Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion.

Von

EDMUND LANDAU in Göttingen.

Einleitung.

Es bezeichne $\zeta(s)$ die Riemannsche Funktion. Riemann[1]) hat bewiesen:

1. *Es ist* $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ *eine ganze Funktion.*

2. *Es hat* $\zeta(s)$ *für* $s = -2m$, *wo* m *ganz und* $\geqq 1$ *ist, eine Nullstelle erster Ordnung.*

3. *Alle anderen etwaigen Nullstellen von* $\zeta(s)$ *sind nicht reell und gehören dem Streifen* $0 \leqq \Re(s) = \sigma \leqq 1$ *an.*

4. *Die ganze Funktion*

$$(1) \qquad \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = F(s)$$

genügt der Funktionalgleichung

$$(2) \qquad F(1-s) = F(s),$$

so dass $F(s)$ *eine ganze Funktion von* $\left(s - \frac{1}{2}\right)^2$ *ist.*

Die etwaigen Nullstellen von $F(s)$ stimmen infolgedessen mit den im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$ überein.

Es werde stets $s = \sigma + ti$ gesetzt. Es bezeichne $N(T)$ für $T > 0$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$, d. h. $F(s)$ im Rechteck $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$, mehrfache selbstverständlich in ihrer Vielfachheit gezählt.

Es sei a irgend eine feste Zahl > 1, b irgend eine feste Zahl < 0. Die Ordinate T sei von Nullstellen frei. Es bezeichne $\log \zeta(s)$ bezw. $\log F(s)$ zunächst den in der Halbebene $\sigma > 1$ regulären Zweig, der für $s > 1$ reell ist, und weiterhin das, was bei Fortsetzung längs der Ordinate T entsteht; hierbei werde

---

[1]) **1** in der Numerierung meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* (Leipzig und Berlin, 1909.)

$$\Im \log \zeta(s) = \operatorname{arc} \zeta(s), \Im \log F(s) = \operatorname{arc} F(s)$$

geschrieben. Schon bevor Stieltjes[1]) seine (für den vorliegenden Zweck noch viel zu feinen) Untersuchungen über die Abschätzung von $\log \Gamma(s)$ für komplexe s angestellt hatte, war es ein Leichtes, aus den oben zusammengestellten Eigenschaften von $\zeta(s)$ jede der sechs Relationen zu beweisen:

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi} T + O(1) + M(T), \tag{3}$$

wo $M(T)$ eine beliebige der sechs Bedeutungen hat:

$$\frac{1}{2\pi} \Im \int_{a+Ti}^{b+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds; \frac{1}{\pi} \Im \int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds; \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc} \zeta(b+Ti); \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right);$$

$$\frac{1}{2\pi} \Im \int_{a+Ti}^{b+Ti} \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc} F(b+Ti) - \operatorname{arc} F(a+Ti)\right);$$

$$\frac{1}{\pi} \Im \int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc} F\left(\frac{1}{2}+Ti\right) - \operatorname{arc} F(a+Ti)\right).$$

Dabei zeigt sich natürlich eo ipso, dass je zwei dieser sechs Funktionen sich nur um $O(1)$ unterscheiden.

Es ist nun Herrn von Mangoldt[2]) zuerst gelungen, für eine (d. h. jede) dieser sechs Funktionen

$$M(T) = O(\log^2 T) \tag{4}$$

zu beweisen. Dabei war eine wesentliche Grundlage seiner Schlüsse

---

[1]) Vergl. seine Arbeiten *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Ser. III, Bd. III (1886), S. 201—258: auch als Thèse erschienen] und *Sur le développement de* $\log \Gamma(a)$ [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. IV, Bd. V (1889), S. 425—444]. Doch würden für meinen Zweck auch die älteren Lipschitzschen Resultate reichlich genügen: vergl. seine Arbeit *Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die Eulersche Summenformel* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LVI (1859), S. 11—26]. Wie gesagt, ist (3) u. a. eine leichte Folge aus den Stieltjesschen Sätzen über die Gammafunktion. Daher war es nicht wunderbar, dass ein vor wenigen Jahren veröffentlichter Brief von Stieltjes an Herrn Mittag-Leffler vom 23. 3. 1887 (**4**, Bd. 2, S. 446—447 und 452—457) zeigte, dass Stieltjes im Besitz der Relation (3) war. Übrigens war (3) vordem schon von Herrn Piltz (**2**, S. 25—26) bewiesen worden.

[2]) **2.** Stieltjes konnte weder (4) noch eine weniger gute brauchbare Formel über $M(T)$ beweisen, sondern drückt sich in dem genannten Briefe sehr vorsichtig und korrekt so aus: „En admettant donc que l'on puisse négliger var. arg. $f(s)$

die kurz vorher gemachte berühmte Hadamardsche[1]) Entdeckung:

$F(s)$ hat unendlich viele Nullstellen, und (in heutiger Ausdrucksweise) *$F(s)$ hat als Funktion von $\left(s-\frac{1}{2}\right)^2$ das Geschlecht* 0. Anders formuliert: *Es ist*

$$(s-1)\zeta(s)=\frac{1}{2}\,e^{bs}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\,\prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}}, \tag{5}$$

wo ϱ die Wurzeln im Streifen $0\leqq\sigma\leqq 1$ bei beliebiger Anordnung durchläuft; b ist eine Konstante.

Mit (4) hatte Herr von Mangoldt bewiesen:

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T+O(\log^2 T); \tag{6}$$

aus dem soeben Gesagten folgt (6) zwar zunächst nur für wurzelfrei wachsendes T, damit aber eo ipso auch für stetig wachsendes T.

Später gelang es Herrn von Mangoldt[2]) durch Hinzufügung weiterer feiner Kunstgriffe, sogar

$$M(T)=O(\log T) \tag{7}$$

zu beweisen und damit für stetig wachsendes T die Relation

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T+O(\log T). \tag{8}$$

Noch später gelang es mir[3]), diesen Beweis von (7) und (8) zu vereinfachen; den Hadamardschen Satz verwende ich jedoch auch als Hauptstütze aller meiner Schlüsse, wie Herr von Mangoldt es tat.

Nun fiel zwischen beide von Mangoldtschen Abhandlungen das Erscheinen einer Arbeit von Herrn Franel[4]) in dieser Vierteljahrsschrift (1896). In Nr. II jener Arbeit will der Verfasser — in der

---

[obiges $F(s)$] sur FA' [F ist obiges $a+Ti$ für $a=2$, A' ist obiges $\frac{1}{2}+Ti$], on a, approximativement,

. . . .

Quant à l'approximation de cette expression, pour la juger, il faudrait avoir une idée de la grandeur de

var. arg. $f(s)$ sur FA',

. . . .

Je crois me rappeler que j'ai fait quelques efforts dans cette direction, qui n'ont pas été tout à fait stériles, mais je ne saurais préciser en ce moment sans étudier d'abord les notes que j'ai prises sur ce sujet."

