert, dass die Gleichung IX' im allgemeinen Monge'schen Sinn gelöst werden kann, d. h. dass es möglich ist, die Form der Funktion $h(\alpha)$ zu bestimmen, ohne dass es nötig wäre, über die Meridianform eine spezielle Annahme zu treffen.

Durch Weglassen des inhomogenen Gliedes von IX' entsteht die reduzierte Gleichung

$$\psi h'' + [\psi' + (\psi - \nu) \cotg \alpha] h' + \nu h = 0.$$

Von dieser ist ein erstes Partikularintegral die Funktion

$$h_1 = \xi^\nu, \quad (17)$$

wie man sich durch Ausrechnen unter Beobachtung von (1) und (2) leicht überzeugt. Eine zweite Lösung ist dann bekanntlich

$$h_2 = \xi^\nu \int \frac{\xi' d\alpha}{\xi^{\nu+1} \cos \alpha} = \xi^\nu \cdot \int \frac{ds}{\xi^{\nu+1}} \quad (17')$$

und hieraus ergibt sich eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung IX' zu

$$k_0 h_0 = -k_0 \xi^\nu \int \frac{\xi' d\alpha}{\xi^{\nu+1} \cos \alpha} \left\{ \text{tg } \alpha \xi' d\alpha \right\} = -k_0 \xi^\nu \int \frac{\xi ds}{\xi^{\nu+1}}. \quad (17'')$$

Somit ist die allgemeinste Form für das zulässige Gesetz der Schalendicke

$$h = k_0 h_0 + k_1 h_1 + k_2 h_2. \quad (18)$$

Die Grössen k sind die drei willkürlichen Parameter.

§ 8. Einige allgemeine Beispiele.

Für jede Schale, deren Dicke dem Gesetz (18) gehorcht, kommt das Elastizitätsproblem auf die Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung (X) heraus. Es fragt sich jetzt, wann diese Gleichung einfach genug ist, damit ihre Lösungen bis zur numerischen Brauchbarkeit praktisch hergestellt werden können. Das Problem in dieser Richtung zu Ende zu führen, kann nicht das Ziel dieser Arbeit sein. Vielmehr soll hier nur gezeigt werden, dass es jedenfalls ganze Klassen von Flächen gibt, für welche die Lösung der Gleichung (X) prinzipiell keine Schwierigkeiten macht.

1. Flächenklasse. $\xi = a \sin^n \alpha$.

Für das Gesetz der Schalendicke wird (18) mit $k_0 = k_2 = 0$ genommen und demgemäss gesetzt

$$h = k \sin^{nv} \alpha$$

dann wird nach (1) und (2)

$$R_1 = an \sin^{n-1} \alpha; \quad R_2 = a \sin^{n-1} \alpha; \quad \psi = \frac{1}{n}; \quad \zeta = na \int \sin^n \alpha d\alpha,$$

ferner nach (16) und (13)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{vk}{na} \sin^{nv-n+1} \alpha \cdot \left[1 + nv \cotg^2 \alpha \right]$$

$$L_2(A) = \frac{k}{n^2 a} \sin^{nv-n+1} \alpha \cdot \left\{ A'' + (1 - nv) \cotg \alpha \cdot A' - n^2 \cotg^2 \alpha \cdot A \right\}.$$

Somit lautet die zu lösende Gleichung X:

$$A'' + (1 - nv) \cotg \alpha A' + A \left[vn - n^2(1 - v^2) \cotg^2 \alpha + \frac{c_1 n^2 a}{k} \sin^{-nv+n-1} \alpha \right] = 0.$$

Setzt man $\frac{c_1 n^2 a}{k} = \sigma$, und führt man als Veränderliche $\sin \alpha = x$ ein, so geht dies über in

$$x^2(1-x^2) \frac{d^2 A}{dx^2} + \left[(1-nv)x(1-x^2) - x^3 \right] \frac{dA}{dx} + \left[nvx^2 - n^2(1-v^2)(1-x^2) + \sigma x^{-nv+n-1} \right] A = 0. \quad (19)$$

Hier sind alle Koeffizienten rational in x , sobald der Ausdruck

$$-nv + n + 1 = g$$

ganzzahlig wird. Dies werde vorausgesetzt.

Im Falle $\xi > 0$, hat diese Differentialgleichung singuläre Stellen nur in $x = 0, \pm 1$ und ∞ , und die Integrale verhalten sich in $x = 0, \pm 1$ bestimmt. Nach der Fuchs'schen Theorie solcher Gleichungen existieren dann zwei Lösungen von der Form

$$A_1 = x^{\varrho_1} \mathfrak{P}_1(x) \qquad A_2 = x^{\varrho_2} \mathfrak{P}_2(x)$$

wo die $\mathfrak{P}(x)$ Potenzreihen sind, die für $|x| < 1$ konvergieren, während die Exponenten ϱ Wurzeln der determinierenden Gleichung¹⁾

$$\varrho^2 - v n \cdot \varrho - n^2 (1 - v^2) = 0$$

bedeuten. Die Koeffizienten der Reihen berechnen sich aus Rekursionsgleichungen, die man durch Einsetzen der Reihenansätze in (19) erhält. Zu beachten ist, dass $|x| = |\sin \alpha|$ stets kleiner als eins ist, die Reihen also überall konvergieren, wo sie gebraucht werden.

