Aus der Geometrie des endlichen und des unendlich-dimensionalen Raumes.

Von

Paul Nabholz.

Bekanntlich lassen sich die arithmetisch formulierten Sätze der Geometrie des 1, 2 und 3-dimensionalen Raumes widerspruchslos auf den Raum von n Dimensionen übertragen, und die Formeln der analytischen Geometrie des n-dimensionalen Raumes unterscheiden sich von denjenigen des wirklichen Raumes nur darin, dass sie anstatt 1, 2 oder 3 Variable n solche enthalten.[1]) Diese Tatsache mag schon Grassmann bewogen haben, in seiner „linealen Ausdehnungslehre" von 1844 und 1862 rein algebraischen Ausdrücken geometrische Namen wie „extensive Grösse" (Vektor), „Gebiet n-ter Stufe" (linearer Raum), „Abschattung" (Projektion) beizulegen.

Lässt man in den genannten algebraischen Ausdrücken die Anzahl der Variabeln über alle Grenzen wachsen, so gelangt man zur Geometrie des unendlich dimensionalen Raumes.

Wie die Geometrie des linearen n-dimensionalen Raumes zu anschaulichen von Determinanten unabhängigen Methoden zur Behandlung linearer Gleichungen mit n Unbekannten führte, so ergab die Geometrie des linearen unendlich-dimensionalen Raumes entspechende Methoden zur Diskussion linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, welchem Problem sie in erster Linie ihre Ausbildung zu verdanken hat.[2])

Es soll hier ohne ausführliche Beweise an einigen Beispielen gezeigt werden, dass neben einigen bemerkenswerten Sätzen, welche für den unendlich dimensionalen Raum charakter-

---

[1]) Schoute: Mehrdimensionale Geometrie. Sammlung Schubert 1908.

[2]) E Schmidt: Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Rendic. d. Circ. Math. d. Palermo XXV.

Dissertation des Verfassers, Zürich 1910: Geometrische Interpretation linearer Abhängigkeiten und ihre Anwendung auf endliche und unendliche lineare Gleichungssysteme.

istisch sind, dessen Geometrie zu derjenigen des endlich-dimensionalen Raumes grosse Analogien aufweist.

Unter einem Vektor A im n-dimensionalen Raum versteht man ein System von n reellen Zahlen, den Koordinaten $a_1, a_2 \cdots a_n$, und als Länge $|A|$ des Vektors bezeichnet man deren als konvergent vorausgesetzte Quadratsumme in der halben Potenz:

$$(1) \qquad |A| = \sqrt{\sum_{(\nu)} a_\nu^2}$$

(Es ist über alle Koordinaten $a_1 \, a_2 \cdots$ zu summieren).

Eine Menge von Vektoren nennt man „unter sich unabhängig", wenn kein Vektor derselben aus einer endlichen Teilmenge linear-homogen abgeleitet werden kann. Im gewöhnlichen stereometrischen Raum sind beispielsweise drei unter sich unabhängige Vektoren solche, die nicht in einer Ebene liegen und zwei unter sich unabhängige Vektoren solche, die nicht in derselben Geraden liegen.

Ist A ein Vektor, in dessen jeder beliebig kleinen Umgebung ε ein Vektor $A^{(\nu)}$ einer gegebenen Menge liegt, d. h. für welchen für jedes ε ein ν existiert, so dass

$$(2) \qquad |A - A^{(\nu)}| = \sqrt{\sum_{(\nu)} (a_\nu - a_\nu^{(\nu)})^2} < \varepsilon \text{ ist,}$$

so nennt man A einen „Häufungsvektor" der gegebenen Vektorenmenge. Enthält diese keine Häufungsvektoren, so bezeichnet man sie als „absolut unabhängig"[1]), wie es z. B. eine Menge unter sich orthogonaler Vektoren ist.)[2]

Besteht nun die Menge aus der Folge von Vektoren $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots$ und hat diese nur den einen Häufungsvektor A, so nennt man die Folge konvergent und bezeichnet A als ihren Grenzvektor

$$(3) \qquad A = \lim_{\nu = \infty} A^{(\nu)}$$

Es folgt dann aus Gleichung (2), dass die Koordinaten der Vektoren gleichmässig nach den Koordinaten des Grenzvektors konvergieren, d. h. es gibt für jedes ε ein R_ε, so dass

---

[1]) Dissert. d. Verf. pag. 9 und 72.