[1]) 1.
[2]) 7.
[3]) 44.
[4]) 4.

Absicht, einen Gedankengang, der Riemann vorgelegen habe, wiederherzustellen — gewissermassen den umgekehrten Weg gehen als Herr von Mangoldt. Herr Franel will erst direkt $N(T)$ abschätzen, ohne den Hadamardschen Satz zu benutzen; er verwendet dann die Abschätzung von $N(T)$ als wesentliche Stütze zur Herleitung des Hadamardschen Satzes. Hierzu beweist Herr Franel zunächst (3) in einer der sechs gleichwertigen Gestalten, nämlich mit

$$M(T)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc} F\left(\frac{1}{2}+Ti\right)-\operatorname{arc} F(a+Ti)\right).$$

Dann sagt er wörtlich[1]): „On peut démontrer que l'accroissement éprouvé par l'argument de $F(s)$ lorsqu'on décrit le segment rectiligne BH reste, quelque soit h, inférieur à une grandeur fixe.“ h ist mein T, B mein $a+Ti$, H mein $\frac{1}{2}+Ti$. Herr Franel sagt also, man könne

$$M(T)=O(1) \tag{9}$$

beweisen; er sagt dies ohne weitere Begründung und schliesst dann aus (3)

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T+O(1), \tag{10}$$

worauf er alles weitere basiert. Und in der Untersuchung des Verhaltens von $\operatorname{arc} F(s)$ auf jener horizontalen Strecke, worüber Herr Franel mit den oben zitierten Worten hinweggleitet, liegt die ganze Schwierigkeit! Bis heute kenne ich auch für die durch Herrn von Mangoldt sichergestellte Relation

$$M(T)=O(\log T), \tag{7}$$

ja sogar für seine ältere Relation (4) nur solche Beweisanordnungen, welche sich wesentlich auf den Hadamardschen Satz stützen.

Ist nun Herrn Franels Relation (9) richtig oder falsch? Ich weiss es nicht. Wohl aber weiss ich auf Grund eines Satzes in einer Arbeit[2]) von Herrn Bohr und mir, dass (9), d. h. (10) in Widerspruch mit der Riemannschen Vermutung

$$\zeta(s)\neq 0 \text{ für } \sigma>\frac{1}{2} \tag{11}$$

steht. Dies auseinanderzusetzen ist der Hauptzweck der gegenwärtigen Abhandlung.

---

[1]) S. 11, Z. 5—3 v. u.

[2]) *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma=1$* [Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, S. 303—330].

Das Merkwürdige ist, dass Herr Franel im weiteren Verlaufe seiner Abhandlung Schlüsse unter der Voraussetzung zieht, dass die Riemannsche Vermutung richtig ist. Die Voraussetzungen, die er von S. 12 seiner Abhandlung an zugrunde legt, nämlich 1. die Tatsache (10), die allerdings bei ihm keine Hypothese, sondern das Resultat einer dem Leser nicht mitgeteilten Beweisführung ist, 2. die Vermutung (11) — stehen also mit einander in Widerspruch. (10) oder (11) oder beides ist also falsch. Was davon falsch ist, weiss ich nicht.

Wenn also Herr Franel sich endlich nach 15 Jahren entschliesst, seinen damaligen Beweis von (9), d. h. (10) bekannt zu geben, und wenn dieser Beweis richtig ist, so wird Herr Franel damit das grosse Verdienst erworben haben, das berühmte Riemannsche Problem („Ist (11) richtig oder falsch?") gelöst zu haben, und zwar in negativem Sinne.

Im § 1 des Folgenden beweise ich bekannte Hilfssätze über die Gammafunktion und im § 2 die bekannte Relation (3). Wenn ich mich auch, wo irgend möglich, zur Vermeidung von Wiederholungen auf mein Handbuch beziehe, so habe ich doch in diesem Buch mit Absicht jene Sätze über $\Gamma(s)$ und die Relation (3) nicht entwickelt, sondern, da über $M(T)$ doch nur (7) bekannt ist, an Stelle von (3) bloss

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T+O(\log T)+M(T)$$

bewiesen. Daher die Notwendigkeit, hier mit jenen §§ 1—2 zu beginnen.

Im § 3 beweise ich, dass zwischen

$$M(T)=O(1) \tag{9}$$

einerseits, d. h. (10) einerseits und der Riemannschen Vermutung (11) andererseits ein Widerspruch besteht. Es ergibt sich nämlich aus (9) in Verbindung mit (11), dass bei festem $\delta>0$ die Funktion $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ für $\sigma>\frac{1}{2}+\delta$ beschränkt ist; dies (dass nämlich aus (9) und (11) die Beschränktheit dieser Funktion folgt) habe ich zuerst aus einem Briefe Herrn Franels an Herrn von Koch vom 16. 2. 1901 gelernt, den beide Herren mir freundlichst im Oktober 1903 zur Verfügung gestellt hatten und den ich hier mit ihrer Zustimmung erwähne. Ich gebe im § 3 zunächst den Franelschen Beweis und dann im § 4 einen anderen, der mehr in meinen üblichen Geleisen verläuft. Also aus (9) und (11) folgt die Beschränktheit von $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ für $\sigma>\frac{1}{2}+\delta$. Andererseits hat Herr Bohr[1]) bewiesen,

[1]) Vergl. § 1 unserer oben erwähnten Abhandlung.

dass $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ sogar für $\sigma > 1$ nicht beschränkt ist. Daher besteht zwischen (9) und (11) ein Widerspruch.

Im § 4 beweise ich übrigens, dass aus der Richtigkeit von (11) sogar folgt: $M(T)$ hat seinen $\limsup\limits_{T=\infty} = \infty$ und seinen $\liminf\limits_{T=\infty} = -\infty$.

Im § 5 erinnere ich an einen Hilfssatz von Herrn Bohr und mir.

Im § 6 beweise ich, dass bereits

$$M(T) = o(\log\log T),$$

d. h.

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi} T + o(\log\log T)$$

der Riemannschen Vermutung widerspricht.

Ich beweise dort ferner, dass sogar die Relation

$$\limsup_{T=\infty} \frac{M(T)}{\log\log T} < 0$$

der Riemannschen Vermutung widerspricht. Desgleichen die Relation

$$\liminf_{T=\infty} \frac{M(T)}{\log\log T} \geqq 0.$$

Wenn also die Riemannsche Vermutung richtig ist, so ist der Quotient

$$\frac{N(T) - \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi} T}{\log\log T}$$

bei jedem festen hinreichend kleinen positiven δ immer wieder einmal $> \delta$ und immer wieder einmal $< -\delta$.

§ 1.