Man kann ferner zeigen, dass in $x = \pm 1$ Integrale von der Form

$$\mathfrak{P}_3(1 \pm x) \text{ resp. } \sqrt{1 \pm x} \mathfrak{P}_4(1 \pm x)$$

vorhanden sind, bei denen die Potenzreihen \mathfrak{P} wieder für $|x| < 1$ konvergieren. Wenn die Schale den Scheitel der Meridianfläche ($x = 0$) nicht enthält, wird man diese Entwicklungen den frühern vorziehen.

Beispiel: Man nehme $v = \frac{1}{3}$ (für Metalle), und wähle $g = 3$. Dann wird $n = 3$

$$\xi = a \sin^3 \alpha \qquad \zeta = a (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) \qquad h = k \sin \alpha.$$

Die Schale hat den in Fig. 2 skizzierten Querschnitt. Die Differentialgleichung des Problems lautet

$$x^2 (1 - x^2) \frac{d^2 A}{dx^2} - x^3 \frac{dA}{dx} + [-8 + 9x^2 + \sigma x^3] A = 0.$$

Die Wandstärke nimmt aussen sehr langsam, erst in unmittelbarer Nähe des Gewölbescheitels rascher nach null hin ab.

¹⁾ Wenn $g = 0$ ist, verhalten sich die Integrale in $x = 0$ immer noch bestimmt, aber die determinierende Gleichung für die Exponenten ϱ ist

$$\varrho^2 - n v \varrho - n^2 (1 - v^2) + \sigma = 0.$$

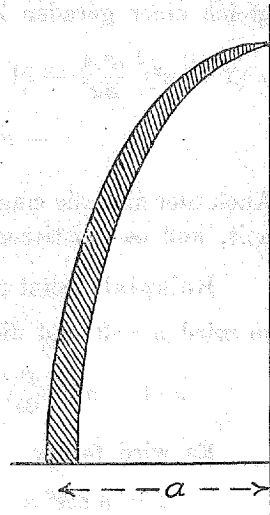


Fig. 2.

2. Flächenklasse. $\xi = a \cos^n \alpha$.

Wieder werde für h die Partikularlösung (17) verwendet und demgemäss gesetzt:

$$h = k \cos^{nv} \alpha$$

Man erhält

$$\xi = an \left\{ \int \cos^n \alpha d\alpha - \int \cos^{n-2} \alpha d\alpha \right\}$$

und die Grundgleichung X lautet:

$$A'' + [(nv - 2) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha] A' - \left\{ [n^2 + nv(1 - nv)] \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{c_1 an^2}{k} \sin^3 \alpha \cos^{n-4-nv} \alpha \right\} A = 0.$$

Führt man wieder $x = \sin \alpha$ ein, setzt $c_1 an^2 k^{-1} = \lambda$ und $n - 4 - nv$ gleich einer geraden Zahl $2g$, so geht dies über in

$$x(1 - x^2)^2 \frac{d^2 A}{dx^2} + (1 - x^2) \left[-1 + (nv - 2)x^2 \right] \frac{dA}{dx} - x^3 \left[n^2 + nv(1 - nv) - \lambda x(1 - x^2)^{g+1} \right] A = 0.$$

Auch hier sind die singulären Stellen $x = 0, \pm 1$ Stellen der Bestimmtheit, und es existieren dort konvergente Entwicklungen.

Beispiel: Setzt man wie früher $\nu = \frac{1}{3}$, und wählt man $g = -1$, so wird $n = 3$ und die Differentialgleichung vereinfacht sich zu

$$x(1 - x^2)^2 \frac{d^2 A}{dx^2} - (1 - x^4) \frac{dA}{dx} - x^3(9 - \lambda x) A = 0.$$

Es wird ferner

$$\xi = a \cos^3 \alpha, \quad \zeta = a(1 - \sin^3 \alpha), \quad h = k \cos \alpha.$$

Demnach ist der Meridian eine Asteroide, die Fläche eine Trichterfläche mit verstärktem Aussenrand.

Für $g = 0$ erhält man eine ähnliche Fläche; nur ist die Höhe des Trichters im Verhältnis zur Öffnungsweite wesentlich kleiner.