[2]) Zwei Vektoren $A^{(i)}$ und $A^{(k)}$ sind orthogonal, bedeutet:

$$\sum_{\nu} a_\nu^{(i)} a_\nu^{(k)} = A^{(i)} A^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ |A^{(i)}|^2 & \text{„} \ i = k \end{cases}$$

Diese Summe ist auch für Vektoren mit unendlich vielen Koordinaten endlich, wenn nur deren Längen endlich sind.

(4) $$|a_\nu - a_\nu^{(r)}| < \varepsilon \text{ für jedes } \nu, \text{ wenn } r > R_\varepsilon \text{ ist.}$$

Wollen wir diesen Satz umkehren, so tritt uns ein erster wesentlicher Unterschied zwischen Vektoren mit endlich vielen Koordinaten und solchen mit unendlich vielen entgegen, indem die Gleichung (3) nur im endlich-dimensionalen Raum eine notwendige Folge von Gleichung (4) ist. Ist z. B. $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots$ eine Vektorenfolge, wo der Vektor $A^{(r)}$ die Koordinaten

$$a_\nu^{(r)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_\nu}{\sqrt{r}} & \text{für } \nu \leqq r \\ 0 & \quad " \quad \nu > r \end{cases}$$

hat, so konvergieren diese offenbar mit wachsendem r gleichmässig nach den Koordinaten des Nullvektors Q, während die Entfernungen von $A^{(r)}$ zu Q entgegen Gleichung (2) für jedes r

$$|A^{(r)} - Q| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{r}\left(\frac{\alpha_\nu}{\sqrt{r}}\right)^2} \geqq \alpha \text{ ist, wo } \alpha$$

die kleinste unter den von Null verschieden vorausgesetzten Zahlen α_ν bedeutet.

Eine weitere charakteristische Eigenschaft des unendlich dimensionalen Raumes, die wir hier erwähnen wollen, ergibt sich aus der Betrachtung der „linearen Räume".

Ist eine Vektorenmenge gegeben, so versteht man unter dem „linearen Raum" dieser Menge als Basis: die Gesamtheit der Vektoren, welche aus endlichen Teilmengen linear-homogen abgeleitet werden können samt den Häufungsvektoren der so erhaltenen Menge. Lässt sich der so definierte Raum aus einer endlichen Anzahl von Vektoren ableiten, so nennen wir ihn endlich-, andernfalls unendlich-dimensional. Für jeden endlich-dimensionalen Raum gibt es eine für ihn charakteristische Anzahl (Dimensionszahl) von unter sich unabhängigen Vektoren, aus denen er abgeleitet werden kann.[1]) So sind z. B. die Gerade durch einen, die Ebene durch zwei, und der stereometrische Raum durch drei unter sich unabhängige Vektoren bestimmt.

Bilden die unter sich unabhängigen Vektoren $A_1, A_2, \cdots A_s$ die Basis des s-dimensionalen Raumes $\mathfrak{A}_s$, so hat nach der Definition jeder Vektor A von $\mathfrak{A}_s$ die Form

(5) $$A = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i,$$

[1]) Dissert. d. Verf. p. 30.

welche Gleichung an Stelle der n Gleichungen

$$(5') \qquad a_\nu = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_{i\nu} \text{ für } \nu = 1, 2, \cdots n$$

gesetzt ist.

Ist im besondern $s = 2$ und $n = 3$, so bilden die beiden Vektoren A_1 und A_2 die beiden aneinanderstossenden Seiten des Parallelogramms, welches den Vektor A zur Diagonale hat. Für $s = 3$ können ebenso A_1, A_2 und A_3, die drei von einer Ecke eines Parallelepipeds ausgehenden Kanten gedeutet werden, in welchem A die Körperdiagonale ist.