Hilfssatz 1: *Es seien σ_0 und $\sigma_1 > \sigma_0$ fest. Dann ist für $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$ gleichmässig*

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log t + O(1).$$

Beweis: Wegen

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s),$$

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

braucht die Behauptung nur fürs Intervall $0 < \sigma \leqq 1$ bewiesen zu werden.

Nun ist in der ganzen Ebene

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}\right), \tag{12}$$

also für $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $t > 0$

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)} = \frac{1}{ti} - \frac{1}{\sigma + ti} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+ti} - \frac{1}{n+\sigma+ti}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{ti(\sigma+ti)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma}{(n+ti)(n+\sigma+ti)},$$

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right| \leqq \frac{1}{t\cdot t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n} = O(1).$$

Daher braucht die Behauptung nur für die eine Abszisse $\sigma = 0$ bewiesen zu werden und lautet

$$\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)} = \log t + O(1). \tag{13}$$

Nach (12) ist

$$\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)} = O(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+ti}\right)$$

$$= O(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+t^2}\right) + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{n^2+t^2}. \tag{14}$$

Hierin ist für $t > 0$ die letzte Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{n^2+t^2} < \int_0^{\infty}\frac{t\,du}{u^2+t^2} = \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{t}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} = O(1);$$

die erste Summe rechts in (14) ist, da die Funktion

$$\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+t^2} = \frac{t^2}{u(u^2+t^2)}$$

mit wachsendem $u > 0$ abnimmt,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+t^2}\right) = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+t^2}\right)du + O(1)$$

$$= \left[\log u - \frac{1}{2}\log(u^2+t^2)\right]_1^{\infty} + O(1) = \log t + O(1).$$

Aus (14) folgt daher (13) und somit der Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2: *Es bezeichne* $\log \Gamma(s)$ *den in der von* 0 *bis* $-\infty$ *(längs der reellen Achse) aufgeschnittenen Ebene eindeutigen Zweig, der für* $s > 0$ *reell ist; d. h. es sei*

(15).

$$\operatorname{arc} \Gamma(s) = \Im \log \Gamma(s) = \Im\left(-Cs - \log s + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s}{n} - \log\left(1+\frac{s}{n}\right)\right)\right),$$

wo die Logarithmen rechts ihren imaginären Teil zwischen $-\pi$ *und* π *haben. Es seien* σ_0 *und* $\sigma_1 > \sigma_0$ *fest. Dann ist für* $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$ *gleichmässig*

$$\operatorname{arc} \Gamma(s) = t \log t - t + O(1). \tag{16}$$

Beweis: Nach Hilfssatz 1 (der übrigens hier nicht in vollem Umfang zur Anwendung kommt) ist es nur erforderlich,

$$\operatorname{arc} \Gamma(ti) = t \log t - t + O(1) \tag{17}$$

zu beweisen; denn aus Hilfssatz 1 folgt bei festen σ_0, $\sigma_1 > \sigma_0$ für $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$ gleichmässig

$$\operatorname{arc}\Gamma(\sigma+ti) - \operatorname{arc}\Gamma(ti) = \Im \int_{ti}^{\sigma+ti} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\, ds = \Im \int_{ti}^{\sigma+ti}\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \log t\right) ds = O(1),$$

d. h. (16).

Nun ist nach (15) für $t > 0$

$$\operatorname{arc} \Gamma(ti) = -Ct - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{n}\right),$$

wo arc tg den Wert zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet. Anders geschrieben:

$$\operatorname{arc} \Gamma(ti) = -t \lim_{m=\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \log m\right) - \frac{\pi}{2} + \lim_{m=\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{t}{n} - \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{n}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \lim_{m=\infty}\left(t \log m - \sum_{n=1}^{m} \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{n}\right). \tag{18}$$

Da nun die Funktion $\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{n}$ mit wachsendem positiven n beständig abnimmt, ist für ganze $m \geqq 1$

$$\int_0^m \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}\, du - \frac{\pi}{2} < \int_1^m \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}\, du < \sum_{n=1}^{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{n} < \int_0^m \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}\, du,$$

also

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{n} - \int_0^m \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}\, du\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Nun ist

$$\int^m \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}\,d\,u = \left[u \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u} + \frac{t}{2}\log(t^2+u^2)\right]_{u=0}^{u=m}$$

$$= m \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{m} + \frac{t}{2}\log(t^2+m^2) - t\log t,$$

(20) $$\lim_{m=\infty}\left(t\log m - \int_0^m \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}\,d\,u\right) = t\log t - t.$$

Nach (18), (19) und (20) ist

$$\left|\lim_{m=\infty}\left(t\log m - \sum_{n=1}^{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{n}\right) - (t\log t - t)\right| \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{m=\infty}\left(t\log m - \sum_{n=1}^{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{n}\right) = t\log t - t + O(1),$$

$$\operatorname{arc}\Gamma(t\,i) = t\log t - t + O(1),$$

womit (17), d. h. der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

§ 2.

Beweis von (3): Es sei $T>0$ und auf der Geraden $t=T$ keine Nullstelle von $\zeta(s)$ gelegen. Es sei $a>1$. Dann ist bei geraden Integrationswegen

(21) $$\begin{cases} 2\pi N(T) = \Im\displaystyle\int_{1-a}^{a}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s + \Im\int_{a}^{a+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s + \Im\int_{a+Ti}^{1-a+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s \\ \qquad\qquad + \Im\displaystyle\int_{1-a+Ti}^{1-a}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s; \end{cases}$$

es wurde also über ein gewisses Rechteck in positivem Sinne integriert.

Nach (2) ist

$$\frac{F'(1-s)}{F(1-s)} = -\frac{F'(s)}{F(s)};$$

wenn überdies berücksichtigt wird, dass $F(s)$ für konjugiert komplexe s konjugierte Werte annimmt, erkennt man, dass

$$\Im\int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s = -\Im\int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{F'(1-s)}{F(1-s)}\,d\,s = -\Im\int_{\frac{1}{2}-Ti}^{1-a-Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s = \Im\int_{\frac{1}{2}+Ti}^{1-a+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s$$

und

$$\Im\int_{a}^{a+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s = -\Im\int_{a}^{a+Ti}\frac{F'(1-s)}{F(1-s)}\,d\,s = -\Im\int_{1-a-Ti}^{1-a}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s = \Im\int_{1-a+Ti}^{1-a}\frac{F'(s)}{F(s)}\,d\,s$$

ist; ferner ist $F(s)$ für reelle s reell und daher

$$\Im \int_{1-a}^{a} \frac{F'(s)}{F(s)}\, d\, s = 0\,.$$

(21) transformiert sich also in

$$2\,\pi\, N(T) = 2\,\Im \int_{a}^{a+Ti} \frac{F'(s)}{F(s)}\, d\, s + 2\,\Im \int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{F'(s)}{F(s)}\, d\, s\,,$$

(22)

$$\pi\, N(T) = \operatorname{arc} F(a + T i) + \left(\operatorname{arc} F\left(\tfrac{1}{2} + T i\right) - \operatorname{arc} F(a + T i)\right).$$