3. Flächenklasse. Hier sei wieder $\xi = a \cos^n \alpha$. Aber für das Gesetz der Schalendicke soll jetzt die Lösung (17') verwendet werden, wobei

$$h = \frac{k}{\cos \alpha}$$

wird. Die Gleichung X lautet:

$$A'' - \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} A' - \left[(n^2 + 2nv) \operatorname{tg}^2 \alpha - \left(\frac{c_1 n^2 a}{k} \right) \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha \right] A = 0.$$

Ist n eine ungerade Zahl $2g + 1$, so kann man wieder $x = \sin \alpha$ als Veränderliche einführen, worauf alle Koeffizienten in x rational werden. Die Gleichung wird

$$x(1-x^2)^2 \frac{d^2 A}{dx^2} - (1-x^2)(1+3x^2) \frac{dA}{dx} - x^3 \left[n^2 + 2nv - \lambda x(1-x^2)^g \right] A = 0,$$

wobei wieder $\lambda = c_1 n^2 a k^{-1}$ gesetzt wurde. Auch hier ist eine Lösung durch Reihen möglich.

Beispiel: $g = 0, \quad n = 1.$

$$\xi = a \cos \alpha, \quad \zeta = a \left[\sin \alpha - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right].$$

Es wird $R_1 R_2 = -a^2$. Danach handelt es sich hier um die Rotationsfläche konstanter negativer Krümmung. Der Meridian ist die Traktrix. Die Schale hat die Form eines ins Unendliche ausgezogenen Trichters mit zugeschärftem Rand. Da aber die Wandstärke rasch wächst, muss α auf genügend kleine Werte beschränkt werden.

Beispiel: $g = 1, \quad n = 3$ gibt die Rotationsfläche der Asteroide, aber jetzt mit zugeschärftem Rand. Auch hier muss die Spitze der Fläche abgeschnitten werden, da dort die Wandstärke nicht mehr klein wäre.

Beispiel: Für $g < 0$ erhält man je nach dem Wert von g mehr oder weniger flache Kuppelgewölbe, die aber statt eines Scheitels in der Mitte einen kreisförmigen Ausschnitt besitzen, und die sich in der Umgebung desselben einer ebenen, mit einem Deckel-ausschnitt versehenen Platte nähern. Die Wandstärke ist gegen den Lochrand zu etwas verjüngt.

§ 9. Die Kegelschale.

Die Theorie der Kegelschale lässt sich durch einen Grenzübergang aus der allgemeinen ableiten.

Der Winkel α ist hier konstant und die Lage eines Punktes P des geradlinigen Meridians wird am einfachsten gekennzeichnet durch seinen Abstand s von der Kegelspitze.

Für einen beliebigen krummen Meridian ist

$$\text{also} \quad ds = R_1 d\alpha$$

$$\frac{d(\quad)}{d\alpha} = R_1 \frac{d(\quad)}{ds}.$$

Für den Kegel wird R_1 unendlich, und man hat allgemein zu setzen

$$\frac{(\cdot)'}{R_1} \infty (\cdot).$$

Hiebei bedeutet ein Punkt die Differentiation nach s . Wenn man diesen Grenzübergang durchführt, erhält man statt den früher aufgestellten folgende Formeln:

$$\xi = s \cos \alpha; \quad \zeta = s \cdot \sin \alpha; \quad \psi = 0; \quad R_2 = s \cdot \cotg \alpha; \quad (1^*) (2^*)$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 s)' - T_2 + sX &= 0 \\ (Ns)' + T_2 \operatorname{tg} \alpha + sZ &= 0 \\ (G_1 s)' - G_2 - sN &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

Das Integral (4) geht über in

$$(T_1 \sin \alpha + N \cos \alpha) s = -F^*(s),$$

wo jetzt $F^*(s) = \int^s (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) s ds$ bedeutet. (4^*)

Ferner wird

$$\varepsilon_1 = \dot{u}; \quad \varepsilon_2 = \frac{u - w \operatorname{tg} \alpha}{s}; \quad x_1 = \dot{w}; \quad x_2 = \frac{\dot{w}}{s}. \quad (5^*)$$

Die Gleichungen (6) bleiben bestehen. Als Unbekannte werden eingeführt:

$$U = w \quad V = Ns \cdot \cotg \alpha. \quad (7^*)$$

Dann ist

$$T_1 = -\frac{V}{s} - \frac{F^*}{s \cdot \sin \alpha}; \quad T_2 = -V' + H^*, \quad \text{wo } H^* = -sZ \cdot \cotg \alpha. \quad (8^*)$$

Für den Differentialoperator L hat man

$$L_1(U) = h \cotg \alpha \left[sU'' + U' - \frac{U}{s} \right] = h \cotg \alpha \cdot L(U) \quad (9^*)$$

und es lauten endlich die beiden Differentialgleichungen des Kegelproblems:

$$L_1(U) + 3 \cotg \alpha \cdot h' [sU' + vU] = -\lambda_1 h^{-2} \cdot V \quad \text{I}^*$$

$$L_1(V) + \cotg \alpha \cdot h' [-sV' + vV] = 2Eh^2 U + \chi, \quad \text{II}^*$$

worin

$$\chi = h \cotg^2 \alpha \cdot \left\{ \frac{h'}{h} \left[s^2 Z - v \frac{F^*}{\cos \alpha} \right] - (s^2 Z)' + v \operatorname{tg} \alpha \cdot sX + \frac{F^*}{s \cos \alpha} \right\}$$

bedeutet.

