Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie.[1])

Von

Albert Einstein.

Mit dem Worte „Masse“ eines Körpers werden zwei ihrer Definition nach durchaus verschiedene Dinge bezeichnet, einerseits der Trägheitswiderstand des Körpers, andererseits diejenige charakteristische Konstante, welche für die Einwirkung eines Schwerefeldes auf den Körper massgebend ist. Es ist eine der merkwürdigsten Erfahrungstatsachen der Physik, dass diese beiden Massen, die träge und die schwere, ihrer Grösse nach genau miteinander übereinstimmen. Am exaktesten wurde diese Übereinstimmung durch Versuche von Eötvös nachgewiesen. An der Erdoberfläche wirken auf einen Körper zwei im allgemeinen verschieden gerichtete Kräfte, die zusammen die scheinbare Schwere des Körpers ausmachen: die eine dieser Kräfte, die eigentliche Schwere, ist von der schweren Masse, die andere, die Zentrifugalkraft, von der trägen Masse abhängig. Durch Versuche mit der Drehwage stellte Eötvös fest, dass das Verhältnis dieser beiden Kräfte von der Natur des Stoffes unabhängig sei, er bewies so die Übereinstimmung der beiden Massen eines Körpers mit einer Genauigkeit, die Abweichungen von der relativen Grösse 10^{-7} ausschliesst.

Dieses Erfahrungsgesetz lässt sich auch dahin aussprechen, dass alle Körper in einem Schwerefeld mit der gleichen Beschleunigung fallen. Dadurch wird die Anschauung nahegelegt, dass ein Schwerefeld hinsichtlich seiner Einwirkung auf mechanische und andere physikalische Vorgänge ersetzt werden könne durch einen Beschleunigungszustand des Bezugskörpers (Koordinatensystems). Diese Auffassung folgt nicht zwingend aus den genannten Erfahrungen, kann

[1]) Nach einem Vortrage, gehalten am 9. September 1913 an der Jahresversammlung der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft in Frauenfeld.

aber doch ein hohes heuristisches Interesse beanspruchen. Denn da wir imstande sind, den Ablauf physikalischer Vorgänge relativ zu einem beschleunigten Bezugssystem auf theoretischem Wege zu ermitteln, gestattet uns diese Äquivalenzhypothese den Einfluss eines Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge jeder Art vorauszusagen. Die experimentelle Prüfung der so erlangten Folgerungen muss dann zeigen, ob die zugrunde gelegte Hypothese richtig war.

Auf dem angedeuteten Wege lässt sich folgern, dass die Raschheit des Ablaufes irgendeines physikalischen Vorganges in einem Schwerefeld desto grösser ist, je grösser das Gravitationspotential an dem Ort ist, an welchem sich das betr. physikalische System befindet. Aus diesem Grunde sollen beispielsweise die Spektrallinien des Sonnenlichtes gegenüber den entsprechenden Spektrallinien irdischer Lichtquellen eine kleine Verschiebung nach dem roten Ende des Spektrums hin erfahren und zwar um etwa zwei Millionstel der Wellenlänge. Eine weitere Folge dieser Äquivalenzhypothese ist die Krümmung der Lichtstrahlen in einem Schwerefeld, welche für einen an der Sonne vorbeigehenden Lichtstrahl 0,84 Bogensekunden beträgt, also der experimentellen Prüfung nicht unzugänglich ist. Dieses Ergebnis einer Krümmung der Lichtstrahlen schliesst in sich, dass die Lichtgeschwindigkeit keine konstante ist, sondern vom Orte abhängt. Dadurch wird man gezwungen, die Theorie von Raum und Zeit, die als Relativitätstheorie bekannt ist, zu verallgemeinern, da diese ja auf der Voraussetzung von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gegründet war.