Nun ist nach (1)

(23)

$$\operatorname{arc} F(s) = \operatorname{arc} s + \operatorname{arc} (s - 1) + \operatorname{arc} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{t}{2} \log \pi + \operatorname{arc} \zeta(s)\,;$$

mit Rücksicht auf

$$|\operatorname{arc} \zeta(s)| = |\Im \log \zeta(s)| \leqq |\log \zeta(s)|$$

ist bei wachsendem T

$$\operatorname{arc} \zeta(a + T i) = O(1)\,;$$

in Verbindung mit dem Hilfssatz 2 (der hier nur für eine feste Abszisse zur Anwendung kommt) ist daher

$$\operatorname{arc} F(a + T i) = O(1) + O(1) + \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \log \pi + O(1)$$

(24)

$$= \frac{1}{2}\, T \log T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2}\, T + O(1).$$

Aus (22) und (24) folgt

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\, T \log T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi}\, T + O(1) + M(T),$$

wo

$$M(T) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc} F\left(\frac{1}{2} + T i\right) - \operatorname{arc} F(a + T i)\right) = \frac{1}{\pi}\, \Im \int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{F'(s)}{F(s)}\, d\, s$$

ist.

Das ist eine der sechs Formen der Relation (3). Um zunächst die andere Form mit $F(s)$ zu entwickeln, sei $a > 1$ und $b < 0$ gegeben. Dann ist nach dem soeben Bewiesenen, wenn es sowohl auf a als auch auf $1 - b$ an Stelle des obigen a angewendet wird,

$$N(T)-\left(\frac{1}{2\pi}T\log T+\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T\right)=\frac{1}{\pi}\mathfrak{J}\int\limits_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}ds+O(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathfrak{J}\int\limits_{1-b+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}ds+O(1)=\frac{1}{2\pi}\mathfrak{J}\left(\int\limits_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}ds+\int\limits_{1-b+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}ds\right)+O(1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathfrak{J}\left(\int\limits_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}ds+\int\limits_{\frac{1}{2}+Ti}^{b+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}ds\right)+O(1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathfrak{J}\int\limits_{a+Ti}^{b+Ti}\frac{F'(s)}{F(s)}ds+O(1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\operatorname{arc}F(b+Ti)-\operatorname{arc}F(a+Ti)\Big)+O(1).$$

Um auch die vier Gestalten von (3) mit $\zeta(s)$ statt $F(s)$ zu beweisen, ist nur zu berücksichtigen, dass für festes σ_0 nebst festem $\sigma_1>\sigma_0$ nach (23) und dem Hilfssatz 2

$$\operatorname{arc}F(\sigma_0+Ti)-\operatorname{arc}F(\sigma_1+Ti)=O(1)+\operatorname{arc}\zeta(\sigma_0+Ti)-\operatorname{arc}\zeta(\sigma_1+Ti)$$

ist. Dies liefert unmittelbar

$$N(T)-\left(\frac{1}{2\pi}T\log T+\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)-\operatorname{arc}\zeta(a+Ti)\right)+O(1)=\frac{1}{\pi}\mathfrak{J}\int\limits_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds+O(1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\operatorname{arc}\zeta(b+Ti)-\operatorname{arc}\zeta(a+Ti)\Big)+O(1)=\frac{1}{2\pi}\mathfrak{J}\int\limits_{a+Ti}^{b+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds+O(1),$$

und in den beiden Formeln mit $\operatorname{arc}\zeta(a+Ti)$ kann dies Glied noch gegen $O(1)$ vernachlässigt werden.

Damit sind alle in der Einleitung angegebenen Gestalten von (3) bewiesen.

§ 3.

Satz: *Wenn die (nach Herrn Franel angeblich richtige) Relation*

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T+O(1) \tag{10}$$

gilt, so ist die Riemannsche Vermutung

$$\zeta(s)\neq 0 \text{ für } \sigma>\frac{1}{2} \tag{11}$$

falsch.

Beweis: Es werde die Giltigkeit von (10) und (11) vorausgesetzt. Daraus wird sich ein Widerspruch ergeben.

Nach (5) ist

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right);$$

also ist nach Hilfssatz 1 bei festem $\delta > 0$ für $\frac{1}{2}+\delta \leqq \sigma \leqq 1+\delta$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{1}{2}\log t + O(1).$$

Die ϱ haben nach (11) die Gestalt $\frac{1}{2} \pm \alpha_n i$, wo $0 < \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \cdots$ ist; daher ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha_n i} + \frac{1}{s-\frac{1}{2}+\alpha_n i} + \frac{1}{\frac{1}{2}+\alpha_n i} + \frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha_n i}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha_n i} + \frac{1}{s-\frac{1}{2}+\alpha_n i}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha_n^2}\\
&= (2s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_n^2} + c = (2s-1)\psi(s) + c,
\end{aligned}$$

wo

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_n^2}$$

gesetzt ist. Für $\frac{1}{2}+\delta \leqq \sigma \leqq 1+\delta$ ist daher

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (2s-1)\psi(s) - \frac{1}{2}\log t + O(1). \tag{25}$$

Nun ist, wenn $N(\alpha_0)$ den Wert 0 bedeutet,

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N(\alpha_n)-N(\alpha_{n-1})}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_n^2},$$

wie eine einfache (aber mit Rücksicht auf den Fall mehrfacher α nötige) Überlegung zeigt. Mit Rücksicht auf die (z. B. nach (10) reichlich erfüllte) Relation

$$\lim_{n=\infty}\frac{N(\alpha_n)}{\alpha_n^2} = 0$$

ist

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} N(\alpha_n)\left(\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_n^2} - \frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_{n+1}^2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} N(\alpha_n)\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{2u}{\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right)^2}\,du = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{2N(u)\,u}{\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right)^2}\,du$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{2N(u)\,u}{\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right)^2}\,du = \int_{0}^{\infty} \frac{2N(u)\,u}{\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right)^2}\,du\,.$$

Nach (10) folgt hieraus, immer $\frac{1}{2}+\delta \leqq \sigma \leqq 1+\delta$ und wachsendes t angenommen,

$$(26)\quad \psi(s) = \int_0^{\infty} \frac{2u\left(\frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi} - \frac{u}{2\pi}\right)}{\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right)^2}\,du + O\int_0^{\infty}\frac{2u\,du}{\left|\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right|^2}\,.$$

Das Schlussglied in (26) ist $O\left(\frac{1}{t}\right)$ wegen

$$\int_0^{\infty}\frac{2u\,du}{\left|\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right|^2} = \int_0^{\infty}\frac{dv}{\left|\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+v\right|^2}$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{dv}{\left|\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)t\,i-t^2+v\right|^2} = \int_0^{\infty}\frac{dv}{\left(\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2-t^2+v\right)^2+4\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2t^2}$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{\left(\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2-t^2+v\right)^2+4\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2t^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw}{w^2+4\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2t^2}$$

$$= \frac{1}{2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2+1} = \frac{\pi}{2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)t} \leqq \frac{\pi}{2\,\delta\,t}\,.$$