Wieder sollen an diesen Hauptgleichungen der Transformationen (10) mit $a = -2$, $b = 0$ durchgeführt werden. Man hat jetzt die Operation

$$L_2(A) = h \cotg \alpha \left[s A'' + A' - \frac{A}{s} - s \frac{h}{h} A' \right]$$

einzuführen. Die Gleichungen (11) gehen über in

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\cotg \alpha \cdot [2sh'' + (2 - 3\nu)h'] \\ \varphi_2 &= \cotg \alpha \cdot \nu h' \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

und die transformierten Hauptgleichungen lauten wie die Gleichungen (V') (VI').

Die Zerfallsbedingung (IX)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k_0$$

lautet ausgeschrieben:

$$sh'' + (1 - \nu)h' = -k_0 \operatorname{tg} \alpha = \text{konstant.} \quad (IV^*)$$

Ihr allgemeines Integral ist

$$h = a + bs + cs^\nu, \quad (20)$$

worin die Konstante b mit k_0 verknüpft ist durch die Gleichung

$$k_0 = -(1 - \nu)b \cotg \alpha, \quad (21)$$

während a und c willkürlich bleiben.

Als praktisch wichtig folgt aus der Form des Integrals (20) insbesondere das Resultat:

Das Elastizitätsproblem der Kegelschale ist reduzierbar nicht nur im Fall der konstanten Schalendicke, sondern auch dann, wenn die Wandstärke linear zu- oder abnimmt.

In den folgenden Abschnitten soll dies näher verfolgt und das Problem vollständig integriert werden.

Bemerkenswert ist, dass für einen am Schluss behandelten Sonderfall alles auf elementare Funktionen hinausläuft, so dass den längstbekanntesten Beispielen der Zylinderschale und der ebenen Platte dieser neue Elementarfall an die Seite tritt.

§ 10. Die Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke.

In dem Gesetz (20) für die Wandstärke sind a , b und c willkürlich. Der Sonderfall $b = c = 0$, in welchem die Schalendicke überall gleich ist, wurde schon früher erledigt. Im folgenden werde die Annahme $c = 0$ gemacht, so dass

$$h = a + bs \quad (22)$$

wird.

Die Hauptgleichung (X) des Problems hat dann die Form

$$(a + bs) \left(s A'' - \frac{A}{s} \right) + a A' + (\varphi_1 + c_1) \operatorname{tg} \alpha A = 0. \quad (23)$$

Nach (15), (11*) und (21) wird aber

$$(\varphi_1 + c_1) \operatorname{tg} \alpha = b \left\{ (2\nu - 1) + \sqrt{(1 - \nu)^2 - 3 \frac{(1 - \nu^2)}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha} \right\} = \text{konstant.}$$

Es ist zweckmässig, hier noch eine derartige Transformation der Veränderlichen vorzunehmen, dass die zwei als singular vorauszusehenden Stellen, nämlich die Kegelspitze und die Stelle, wo die Wandstärke gleich null wird, nach 0 resp. 1 geworfen werden. Demgemäss werde statt s die Variable t eingeführt durch den Ansatz

$$s = -\frac{a}{b} t. \quad (24)$$

Die Differentialgleichung für A lautet dann nach einiger Umformung

$$(1 - t) t^2 \frac{d^2 A}{dt^2} + t \frac{dA}{dt} - (1 - \sigma_1 t) A = 0, \quad (X^*)$$

wo

$$\sigma_1 = 2(1 - \nu) - \sqrt{(1 - \nu)^2 - 3 \frac{(1 - \nu^2) \operatorname{tg}^2 \alpha}{b^2}}$$

gesetzt ist. Wählt man für die Wurzel das entgegengesetzte Zeichen, so erhält man aus X die zweite Hauptgleichung ($X^{*'}).$ Der zugehörige Wert von σ heisse σ_2 .