Auch in dem Falle, wo A ein Grenzvektor von $\mathfrak{A}_s$ ist, kann er als eine solche Diagonale eines s-dimensionalen Parallelepipeds, d. h. in der Form (5) dargestellt werden. Ist nämlich

$$A = \lim_{r=\infty} A^{(r)},$$

so hat jeder Vektor $A^{(r)}$ nach Definition die Form $A^{(r)} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^{(r)} A_i$, wo A_i ($i = 1, 2 \cdots s$ wieder die s Basisvektoren bedeuten. Da s endlich ist, so wird

$$A = \lim_{r=\infty} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^{(r)} A_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i,$$

wo α_i für $\lim \alpha_i^{(r)}$ gesetzt ist, welcher wegen (5′) und (4) existiert.

Diese Verhältnisse gestalten sich nun im unendlich-dimensionalen Raum wesentlich mannigfaltiger. Ist die Basis eine abzählbare, unter sich absolut unabhängige Vektorenmenge, so zerfällt der zugehörige unendlich-dimensionale Raum immer in zwei eindeutig bestimmte Teile, den „innern Raum“, als die Gesamtheit der Vektoren, welcher aus einer endlichen Teilmenge der Basis abgeleitet werden können, und den „Grenzraum“, als die Gesamtheit der Vektoren, die nur als Häufungsvektoren des „innern Raumes“ dargestellt werden können. Es ist nun dem Grenzraum eigen, dass seine Vektoren im allgemeinen nicht mehr als Diagonalen des von den Basisvektoren $A_1, A_2 \cdots$ gebideten Parallelepipedons, d. h. in der Form

$$(\bar{5}) \qquad A = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$$

dargestellt werden können. Sie haben vielmehr die kompliziertere Form

$$(6) \qquad A = \lim_{r=\infty} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(r)} A_i,$$

welche aber immer in die einfachere Form (5) übergeht, wenn die

Basisvektoren unter sich orthogonal sind, oder geometrisch gesprochen, wenn das von den Basisvektoren gebildete Parallelepipedon rechtwinklig ist.

Der Beweis sei hier mitgeteilt, da er Gelegenheit bietet, diejenigen Hauptsätze anzuführen, welche den Geometrien des wirklichen, des n-dimensionalen und des unendlich-dimensionalen Raumes gemeinschaftlich sind.

Ist ein beliebiger linearer Raum $\mathfrak{A}$ und ein Vektor A gegeben, so kann dieser in bezug auf den gegebenen Raum $\mathfrak{A}$ immer in eindeutiger Weise in zwei zu einander orthogonale Komponenten zerlegt werden, von denen die eine A' (Projektion von A) im gegebenen Raum liegt, während die andere P (Perpendikel von A) zu diesem orthogonal ist. Das Verschwinden von P ist dann ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass der Vektor A im gegebenen Raum $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Anderseits ist A von den Vektoren des gegebenen Raumes absolut unabhängig, d. h. er liegt ausserhalb des Raumes, wenn das Perpendikel P von Null verschieden wird.[1])

Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{A}_r$ den r-dimensionalen Raum mit den r ersten Vektoren der absolut unabhängigen Folge $A_1, A_2 \cdots$ als Basis, so kann für jedes r der gegebene Grenzvektor A eindeutig in die Projektion $A^{(r)}$ auf den Raum $\mathfrak{A}_r$ und das zugehörige Perpendikel $P^{(r)}$ zerlegt werden. Es ist namentlich auch

$$A = \lim_{r=\infty} (A^{(r)} + P^{(r)}) \tag{7}$$

die immer mögliche Zerlegung von A in bezug auf den Raum $\mathfrak{A}$.

Da aber A im Raume $\mathfrak{A}$ liegt, so ist notwendig $\lim\limits_{r=\infty} P^{(r)} = 0$ und somit

$$A = \lim_{r=\infty} A^{(r)} \tag{8}$$

Der Vektor $A^{(r)}$ liegt anderseits im Raum $\mathfrak{A}_r$ und hat deshalb die Form

$$A^{(r)} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(r)} A_i = A - P^{(r)}, \tag{9}$$

wo sich die Koeffizienten $\alpha_i^{(r)}$ in eindeutiger Weise folgendermassen bestimmen:

Ist P_k das Perpendikel von $\underset{k \leq r}{A_k}$ auf den Raum $\mathfrak{A}^{(r)}$ mit allen übrigen Vektoren $\underset{i \neq k}{A_i}$ als Basis, so kann dieses wegen der absoluten Unabhängigkeit der Basis für kein k verschwinden, und es ist

[1]) Dissert. d. Verf. p. 36 und 70.

$$P_k A_i = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ P_k^2 \;\; „ \;\; i = k \end{cases}.$$

Multipliziert man daher Gleichung (9) mit P_k, so bleibt noch

$$P_k A^{(r)} = \alpha_k^{(r)} P_k A_k = P_k A - P_k P^{(r)};$$

also wird

$$\alpha_i^{(r)} = \frac{P_i A^{(r)}}{P_i^2} = \frac{P_i A}{P_i^2} - \frac{P_i P^{(r)}}{P_i^2} \text{ für } \left.\begin{matrix} i \\ r \end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots \text{ad inf.} \tag{10}$$

Wegen Gleichung (8) und (9) hat dann A die Form (6)

$$\begin{aligned} A &= \lim_{r=\infty} \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i A^{(r)}}{P_i^2} A_i \\ &= \lim_{r=\infty} \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i A}{P_i^2} A_i - \lim_{r=\infty} \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i P^{(r)}}{P_i^2} A_i. \end{aligned} \tag{11}$$

Von dieser Differenz entspricht nur der Minuend der „Diagonalform" (5), und obwohl im Subtrahenden die einzelnen Koeffizienten $\frac{P_i P^{(r)}}{P_i^2}$ wegen $\lim\limits_{r=\infty} P^{(r)} = 0$ für $r = \infty$ verschwinden, so wird doch der Subtrahend im allgemeinen nicht verschwinden.

Ist dagegen die Basis $A_1, A_2 \cdots$ unter sich orthogonal, so ist offenbar für jedes k das Perpendikel $P_k = A_k$, und da $P^{(r)} \perp A_k$ für $k \leqq r$, so verschwindet $\frac{P_i P^{(r)}}{P_i^2}$ für jedes r und somit auch der Subtrahend von Gleichung (11), so dass in der Tat die Form (6) in die Form (5) übergeht, wenn die Basis aus unter sich orthogonalen Vektoren besteht.

Endlich wollen wir noch den Raum betrachten, welcher jeden beliebigen Vektor enthält und als „Gesamtraum" bezeichnet werden möge. Operieren wir nur mit Vektoren, die n Koordinaten haben, so ist der Gesamtraum einfach der n-dimensionale Raum. Wächst dagegen n über alle Grenzen, so ist nicht mehr jeder unendlich-dimensionale Raum Gesamtraum. Man kann nun aber von jedem vorgelegten unendlich-dimensionalen Raum entscheiden, ob er Gesamtraum ist oder nicht.

Ist nämlich die Folge $A_1, A_2, \cdots$ die Basis des gegebenen Raumes, so lässt sich aus dieser immer eine orthogonale normierte Basis[1]) $B_1, B_2, \cdots$ desselben Raumes ableiten. Die so erhaltene Vektorenfolge B_i mit den

[1]) Die Folge $B_1, B_2, \cdots$ ist orthogonal und normiert, wenn

$$B_i B_k = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \;\; „ \;\; i = k \end{cases} \text{ ist.}$$

Koordinaten $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \cdots$ für $i = 1, 2, \cdots$ ad inf. bildet nun dann und nur dann eine Basis des Gesamtraumes, wenn die sämtlichen Vektoren der Folge $\overline{B}_k$ mit den Koordinaten $\overline{b}_{k1} = b_{1k}, \overline{b}_{k2} = b_{2k}, \overline{b}_{k3} = b_{3k} \cdots$ ad inf. für $k = 1, 2, \cdots$ ad inf. die Länge eins haben. Zudem hat sich noch gezeigt, dass die beiden Folgen $B_1, B_2, \cdots$ und $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \cdots$ immer gleichzeitig eine orthogonale und normierte Basis des Gesamtraumes bilden.[1])

[1]) Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie, p. 418 und Dissert. d. Verf. p. 76.