Das Hauptglied in (26) ist

$$\int_0^{\infty}\frac{2u\left(\frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi}-\frac{u}{2\pi}\right)}{\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\right)^2}\,du$$

$$= \left[-\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2}\left(\frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi}-\frac{u}{2\pi}\right)\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2}\,du$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+u^2}\,du\,.$$

Es darf statt über die positive reelle Achse über den Strahl $u = \left(s - \frac{1}{2}\right) v$ $(v \geqq 0)$ von $v = 0$ bis $v = \infty$ integriert werden; denn nach einer vorläufigen Anwendung des Cauchyschen Satzes auf das Gebiet, welches aus jenem Winkelraum durch zwei Kreisbogen mit den Radien r und $R > r$ ausgeschnitten wird, ersieht man, dass der Beitrag des ersteren Kreisbogens für $r = 0$ den Limes 0 hat, der des zweiten für $R = \infty$ den Limes 0 hat.[1])

Jenes Hauptglied ist also

$$= \int_0^{\left(s - \frac{1}{2}\right)\infty} \frac{\frac{1}{2\pi} \log \frac{u}{2\pi}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + u^2} \, du,$$

folglich, wenn durch die Substitution $u = \left(s - \frac{1}{2}\right) v$ die Variable wieder reell gemacht wird,

$$= \frac{1}{s - \frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2\pi} \log \left(\left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\pi}\right)}{1 + v^2} \, dv + \frac{1}{s - \frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2\pi} \log v}{1 + v^2} \, dv$$

$$= \frac{1}{s - \frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \log\left(\left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{s - \frac{1}{2}} \cdot 0 = \frac{1}{s - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \log t + O(1)\right)$$

$$= \frac{1}{2(2s-1)} \log t + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Daher kommt heraus:

$$\psi(s) = \frac{1}{2(2s-1)} \log t + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

also nach (25)

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} \log t + O(1) - \frac{1}{2} \log t + O(1) = O(1), \tag{27}$$

für $\frac{1}{2} + \delta \leqq \sigma \leqq 1 + \delta$.

Andererseits ist für $\sigma \geqq 1 + \delta$ bekanntermassen

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1).$$

Also kommt für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1) \tag{28}$$

heraus.

---

[1]) In der Tat ist die Weglänge $< \frac{\pi}{2} r$ bezw. $\frac{\pi}{2} R$ und der absolute Betrag des Integranden für $r < \frac{1}{2}$ kleiner als $c' \log \frac{1}{r}$ bezw. für $R > 2$ kleiner als $c'' \frac{\log R}{R^2}$.

Den vorstehenden Beweis, dass (28) aus (10) und (11) folgt, verdanke ich Herrn Franel; dies stand in dem Briefe, auf welchen ich in der Einleitung angespielt habe.

Nun folgt bei festem $\delta > 0$ für $\frac{1}{2} + \delta \leqq \sigma \leqq 1 + \delta$ aus (27)

$$\left|\log \zeta(s)\right| = \left|\log \zeta(1+\delta+ti) + \int\limits_{1+\delta+ti}^{s} \frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}\, du\right|$$

$$\leqq \log \zeta(1+\delta) + O(1) = O(1),$$

$$\left|\zeta(s)\right| = e^{\Re \log \zeta(s)} \leqq e^{|\log \zeta(s)|} = O(1).$$

Also ist für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$

(29) $$\zeta(s) = O(1).$$

Andererseits hat Herr Bohr[1]) bewiesen, dass $\zeta(s)$ für $\sigma > 1$ nicht $O(1)$ ist. Man kommt also zu einem Widerspruch, und der am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz ist bewiesen. Ohne das Zeichen O ausgedrückt: Nach (29) ist für $\sigma \geqq 1, t \geqq 1$

(30) $$|\zeta(s)| < K,$$

wo K eine absolute Konstante ist, und Herr Bohr hatte genau das Gegenteil von (30) bewiesen.

Übrigens ist der obige Endübergang von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ zu $\zeta(s)$ für die Aufdeckung des Widerspruches nicht nötig, wenn an Stelle jenes Bohrschen Satzes der ebenso bewiesene Satz VIII jener Arbeit benutzt wird, nach welchem eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

deren Koeffizienten $\geqq 0$ sind, falls sie für $s = \eta$ divergiert und für $s > \eta$ konvergiert, in der Viertelebene $\sigma > \eta$, $t \geqq 1$ nicht beschränkt ist.

§ 4.

Für den in § 3 bewiesenen Satz will ich nun einen anderen Beweis geben, gleichfalls dadurch, dass ich einen Widerspruch zwischen (10), (11) und dem Satze von Herrn Bohr aufdecke. Diese andere Beweismethode schliesst sich meinen üblichen Beweisanordnungen an (sie benutzt neuere fundamentale Sätze der Funktionentheorie und vermeidet dadurch fast alle Rechnungen) und soll auch in diesen Schlussparagraphen allein verwendet werden.

[1]) Vergl. § 1 der erwähnten Abhandlung.

Um zugleich mit dem Satz des § 3 auch etwas Neues zu beweisen, wende ich mich gleich zum allgemeineren

Satz: *Es sei entweder der* $\limsup_{T=\infty}$ *des Ausdrucks*

$$N(T)-\left(\frac{1}{2\pi}T\log T+\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T\right) \tag{31}$$

nicht $+\infty$ *oder der* $\liminf_{T=\infty}$ *nicht* $-\infty$. *Dann ist die Riemannsche Vermutung*

$$\zeta(s)\neq 0 \text{ für } \sigma>\frac{1}{2} \tag{11}$$

falsch.

Vorbemerkung: Im § 3 war angenommen, dass beide Unbestimmtheitsgrenzen endlich sind, d. h. dass zugleich der $\limsup_{T=\infty}$ nicht $+\infty$ und der $\liminf_{T=\infty}$ nicht $-\infty$ ist. Der jetzige Satz besagt also mehr.

Beweis: Nach (3) ist für wurzelfrei wachsendes T

$$N(T)-\left(\frac{1}{2\pi}T\log T+\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T\right)-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)=O(1).$$

Nach Voraussetzung hat (31) seinen lim sup $<+\infty$ bezw.[1]) seinen lim inf $>-\infty$; daher hat für wurzelfrei wachsendes T die Funktion $\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)$ ihren lim sup $<\infty$ bezw. ihren lim inf $>-\infty$. Es gibt also ein positives b und ein positives A_1 derart, dass für wurzelfreies $T>b$

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)<A_1 \text{ bezw. } -\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)<A_1$$

ist. Für die wurzelfreien T der Strecke $0<T\leqq b$ ist sogar offenbar[2])

$$\left|\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)\right|<A_2.$$

[1]) Um nicht zwei Beweise zu führen, behandle ich gleichzeitig beide Fälle. Die Einfügung des Wortes „bezw." an allen in Betracht kommenden Stellen verhindert ein Missverständnis.