Die vorstehende Differentialgleichung X^* ist aber die bekannte Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion. Allerdings wird darin die Grösse σ komplex werden, da b im allgemeinen einen sehr kleinen Wert haben wird. Für die Integration der Gleichung X^* ist dies aber ohne Belang. Ein erstes Integral A_1 kann sofort hingeschrieben werden. Bezeichnet man mit α_1, α_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^2 - \alpha - \sigma_1 = 0, \quad (25)$$

und mit F die hypergeometrische Reihe, so hat man

$$A_1(t) = t \cdot F(\alpha_1, \alpha_2, 3, t) = t \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{3 \cdot 1} t + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + 1) (\alpha_2 + 1)}{3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} t^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + 1) (\alpha_2 + 1) (\alpha_1 + 2) (\alpha_2 + 2)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \dots \right\}$$

oder ausgeschrieben

$$A_1(t) = t \cdot \left\{ 1 - \frac{\sigma}{3 \cdot 1} t - \frac{\sigma(2 - \sigma)}{3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} t^2 - \frac{\sigma(2 - \sigma)(6 - \sigma)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 - \dots \right\}.$$

Diese Reihenentwicklung konvergiert im Einheitskreis. Ein zweites Integral kann nicht ohne weiteres hingeschrieben werden,

da der Fall ganzzahliger Exponentendifferenzen vorliegt. Doch lässt es sich durch einen einfachen Grenzübergang leicht berechnen.¹⁾ Handelt es sich um eine Kegelschale mit abgeschnittener Spitze, oder um eine solche, bei der die Wandstärke von der Spitze gegen aussen zunimmt, so braucht man die Integrale in der Gegend von $t = 1$ und für grosse negative t . Man wird dann die ebenfalls hypergeometrischen Reihenentwicklungen benutzen, die nach Potenzen von $(1-t)$ resp. $\frac{1}{t}$ fortschreiten. Zur Erzielung rascher Konvergenz kann man sich übrigens auch aller dieser Reihen gleichzeitig bedienen; denn zwischen ihnen herrschen lineare Beziehungen, die sogenannten Gauss'schen Zusammenhangsformeln.

Hiemit ist die numerische Berechnung der Integrale des homogenen Problems möglich gemacht, und es handelt sich nur noch darum, für die belastete Kegelschale ($\chi \neq 0$) eine partikuläre Lösung anzugeben. Praktisch kommen nur drei Belastungsfälle in Betracht: konstanter Aussen- oder Innendruck, Eigengewicht oder Belastung durch diejenigen Trägheitskräfte, die einer gleichförmig um die Axe rotierenden Schale entsprechen. Aus den aufgestellten Gleichungen berechnet man in allen drei Fällen für χ einen Ausdruck von der Form:

$$\chi = \frac{\gamma_{-1}}{s} + \gamma_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \gamma_3 s^3 + \gamma_4 s^4,$$

wo allerdings einige der γ auch gleich null sein können. Zu lösen ist jetzt das inhomogene System

$$\begin{aligned} L_2(A) + \varphi_1 \cdot A &= -\lambda_1 B \\ L_2(B) + \varphi_2 \cdot B &= \lambda_2 A + \chi. \end{aligned}$$

Nun ist $L_2(f_1 + f_2) = L_2(f_1) + L_2(f_2)$

$$L_2(s^n) = \cotg \alpha \cdot a \cdot (x^2 - 1) \cdot s^{n-1} + \cotg \alpha \cdot b \cdot (x^2 - x - 1) \cdot s^n,$$

insbesondere

$$L_2(s) = -\cotg \alpha \cdot b \cdot s; \quad L_2(s^{-1}) = \cotg \alpha \cdot b \cdot s^{-1}.$$

Wird dies beachtet, so ist leicht einzusehen, dass durch die Ansätze

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha_{-1}}{s} + \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 \\ B &= \frac{\beta_{-1}}{s} + \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \beta_4 s^4 \end{aligned}$$

jenen Gleichungen genügt werden kann. Diese Lösungen sind zu den hypergeometrischen Reihen zu addieren.

¹⁾ Vergl. Riemann-Weber, Diff.-Gleichn. d. Physik. 5. Aufl. Braunschweig, Vieweg, 1911, S. 25 ff.

§ 11. Die elementare Kegellösung.

Es soll jetzt näher auf den Sonderfall $a = 0$, $h = bs$ eingegangen werden.

Die Schalendicke sei also dem Abstand s von der Kegelspitze proportional, in der Spitze selbst gleich null.