Nach der gewöhnlichen Relativitätstheorie bewegt sich ein isolierter materieller Punkt geradlinig-gleichförmig gemäss der Gleichung

$$\delta\left(\int ds\right) = 0,$$

wo

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

ist und c die (konstante) Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die Äquivalenzhypothese lässt nun die Folgerung zu, dass sich in einem *statischen* Schwerefeld (spezieller Art) ein materieller Punkt gemäss der nämlichen Gleichung bewegt, wobei aber c eine Funktion des Ortes ist und durch das Gravitationspotential bestimmt wird. Von diesem Spezialfall des Schwerefeldes kann man zu einem allgemeinen jedenfalls gelangen, indem man durch Koordinatentransformation auf bewegte Koordinatensysteme übergeht.[1]) Man erkennt auf diesem

[1]) Dabei postulieren wir, dass wir zu einer gleichberechtigten Beschreibung des Vorganges gelangen, indem wir ihn auf ein geeignet bewegtes Koordinatensystem beziehen; damit halten wir an dem Grundgedanken der Relativitätstheorie fest.

Wege, dass die einzige invarianten-theoretisch genügend umfassende Verallgemeinerung des angegebenen Bewegungsgesetzes darin besteht, dass wir das „Linienelement ds“ in der Form

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

voraussetzen, wo die g_{ik} Funktionen von x_1, x_2, x_3 und x_4 sind und die drei ersten Koordinaten den Ort, die letzte die Zeit charakterisieren und die Bewegungsgleichung wieder die Form

$$\delta \left(\int ds \right) = 0$$

haben soll.

Berücksichtigt man, dass bei dieser Auffassung an Stelle des gewöhnlichen Linienelementes

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2$$

der ursprünglichen Relativitätstheorie das allgemeinere

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

als absolute Invariante (Skalar) tritt, so erkennt man sofort, wie man zu einer Verallgemeinerung der Relativitätstheorie gelangt, welche auf der Grundlage der Äquivalenzhypothese die Gravitation mit umfasst. Während in der ursprünglichen Relativitätstheorie die Unabhängigkeit der physikalischen Gleichungen von der speziellen Wahl des Bezugssystems auf der Postulierung der fundamentalen Invariante $ds^2 = \sum_i dx_i^2$ gegründet ist, handelt es sich für uns darum, eine Theorie aufzubauen, bei der das allgemeinste Linienelement von der Form

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

die Rolle der fundamentalen Invariante spielt. Die hiezu notwendigen vektoranalytischen Begriffsbildungen liefert die Methode des absoluten Differentialkalküls, die im anschliessenden Vortrage von Grossmann auseinandergesetzt ist.

Aus dem oben angedeuteten Gedanken geht hervor, dass die zehn Grössen g_{ik} das Schwerefeld charakterisieren; sie ersetzen das skalare Gravitationspotential φ der Newton'schen Gravitationstheorie und bilden den fundamentalen kovarianten Tensor zweiten Ranges des Gravitationsfeldes. Die fundamentale physikalische Bedeutung dieser Grössen g_{ik} besteht u. a. darin, dass sie für das Verhalten der Masstäbe und Uhren bestimmend sind.

Die Methode des absoluten Differentialkalküls erlaubt, die Gleichungssysteme irgendeines physikalischen Vorganges, wie sie in der ursprünglichen Relativitätstheorie vorliegen, derart zu verallgemeinern, dass sie in das Schema der neuen Theorie hineinpassen. In diesen Gleichungen treten stets die Komponenten g_{ik} des Schwerefeldes auf. Es bedeutet dies physikalisch, dass die Gleichungen Aufschluss geben über den Einfluss des Gravitationsfeldes auf die Vorgänge des studierten Gebietes. Als einfachstes Beispiel dieser Art diene das oben angegebene Bewegungsgesetz des materiellen Punktes. Im übrigen beschränken wir uns auf die Formulierung des allgemeinsten Gesetzes, welches die theoretische Physik kennt, nämlich desjenigen Gesetzes, welches dem Erhaltungssatz des Impulses und der Energie in der ursprünglichen Relativitätstheorie entpricht. Man kennt dort bekanntlich einen symmetrischen Tensor $T_{\mu\nu}$, dessen Komponenten, die Spannungskomponenten, die Komponenten des Impulses, die Komponenten von Energiestromdichte und Energiedichte liefern. Diese Grössen lassen sich für jedes Erscheinungsgebiet angeben. Die Sätze der Erhaltung des Impulses und der Energie sind in den Gleichungen

$$\sum_{\nu} \frac{\partial T_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (\nu, \sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

enthalten, denn man kann aus diesen Gleichungen durch Integration bezüglich der räumlichen Koordinaten über das ganze System die Erhaltungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\int T_{\sigma 4}\, d\tau\right) = 0 \tag{1a}$$

erhalten, wobei $d\tau$ das dreidimensionale Volumenelement bedeutet.