[2]) In der Tat mögen dem Ordinatenintervall $0<t\leqq b$ die Nullstellen $\varrho_1,\cdots,\varrho_n$ angehören; dann ist die Funktion

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-\varrho_1}-\cdots-\frac{1}{s-\varrho_n}$$

für $\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 2, 0\leqq t\leqq b$ regulär, also beschränkt; für wurzelfreies T des Intervalls $0<T\leqq b$ ist daher

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)=\Im\int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds+\operatorname{arc}\zeta(2+Ti)$$

beschränkt, da ja n fest ist.

Für alle wurzelfreien $T > 0$ ist daher

(32) $$\arc\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right) \leqq A_3 \text{ bezw.} -\arc\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right) \leqq A_3 .$$

Nun wird (11) angenommen; jede Wurzel mit positiver Ordinate hat also die Gestalt $\frac{1}{2}+T_0 i$, und $\log\zeta(s)$ ist für $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 0$ regulär. Ich verstehe unter $\arc\zeta(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 0$ den imaginären Teil dieses Zweiges $\log\zeta(s)$ und[1]) unter $\arc\zeta\left(\frac{1}{2}+T_0 i\right)$ den Limes von $\arc\zeta\left(\frac{1}{2}+\delta+T_0 i\right)$ bei zu 0 abnehmendem positiven δ. Dann ist ersichtlich, dass (32) auch für die $T = T_0$ gilt. Denn es ist ja, wenn ein T_0 mit der Vielfachheit ν vorliegt, bei zu 0 abnehmendem positiven ε

$$\lim_{\varepsilon=0} \arc\zeta\left(\frac{1}{2}+(T_0+\varepsilon)\,i\right) = \arc\zeta\left(\frac{1}{2}+T_0 i\right)+\frac{\nu\pi}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \arc\zeta\left(\frac{1}{2}+(T_0-\varepsilon)\,i\right) = \arc\zeta\left(\frac{1}{2}+T_0 i\right)-\frac{\nu\pi}{2},$$

also

(33) $$\arc\zeta\left(\frac{1}{2}+T_0 i\right) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\arc\zeta\left(\frac{1}{2}+(T_0+\varepsilon)\,i\right)+\arc\zeta\left(\frac{1}{2}+(T_0-\varepsilon)\,i\right)}{2}.$$

(32) gilt also für alle $T > 0$.

Ich wähle q so, dass $q > 0$ ist, aber q unterhalb der Ordinate der ersten Nullstelle liegt. Dann ist in der Viertelebene $\sigma > \frac{1}{2}$, $T \geqq q$ die Funktion $\log\zeta(s)$ regulär, $\arc\zeta(s)$ stetig; doch hat $\log\zeta(s)$ auf dem linken Rande dieser Viertelebene die Nullstellen von $\zeta(s)$ mit positiver Ordinate zu logarithmischen Singularitäten; $\arc\zeta(s)$ hat sie also zu Unstetigkeitsstellen.

Es sei $\delta > 0$ gegeben. Dann schneide ich jede jener Singularitäten (d. h. die Nullstellen $s_0 = \frac{1}{2}+T_0 i$ mit $T_0 > 0$, mehrfache hier natürlich nur als ein geometrischer Punkt berücksichtigt) durch je einen Halbkreis nach rechts (der s_0 zum Mittelpunkt hat) derart aus, dass erstens jeder Radius[2]) $r < \frac{\delta}{2}$ ist, zweitens die Halbkreise sich nicht treffen, drittens der unterste nicht unter die Ordinate q hinunterreicht und viertens auf jedem Halbkreis, wenn s' $(= s_0 - ri)$ der untere, s'' $(= s_0 + ri)$ der obere Endpunkt ist,

(34) $$\arc\zeta(s) < \arc\zeta(s'')+1 \text{ bezw. } \arc\zeta(s) > \arc\zeta(s')-1$$

---

[1]) Für wurzelfreies $T > 0$ und alle σ war $\arc\zeta(s)$ schon in der Einleitung erklärt.

[2]) r hängt selbstverständlich von s_0 ab.

ist. Das geht; denn die drei ersten Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn jeder Radius eine bestimmte von s_0 abhängige Grösse nicht übersteigt, und die vierte Bedingung ist bei festem s_0 (Nullstelle νter Ordnung) für alle hinreichend kleinen r erfüllt, wie man folgendermassen einsieht. Wenn

$$\frac{\zeta(s)}{(s-s_0)^\nu} = \varphi(s)$$

gesetzt wird, ist

$$\operatorname{arc} \varphi(s) = \operatorname{arc} \zeta(s) - \nu \operatorname{arc}(s-s_0)$$

in einer gewissen Umgebung des Punktes s_0 der Gestalt $|s-s_0| \leqq \eta$, soweit dabei $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ ist, stetig, so dass nach dem Satz von der gleichmässigen Stetigkeit für alle hinreichend kleinen r auf dem Halbkreise

$$\operatorname{arc} \varphi(s) < \operatorname{arc} \varphi(s'') + 1 \text{ und } \operatorname{arc} \varphi(s) > \operatorname{arc} \varphi(s') - 1$$

ist; hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf

$$\nu \operatorname{arc}(s-s_0) \leqq \nu \operatorname{arc}(s''-s_0) \text{ und } \nu \operatorname{arc}(s-s_0) \geqq \nu \operatorname{arc}(s'-s_0)$$

die Richtigkeit von (34) für alle hinreichend kleinen r.

In dem Gebiet, welches aus der Viertelebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $t \geqq \eta$ durch Herausschneiden jener Halbkreise entsteht, inkl. Rand, ist $\log \zeta(s)$ regulär, und auf dem linken Rand, d. h. der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$, $t \geqq \eta$ mit den durch die Halbkreise ersetzten Strecken (s' bis s'') ist nach (32) und (34)

$$\mathfrak{J} \log \zeta(s) < A_3 + 1 \text{ bezw. } -\mathfrak{J} \log \zeta(s) < A_3 + 1. \tag{35}$$

Nun trenne ich aus dieser Viertelebene den rechts von $\sigma = 1 + \delta$ gelegenen Teil ab; diese Gerade trifft keinen der Halbkreise wegen der früheren Festsetzung $r < \frac{\delta}{2} \left(< \frac{1}{2} + \delta\right)$. Das so entstehende Gebiet, welches also links durch die Gerade $\sigma = \frac{1}{2}$ (von $t = \eta$ an) mit Einbuchtungen, unten durch die Strecke $t = \eta$, $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1 + \delta$, rechts durch die Gerade $\sigma = 1 + \delta$ (von $t = \eta$ an) begrenzt ist, nenne ich G. Dann ist (35) auf dem linken Rand giltig. Auf dem untern und rechten Rand ist offenbar

$$|\mathfrak{J} \log \zeta(s)| < A_4.$$

Auf dem ganzen Rand von G ist daher

$$\mathfrak{J} \log \zeta(s) < A_5 \text{ bezw. } -\mathfrak{J} \log \zeta(s) < A_5. \tag{36}$$