Die hypergeometrischen Integrale, die gefunden worden sind, degenerieren jetzt, da ja die im Endlichen liegenden singulären Stellen zusammenfallen. In der Tat fällt die Transformation (24) dahin und (23) geht über in die Gleichung

$$s^2 A'' - \sigma_1 A = 0,$$

deren Integrale elementar sind, nämlich

$$s^{\alpha_1} \quad \text{und} \quad s^{\alpha_2},$$

wo α_1 und α_2 durch Gleichung (25) gegeben sind. Analog hat die zweite Hauptgleichung (X^*)

$$s^2 A'' - \sigma_2 A = 0$$

Lösungen von der Form

$$s^{\alpha_3} \quad s^{\alpha_4}.$$

Mithin ergibt sich für den allgemeinen Ausdruck von A :

$$A = \sum_1^4 c_n s^{\alpha_n}.$$

Hier soll Reelles und Imaginäres durch die Schreibweise kenntlich gemacht werden. Die Grösse

$$\tau = + \sqrt{\frac{3(1-\nu^2) \operatorname{tg} \alpha}{b^2} - (1-\nu)^2}.$$

wird im allgemeinen wegen der Kleinheit von b reell; der Wurzel soll hier das positive Zeichen beigelegt werden. Dann ist

$$\sigma_1 = 2(1-\nu) - i\tau \quad \sigma_2 = 2(1-\nu) + i\tau$$

und die Werte von α_3 , α_4 sind daher zu den Wurzeln α_1 , α_2 konjugiert. Zur Abkürzung setze man:

$$q = \frac{9}{4} - 2\nu; \quad W = + \sqrt{q^2 + \tau^2};$$

$$m = + \sqrt{\frac{q+W}{2}}; \quad n = + \sqrt{\frac{-q+W}{2}}; \quad m_1 = \frac{1}{2} + m; \quad m_2 = \frac{1}{2} - m,$$

wo wieder alle Wurzeln positiv genommen seien. Dann ist

$$\alpha_1 = m_1 - in; \quad \alpha_2 = m_2 + in; \quad \alpha_3 = m_1 + in; \quad \alpha_4 = m_2 - in$$

und die Differentialgleichung VII hat die 4 Partikularlösungen

$$\begin{aligned} J_1 &= s^{m_1} \cos(n \lg s); & J_2 &= s^{m_1} \sin(n \lg s); \\ J_3 &= s^{m_2} \cos(n \lg s); & J_4 &= s^{m_2} \sin(n \lg s). \end{aligned}$$

Setzt man

$$M(J) = L_2(J) + \varphi_1 J; \quad c_1 = \gamma_1 + i\delta_1,$$

so ist nach X:

$$\begin{aligned} M(J_1 - iJ_2) + (\gamma_1 + i\delta_1)(J_1 - iJ_2) &= 0 \\ M(J_3 + iJ_4) + (\gamma_1 + i\delta_1)(J_3 + iJ_4) &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} M(J_1) &= -\gamma_1 J_1 - \delta J_2; & M(J_3) &= -\gamma J_3 + \delta J_4; \\ M(J_2) &= \delta J_1 - \gamma J_2; & M(J_4) &= -\delta J_3 - \gamma J_4. \end{aligned}$$

Nun kann aus dem Integral A das Integral B vermöge dieser Relationen leicht gefunden werden. Es sei

$$p = \frac{\delta(1-\nu)}{\lambda_1} \quad q = \frac{b\tau}{\lambda_1}$$

gesetzt, und für A wähle man jetzt die reelle Form:

$$A = a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3 + a_4 J_4.$$

Nach (V') wird

$$\begin{aligned} B = -\frac{1}{\lambda_1} M(A) &= \cotg \alpha \cdot \left\{ (p a_1 - q a_2) J_1 \right. \\ &\quad \left. + (q a_1 + p a_2) J_2 + (p a_3 + q a_4) J_3 + (-q a_3 + p a_4) J_4 \right\} \end{aligned}$$

und nach (10)

$$U = w = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{A}{s^2}; \quad V = NR_2 = Ns \cotg \alpha = B.$$

Eine Quadratur gibt weiter die Verschiebung w selber zu:

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{b^2 |\alpha_1^2|} &\left\{ [a_1(m_1 - 1) - a_2 n] \frac{J_1}{s} + [a_1 n + a_2(m_1 - 1)] \frac{J_2}{s} \right\} \\ &+ \frac{1}{b^2 |\alpha_2^2|} \left\{ [a_3(m_2 - 1) - a_4 n] \frac{J_3}{s} + [a_3 n + a_4(m_2 - 1)] \frac{J_4}{s} \right\} \end{aligned}$$

und daraus erhält man u wegen (5*) (8*) und (6) ohne neue Integration.

Ist der Kegel in der Spitze geschlossen und durch p_0 Atmosphären Aussendruck belastet, so findet man nach der in § 10 angegebenen Methode leicht die folgende Partikularlösung:

$$A_0 = a_0 s^2 \quad B_0 = b_0 s^2$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0 \frac{(1+\nu)}{2b} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{b^2} - \frac{\lambda_1}{(1+\nu)(1-3\nu)}; \\ b_0 &= p_0 \frac{(1+\nu)}{2} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{b^2} - \frac{(1-3\nu) \cotg \alpha}{(1+\nu)(1-3\nu)}, \end{aligned}$$

welcher die Normalverschiebung

$$W_0 = \frac{a_0}{b^2} \cdot s$$

entspricht. Für diesen Fall hat also die allgemeine Lösung die Form

$$\bar{A} = a_0 s^2 + A$$

$$\bar{B} = b_0 s^2 + B$$

und die Normalverschiebung ist

$$\bar{W} = \frac{a_0}{b_2} s + W.$$

Diese Lösung enthält vier willkürliche Konstanten und lässt sich daher allen Randbedingungen anpassen.