In der allgemeinen Theorie entsprechen den Gleichungen (1) die folgenden:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \gamma_{\mu\tau} \mathfrak{T}_{\sigma\nu} \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

Hiebei ist

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g} \cdot \sum_{\mu} g_{\sigma\mu}\, \Theta_{\mu\nu},$$

wobei g die Determinante $|g_{ik}|$ ist, $\gamma_{\mu\tau}$ die durch diese Determinante dividierte, $g_{\mu\tau}$ adjungierte Unterdeterminante; $\Theta_{\mu\nu}$ ist der symmetrische kontravariante Tensor zweiten Ranges, der für das energetische Verhalten in dem betr. Erscheinungsgebiet charakteristisch ist. Die Grössen $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ haben hier dieselbe physikalische Bedeutung wie in der ursprünglichen Relativitätstheorie die Grösse $T_{\sigma\nu}$; die Spannungs-Energie-Komponenten des Gravitationsfeldes sind in ihnen nicht enthalten.

Die rechte Seite der Gleichungen (2) verschwindet, wenn die Grössen $g_{\mu\nu}$ konstant sind, d. h. wenn kein Gravitationsfeld vorhanden ist. Gleichung (2) geht dann über in Gleichung (1) und kann daher in die Form (1a) gebracht werden; anders ausgedrückt: der materielle Vorgang erfüllt für sich allein die Erhaltungssätze. Sind dagegen die $g_{\mu\nu}$ variabel, d. h. ist ein Schwerefeld vorhanden, so drückt die reche Seite der Gleichungen (2) die energetische Beeinflussung des materiellen Vorganges durch das Schwerefeld aus. Es ist klar, dass in diesem Falle aus Gleichung (2) zunächst keine Erhaltungssätze gefolgert werden können, denn die Spannungs-Energie-Komponenten des materiellen Vorganges können für sich allein, ohne diejenigen des Schwerefeldes, keine Erhaltungssätze erfüllen.

Die bisher skizzierte Methode zeigt, wie die Gleichungssysteme der Physik gewonnen werden können, unter Berücksichtigung des Einflusses eines gegebenen Schwerefeldes auf die Vorgänge. Das Hauptproblem der Gravitationstheorie ist aber damit nicht gelöst, denn es besteht in der Aufgabe, die Grössen g_{ik} zu bestimmen, wenn die felderzeugenden materiellen Vorgänge (die elektrischen inbegriffen) als gegeben zu betrachten sind. Es ist also mit andern Worten die Verallgemeinerung der Poisson'schen Gleichung

$$\Delta \varphi = 4 \pi k \varrho \tag{3}$$

gesucht.

Die von der gewöhnlichen Relativitätstheorie gelieferte Proportionalität von Energie und träger Masse einerseits, die erfahrungsmässige Proportionalität von träger und schwerer Masse andererseits, führen mit Notwendigkeit zu der Auffassung, dass für die Gravitationswirkungen eines Systems dieselben Grössen massgebend sein müssen, die auch für das energetische Verhalten des Systems massgebend sind. Hieraus folgern wir, dass in den gesuchten Gravitationsgleichungen an Stelle der Dichte ϱ der Gleichung (3) der Tensor $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ wird eintreten müssen. Es wird sich also um Gleichungen handeln, welche die Gleichheit zweier Tensoren ausdrücken, von denen der eine der gegebene Tensor $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ ist, der andere durch Differentialoperationen aus dem Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hervorgeht.