Andererseits ist bekanntlich[1]) für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1 + \delta$, wenn t durch solche Werte wächst, denen keine Nullstelle mit der Ordinate t entspricht, gleichmässig

(37)
$$\operatorname{arc} \zeta(s) = \Im \log \zeta(s) = \Im \int_{1+\delta+ti}^{s} \frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}\, du + \Im \log \zeta(1+\delta+ti) = O(\log t).$$

Nun ist nach den gemachten Annahmen $\operatorname{arc} \zeta(s)$ in G stetig, und die für wurzelfrei wachsendes t bekannte Relation (37) gilt daher jetzt überhaupt, wenn s im Innern von G ins Unendliche wächst. Auf dem Rande von G galt (36).

Jetzt setze ich

$$g(s) = (\zeta(s))^{-i} = e^{-i \log \zeta(s)} \text{ bezw. } g(s) = (\zeta(s))^{i} = e^{i \log \zeta(s)}.$$

Diese Funktion $g(s)$ ist in G inkl. Rand regulär; auf dem Rand ist wegen

$$|g(s)| = e^{\Im \log \zeta(s)} \text{ bezw. } |g(s)| = e^{-\Im \log \zeta(s)}$$

nach (36) die Funktion $g(s)$ beschränkt; im Innern ist nach (37) gleichmässig

$$g(s) = O(t^{A_6}).$$

Nach einem Satze der Herren Phragmén und Lindelöf[2]) ist also im ganzen Gebiet $g(s)$ beschränkt. Insbesondere für $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \leqq \sigma \leqq 1 + \delta$, $t \geqq q$ (was dem Gebiete angehört, weil alle Radien $< \frac{\delta}{2}$ waren) ist daher

$$|g(s)| < A_7,$$

$$\Im \log \zeta(s) < \log A_7 = A_8 \text{ bezw. } -\Im \log \zeta(s) < A_8.$$

Also ist für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$, $t \geqq 1$

$$\Im \log \zeta(s) < A_9 \text{ bezw. } -\Im \log \zeta(s) < A_9.$$

---

[1]) Vergl. S. 372 des Handbuches; die Riemannsche Vermutung (11) oder gar eine unbewiesene Annahme über $N(T)$ wird dabei nicht benutzt. (37) ist also wahr und besagt, dass in (3)

$$M(T) = O(\log T)$$

ist; dies war Herrn von Mangoldts Hauptresultat über $N(T)$.

[2]) Vergl. S. 849—850 des Handbuches; dass dort auch der linke Rand geradlinig ist, ist natürlich für den Beweis ganz unwesentlich.

Daraus folgt nach einem bekannten Satze von Herrn Carathéodory[1]) für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$, $t \geqq 1$

$$|\log \zeta(s)| < A_{10},$$

$$|\zeta(s)| = e^{\Re \log \zeta(s)} \leqq e^{|\log \zeta(s)|} < e^{A_{10}} = A_{11};$$

also wäre speziell für $\sigma \geqq 1$, $t \geqq 1$

$$|\zeta(s)| < A_{12},$$

während Herr Bohr das Gegenteil bewiesen hat.

Der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz ist damit bewiesen.

§ 5.

Hilfssatz: *Es ist nicht wahr, dass für* $\sigma > 1$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = o(\log \log t)$$

ist.

Mit anderen Worten: *Es gibt eine positive Konstante* K *derart, dass die Ungleichung*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| > \frac{1}{K} \log \log t$$

bei jedem gegebenen τ *im Gebiet* $\sigma > 1$, $t > \tau$ *eine Lösung besitzt.*

Beweis: Im § 9 der Arbeit von Herrn Bohr und mir ist, wenn es dort auch nur auf spezielle Funktionen jener Art angewandt wurde, allgemein bewiesen: Bei jeder Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

deren Koeffizienten $a_n \geqq 0$ sind und bei passender Wahl zweier positiven Konstanten α und β für alle ganzen $x \geqq 1$ die Ungleichungen

$$\alpha < \frac{a_1 + \cdots + a_x}{x} < \beta$$

erfüllen, ist, wenn die Reihe bei festem $\tau > 1$ für $\sigma > 1$, $1 \leqq t \leqq \tau$ beschränkt ist, in der Halbebene $\sigma > 1$ nicht

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = o(\log \log t).$$

---

[1]) Vergl. S. 299—300 des Handbuches. In jenem Wortlaut ist nur zu setzen: $F(s) = -i \log \zeta(s)$ bezw. $i \log \zeta(s)$, $s_0 = 1 + \delta + t i$, $r = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$, $\varrho = \frac{1}{2}$. Dann liefert er die Beschränktheit von $|\log \zeta(s)|$ für $\frac{1}{2} + \delta \leqq \sigma \leqq 1 + \delta$, $t \geqq \frac{3}{2} + \frac{\delta}{2}$, also für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$, $t \geqq 1$.

Wird dies auf

$$1-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=1+\sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{ms}}$$

angewendet, so erkennt man die Richtigkeit des obigen Hilfssatzes.

§ 6.

Satz: *Es habe der Ausdruck*

$$\frac{N(T)-\left(\frac{1}{2\pi}T\log T+\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T\right)}{\log\log T}$$

für $T=\infty$ *den Limes* 0 *oder auch nur seinen* lim sup $\leqq 0$ *oder seinen* lim inf $\geqq 0$. *Dann ist die Riemannsche Vermutung*

(11) $$\zeta(s)\neq 0 \text{ für } \sigma>\frac{1}{2}$$

falsch.

Beweis: Es sei

$$\limsup \leqq 0 \text{ bezw. } \liminf \geqq 0.$$

Dann ist für wurzelfrei wachsendes T nach (3)

(38) $$\limsup_{T=\infty}\frac{\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)}{\log\log T}\leqq 0 \text{ bezw. } \liminf_{T=\infty}\frac{\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)}{\log\log T}\geqq 0.$$

Nun werde (11) als richtig vorausgesetzt und $\operatorname{arc}\zeta(s)$ im Gebiet $\sigma\geqq\frac{1}{2}$, $t>0$ wie in § 4 definiert. Dann ist nach (33) die Relation (38) sogar für stetig wachsendes T giltig.