§ 12. Ein numerisches Beispiel.

Die im vorigen Abschnitt gegebene Lösung soll an einem Beispiel zahlenmässig weitergeführt werden. Herr Stodola hat in seinem Buche über Dampfturbinen¹⁾ Kegelschalen von konstanter Wandstärke durchgerechnet. Da es von Interesse sein wird, mit seinen Resultaten Vergleiche zu ziehen, soll hier an das erste dort gegebene Beispiel angeknüpft werden. Eine Kegelschale von den dort angegebenen Dimensionen soll untersucht werden, aber das Wandstärkengesetz sei $h = bs$. Ausserdem werde der Wert von b so gewählt, dass zur Herstellung der Schale hier wie dort gleich viel Material verbraucht werde.

Demgemäss handelt es sich um eine in der Spitze geschlossene Kegelschale. Der abschliessende Parallelkreis hat den Durchmesser 1500 mm; die Wandstärke am Aussenrand ist 75 mm. Der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist 75° , mithin $\alpha = 15^\circ$. Die Schale steht unter konstantem Aussendruck p_0 .

Für die Rechnung ist es zweckmässig, den Masstab so zu wählen, dass die Mantellinie des Kegels die Länge 1 erhält. Dann wird

$$b = 0,0483 \quad m_1 = 2,8386 \quad m_2 = -1,8386 \quad n = 1,954.$$

Die Integrale J_3 und J_4 wachsen in der Nähe von $s = 0$ über alle Grenzen; ihnen würden analoge Spannungen und Verschiebungen entsprechen. Mithin muss

$$a_3 = a_4 = 0$$

gesetzt werden. Das Problem hat also die Lösung

¹⁾ Stodola: loc. cit. Seite 597 ff.

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{a_0}{b^2} + s^{m_1-2} \left[\frac{a_1}{b^2} \cos(n \lg x) + \frac{a_2}{b^2} \sin(n \lg x) \right] \\ V &= b_0 s^2 + s^{m_1} \cotg \alpha \left\{ (p a_1 - q a_2) \cos(n \lg x) + (q a_1 - p a_2) \sin(n \lg x) \right\} \end{aligned} \right\} (26)$$

und es handelt sich bloss noch um die Bestimmung der Integrationskonstanten a_1 , a_2 aus den Randbedingungen.

1. Fall. Der Kegel liegt auf einer horizontalen Ebene frei auf.

Dies ist im Stodola'schen Beispiel angenommen. Am freien Rand ($s=1$) wirken dann nur vertikale, gleichförmig über die Schalendicke verteilte Spannungen. Mithin muss das Biegemoment

$$G_1 = 0$$

sein, und die Kräfte T_1 und N müssen eine vertikale Resultierende haben. Dies erfordert

$$T_1 \cotg \alpha - N = 0.$$

Drückt man alles durch U und V aus, so erhält man die zwei Randbedingungen

$$\begin{aligned} 1) \quad & U(1) + \nu U(1) = 0 \\ 2) \quad & V(1) \cdot \tg \alpha + \frac{p_0}{2} \cos^2 \alpha = 0. \end{aligned}$$

Wenn die Ausdrücke (26) hier eingeführt werden, so sind dies zwei lineare Gleichungen, aus denen a_1 und a_2 berechnet werden können. Dann aber lässt sich alles übrige ermitteln.

In der Praxis ist es üblich, die Spannungen pro Flächeneinheit anzugeben. In Übereinstimmung mit Herrn Stodola bezeichnen wir daher:

$$\sigma_r = \frac{T_1}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{T_2}{2h}; \quad \sigma_x = \frac{3G_1}{2h^2}; \quad \sigma_y = \frac{3G_2}{2h^2}.$$

Für ein an der Schalenoberfläche gelegenes Flächenelement, das normal zur x -Richtung steht, ist dann die wirkende Normalspannung $\sigma_r \pm \sigma_x$, für ein Element normal zur y -Axe $\sigma_t \pm \sigma_y$. Das obere Zeichen gilt für die Innen-, das untere für die Aussenseite der Schale. Alle diese Spannungen gehen mit p_0 proportional.