Es hat sich nun ergeben, dass die Erhaltungssätze des Impulses und der Energie die Herleitung dieser Gleichungen ermöglichen. Es ist schon oben hervorgehoben worden, dass der materielle Vorgang allein den Erhaltungssätzen nicht genügen kann; wir müssen aber verlangen, dass für den materiellen Vorgang und das Gravitationsfeld zusammen die Erhaltungssätze erfüllt seien. Nach den obigen Überlegungen bedeutet dies, dass vier Gleichungen von der Form

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{4}$$

bestehen müssen. $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ charakterisieren hiebei die Spannungs-Energie-Komponenten des Gravitationsfeldes in analoger Weise wie die Grössen $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ diejenigen des materiellen Vorganges. Insbesondere müssen die Grössen $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ und $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ denselben invarianten-theoretischen Charakter haben. Es hat sich durch eine allgemeine Überlegung zeigen lassen, dass Gleichungen, welche das Gravitationsfeld vollständig bestimmen, nicht beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sein können. Diese prinzipielle Erkenntnis ist deswegen besonders bemerkenswert, weil alle übrigen physikalischen Gleichungen, wie z. B. Gleichung (2), die allgemeine Kovarianz besitzen. Im Einklang mit diesem allgemeinen Ergebnis steht, dass auch die postulierten Gleichungen (4) nicht beliebigen, sondern nur linearen Substitutionen gegenüber kovariant sind. Wir werden also auch von den gesuchten Gravitationsgleichungen nur die Kovarianz gegenüber linearen Transformationen fordern müssen. Es hat sich herausgestellt, dass man zu vollständig bestimmten Gleichungen geführt wird, wenn man zu diesen Betrachtungen hinzunimmt, dass aus den gesuchten Gleichungen durch Spezialisierung und Approximation die Poisson'sche Gleichung (3) hervorgehen muss. Man findet auf dem angedeuteten Wege die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{\alpha\beta}\, g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right) = \varkappa (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}); \qquad (\sigma, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

Hiebei ist

$$-2\varkappa \cdot \mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g} \left(\sum_{\beta\tau\varrho} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\tau\sigma} \delta_{\sigma\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_{\beta}} \right); \tag{6}$$

$\varkappa$ ist eine der Gravitationskonstanten entsprechende universelle Konstante; $\delta_{\sigma\nu}$ ist 0 oder 1, je nachdem σ und ν verschieden oder gleich sind.

Das Gleichungssystem (5), welches der Gleichung (3) entspricht, lässt erkennen, dass neben den Spannungs-Energie-Komponenten $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ des materiellen Vorganges diejenigen des Gravitationsfeldes (nämlich $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$) als gleichwertige felderregende Ursache auftreten, ein Umstand, der offenbar gefordert werden muss; denn die gravitierende Wirkung eines Systems darf nicht davon abhängen, von welcher physikalischen Art die felderzeugende Energie des Systems ist.

Da nur lineare Substitutionen zulässig sind, sind gewisse ein-, zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten bevorzugt, die man als Gerade, Ebenen und lineare Räume bezeichnen kann.

Durch die skizzierte Theorie wird ein erkenntnistheoretischer Mangel beseitigt, der nicht nur der ursprünglichen Relativitätstheorie, sondern auch der Galilei'schen Mechanik anhaftet und insbesondere von E. Mach betont worden ist. Es ist einleuchtend, dass dem Begriff der Beschleunigung eines materiellen Punktes ebensowenig eine absolute Bedeutung zugeschrieben werden kann wie demjenigen der Geschwindigkeit. Beschleunigung kann nur definiert werden als Relativbeschleunigung eines Punktes gegenüber andern Körpern. Dieser Umstand lässt es als sinnlos erscheinen, einem Körper einen Widerstand gegen eine Beschleunigung schlechthin zuzuschreiben (Trägheitswiderstand der Körper im Sinne der klassischen Mechanik); es wird vielmehr gefordert werden müssen, dass das Auftreten eines Trägheitswiderstandes an die Relativbeschleunigung des betrachteten Körpers gegenüber andern Körpern geknüpft sei. Es muss gefordert werden, dass der Trägheitswiderstand eines Körpers dadurch vergrössert werden könne, dass in der Umgebung des Körpers unbeschleunigte träge Massen angeordnet werden; und es muss diese Erhöhung des Trägheitswiderstandes wieder wegfallen, wenn jene Massen die Beschleunigung des Körpers mitmachen. Es hat sich gezeigt, dass aus den Gleichungen (5) dies Verhalten des Trägheitswiderstandes tatsächlich hervorgeht, welches wir als Relativität der Trägheit bezeichnen können. Dieser Umstand bildet eine der wichtigsten Stützen der skizzierten Theorie.