Es mögen δ und γ zwei willkürlich gegebene positive Konstanten bezeichnen. Nach (38) ist für alle hinreichend grossen T

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)<\gamma\log\log T \text{ bezw. } -\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)<\gamma\log\log T,$$

d. h. für alle $T>0$

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)<\gamma\log\log(T+2)+c_1 \text{ bezw.}$$
$$-\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2}+Ti\right)<\gamma\log\log(T+2)+c_1,$$

wo c_1 eine passend wählbare Konstante ist.

Ich wähle q wie in § 4. Es war $\delta>0$ schon vorhin gegeben. Ich wähle die $r=r(s_0)$ und konstruiere das Gebiet G wie in § 4. Dann ist nach (34) auf dem linken Rand von G (wenn $r<\frac{\delta}{2}$ berücksichtigt wird)

$$\operatorname{arc} \zeta(s) < \gamma \log\log\left(t + 2 + \frac{\delta}{2}\right) + c_1 + 1 \text{ bezw. } - \operatorname{arc} \zeta(s) < \gamma \log\log(t+2) + c_1 + 1,$$

d. h.

$$\Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log(t+2) + c_2 \text{ bezw. } - \Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log(t+2) + c_2,$$

auf dem untern und rechten Rande

$$|\Im \log \zeta(s)| < c_3.$$

Also ist auf dem ganzen Rande von G

$$\Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log(t+2) + c_4 \text{ bezw. } - \Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log(t+2) + c_4.$$

Im Innern von G ist, wie in § 4 auseinandergesetzt,

$$\Im \log \zeta(s) = O(\log t).$$

Ich setze auch hier

$$g(s) = (\zeta(s))^{-i} = e^{-i \log \zeta(s)} \text{ bezw. } g(s) = (\zeta(s))^{i} = e^{i \log \zeta(s)}.$$

Dann ist in G inkl. Rand $g(s)$ regulär. Auf dem Rand ist

$$|g(s)| < e^{\gamma \log\log(t+2) + c_4};$$

im Innern von G ist

$$|g(s)| < e^{c_5 \log(t+2)}.$$

Ich verstehe jetzt unter $\log\log s$ den in der von 1 bis $-\infty$ (längs der reellen Achse) aufgeschnittenen Ebene regulären Zweig, der für $s > 1$ reell ist, und setze

$$\frac{g(s)}{e^{\gamma \log\log s}} = h(s).$$

$h(s)$ ist in G inkl. Rand regulär. Auf dem Rand und im Innern, soweit dabei $t > 1$ ist, ist

$$\Re \log\log s = \log|\log s| \geqq \log(\Re \log s) = \log\log|s| > \log\log t.$$

Überall auf dem Rande und im Innern ist also

$$\Re \log\log s > \log\log(t+2) - c_6.$$

Daher ist auf dem Rande von G

$$|h(s)| = \frac{|g(s)|}{e^{\gamma \Re \log\log s}} < e^{\gamma \log\log(t+2) + c_4 - \gamma \log\log(t+2) + \gamma c_6} = e^{c_7} = O(1),$$

im Innern von G

$$|h(s)| < e^{c_5 \log(t+2) - \gamma \log\log(t+2) + \gamma c_6} = e^{O(\log t)} = O(t^{c_8}).$$

Nach dem Phragmén-Lindelöfschen Satz ist also im Innern

$$\frac{g(s)}{e^{\gamma \log\log s}} = h(s) = O(1),$$

$$|g(s)| = e^{\gamma \Re \log\log s} \cdot O(1),$$

also wegen

$$\Re \log\log s = \log|\log s| = \log\bigl(\log t + O(1)\bigr) = \log\log t + O(1)$$

$$g(s) = O\left(e^{\gamma \log\log t}\right),$$

$$\log|g(s)| < \gamma \log\log t + O(1),$$

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log t + O(1) \text{ bezw.} \\ &-\Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log t + O(1). \end{aligned} \right.$$

(39) gilt in G, also speziell im Streifen $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \leqq \sigma \leqq 1 + \delta$, folglich in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$. Für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$, $t \geqq 3$ ist daher

$$(40) \quad \Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log t + c_9 \text{ bezw. } -\Im \log \zeta(s) < \gamma \log\log t + c_9.$$

Nun wende ich den Carathéodoryschen Satz auf die Funktion $-i \log \zeta(s)$ bezw. $i \log \zeta(s)$ und die beiden Kreise mit dem Mittelpunkt $1 + \delta + ti$, wo $t \geqq \frac{7}{2} + \frac{\delta}{2}$ ist, und den beiden Radien $r = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$ und $\varrho = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}$ an. Dann ist nach (40) auf dem horizontalen linken Radius des kleineren Kreises, d. h. auf der geraden Strecke von $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta + ti$ bis $1 + \delta + ti$ für $t \geqq \frac{7}{2} + \frac{\delta}{2}$

$$|\log \zeta(s)| \leqq \log \zeta(1+\delta) + \log \zeta(1+\delta) \frac{1 + \frac{3}{4}\delta}{\frac{\delta}{4}}$$

$$+ 2\left(\gamma \log\log\left(t + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\right) + c_9\right) \frac{\frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}}{\frac{\delta}{4}} < \frac{2(2+\delta)\gamma}{\delta} \log\log t + c_{10}.$$

Folglich ist in der Viertelebene $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta$, $t \geqq 3$

$$(41) \quad |\log \zeta(s)| < \frac{2(2+\delta)\gamma}{\delta} \log\log t + c_{11}.$$

Nach einer Cauchyschen Ungleichung ist folglich für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$, $t \geqq 3 + \frac{\delta}{4}$, da das Maximum von $|\log \zeta(s)|$ auf dem Kreise um s mit dem Radius $\frac{\delta}{4}$ nach (41) kleiner als $\frac{2(2+\delta)\gamma}{\delta} \log\log\left(t + \frac{\delta}{4}\right) + c_{11}$ ist,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\frac{d \log \zeta(s)}{d s}\right|$$

$$\leqq \frac{\frac{2(2+\delta)\gamma}{\delta} \log\log\left(t + \frac{\delta}{4}\right) + c_{11}}{\frac{\delta}{4}} < \frac{8(2+\delta)\gamma}{\delta^2} \log\log t + c_{12};$$

für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$, $t \geqq 3$ ist also

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < \frac{8(2+\delta)\gamma}{\delta^2} \log\log t + c_{13}.$$

Hierin waren $\gamma > 0$ und $\delta > 0$ willkürlich gegeben und c_{13} eine von γ und δ abhängige Konstante. Daher ist — weil ich eben zu einem festen $\delta > 0$ jedes noch so kleine $\gamma > 0$ nehmen kann — bei festem $\delta > 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$ gleichmässig

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = o(\log\log t).$$

Dies Ergebnis ist aber bereits für $\delta = \frac{1}{2}$ auf Grund des Hilfssatzes aus § 5 falsch. Der zu Anfang dieses § 6 ausgesprochene Satz ist damit bewiesen.

Göttingen, den 12. Juni 1911.