In Fig. 3 sind die Schaubilder der Verhältnisse $\frac{\sigma}{p_0}$ eingetragen; sie können direkt mit den analogen des Herrn Stodola verglichen werden. Nur in der Nähe der Kegelspitze ist ein merklicher Unter-

schied im Verlauf zu konstatieren. Die Spannungen oszillieren dort unendlich oft, konvergieren aber für $s = 0$ nach endlichen Grenzwerten. Daher sind die dort auftretenden Kräfte unbedeutend. Die Maximalwerte der Spannungen, die für die Festigkeit der Schale in Betracht fallen, sind im vorliegenden Beispiele nur um einige Prozente kleiner als im Fall konstanter Wandstärke. In der Nähe des

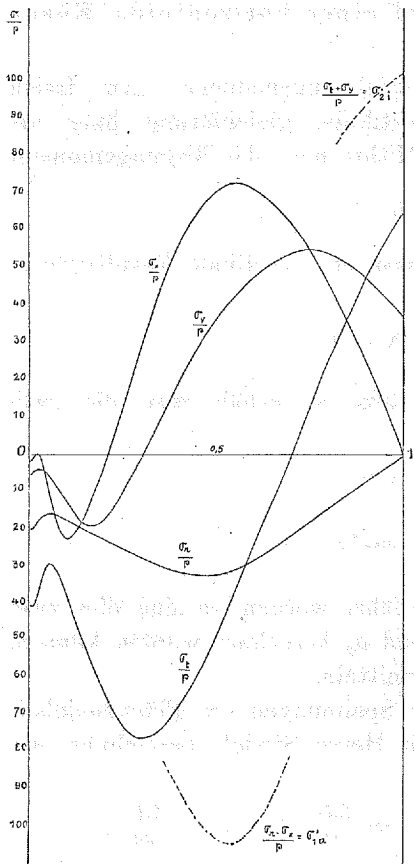


Fig. 3.

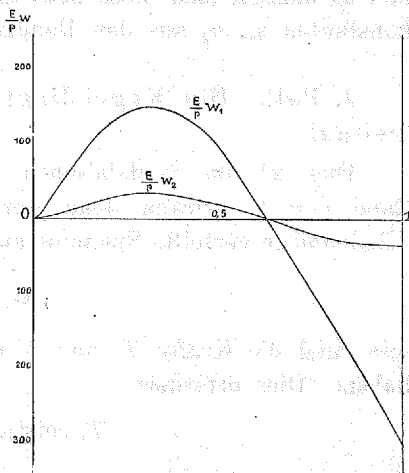


Fig. 4.

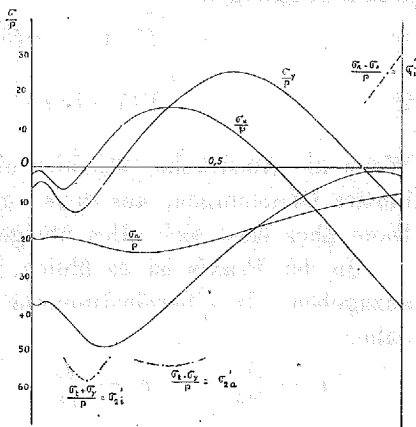


Fig. 5.

Randes ($s = 1$) verlaufen die Spannungen in beiden Fällen fast gleich. Dies legt nahe, der Berechnung der Kegelschalen stets den hier behandelten elementaren Fall zugrunde zu legen. Wie und wie weit das möglich und zulässig ist, wird durch spätere Untersuchungen gezeigt werden.

In Fig. 4 ist auch noch die Normalverschiebung $w = w_1$ zur Darstellung gebracht. Da w_1 sehr klein ist, ist die Kurve mit den

Ordinaten $\frac{E}{p_0} w_1$ dort eingetragen. Die Verschiebung wird am freien Rande und im ersten Drittel von der Spitze weg ziemlich gross, null in der Gegend $s = \frac{2}{3}$.

2. Fall. Der Kegel ist am Rand eingespannt. Dann ist dort $G_1 \neq 0$ und so gross, dass die Meridiantangente sich nicht neigt. Man hat mithin für $s = 1$

$$1) \quad w = U(1) = 0.$$

Ferner behält der Parallelkreis $s = 1$ seine Grösse bei. Somit ist für $s = 1$ auch $\varepsilon_2 = 0$. Dies gibt in V ausgedrückt:

$$2) \quad V'(1) - \nu V(1) + p_0 \frac{\cotg \alpha}{2} (2 - \nu) = 0.$$

Benützt man die Gleichungen (26), so gibt das wieder zwei Beziehungen, aus denen sich a_1 und a_2 bestimmen. Die zugehörigen Spannungsdiagramme sind in Fig. (5) wiedergegeben. Man konstatiert die grosse Abnahme ihrer Maxima, die durch die Einspannung erzielt worden ist. Analoges gilt auch für die Verschiebung $w = w_2$, deren Schaubild durch die zweite Kurve von Fig. (4) dargestellt ist.

Eine eingehende Diskussion dieser Resultate liegt aber nicht im Plan der vorliegenden Arbeit.

Zürich, 21. Dezember 1914.