

Über Lamberts flächentreue Azimutalprojektion.

Von

K. BRANDENBERGER.

§ 1.

In dem rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem $O(x, y, z)$ stelle die Kugel mit dem Zentrum $M(0, 0, -1)$ und dem Radius 1, die Erde und die (xy) -Ebene die Bildebene von Lamberts flächentreuer Azimutalprojektion dar (Fig. 1). (Wir werden diese Projektion kurz als „Lambertsche Projektion“ bezeichnen.) ¹⁾

Die Lambertsche Projektion P^* des Punktes P der Erde kann in folgender Weise definiert werden:

1. Das Kugelazimut des Punktes P ist gleich dem Kartenazimut des Punktes P^* , d. h. die Punkte P und P^* liegen in der gleichen Ebene durch die z -Achse;

¹⁾ Zur Orientierung über diese Kartenprojektion verweisen wir auf die E. M. W., Bd. VI 1 A und auf Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, Berlin 1772. Teil III, Seite 105. Die Lambertsche Projektion hat erst in den letzten Jahrzehnten die nötige Würdigung gefunden „und es ist anzunehmen, dass sie in der Zukunft in den Atlanten eine dominierende Stellung einnehmen wird“. (Zöpplitz-Bludau, Kartenentwurfslehre, Leipzig 1899). Dies ist in dem schweizerischen Schulatlas, der von der Konferenz kantonaler Erziehungsdirektoren mit Unterstützung des Bundes herausgegeben und von Prof. Dr. A. Aepli in Zürich bearbeitet wird, in der Tat der Fall. Über die praktische Bedeutung der Lambertschen Projektion schreibt Prof. Aepli im „Jahrbuch des Unterrichtswesens in der Schweiz 1906“:

„Für grössere Gebiete — Erdteile oder Halbkugeln — ist weitaus am besten Lamberts flächentreue Azimutalprojektion. Sie verbindet mit Flächentreue möglichst geringe Winkelverzerrung. Darin ist sie der bisher für Erdteilkarten fast immer verwendeten Bonne'schen Projektion weit überlegen.

Bei den Halbkugeln vertritt sie mit Vorteil die bisher meist angewendete stereographische Projektion, vor der sie den Vorzug der Flächentreue hat, während sich die Winkelfehler innert mässigen Grenzen halten.

Im Atlas findet man die Lambertsche Projektion für alle Erdteilkarten, inklusive Australien und Polynesien, sowie für die beiden Halbkugeln und für die Polar-karten auf Seite 122 und 123 angewendet.“

2. Die Kugelsehne OP ist gleich dem Radius Vektor des Punktes P^* , also $OP = OP_0 = OP^*$ (Fig. 1).

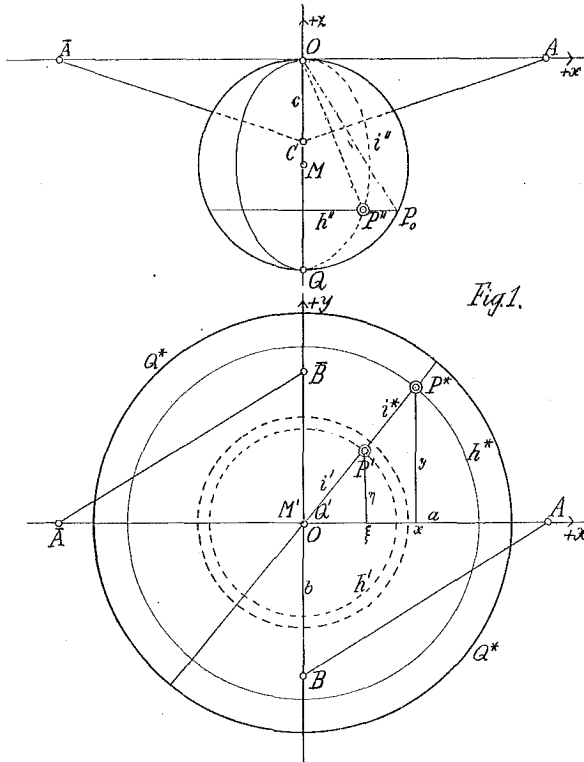


Fig. 1.

In der vorliegenden Arbeit soll nun untersucht werden, wie sich im Lambertschen Entwurf beliebige Kreise der Kugel abbilden. Für spezielle Fälle ist diese Frage schon beantwortet. So folgt aus dem ersten Teil der Definition, dass die Grosskreise i durch O in gerade Linien i^* übergehen, die sich im Kartenmittelpunkt O so schneiden, dass die Karte in diesem Punkte winkeltreu ist. Ferner ergibt sich aus dem zweiten Teil der Definition der Lambertschen Projektion, dass den Kugelkreisen mit dem sphärischen Mittelpunkt O , den sogenannten Horizontalkreisen h , auch in der Kartenebene Kreise h^* um O entsprechen. Im Besonderen ist das Bild des Gegenpunktes des Kartenmittelpunktes, das Bild des Punktes $Q(0, 0, -2)$, der Kreis Q^* um O mit dem Radius 2. Dieser Kreis ist der Umriss des Lambertschen Entwurfes der ganzen Erde. — Endlich ist in verschiedenen Arbeiten gezeigt worden, dass die Lambertschen Bilder der Parallelkreise und Meridiane Kurven 4. Ordnung sind.¹⁾ Die uns bekannten Beweise dieses Satzes benutzen die Be-

¹⁾ Siehe Fiorini: Le proiezioni delle carte geografiche, Bologna 1881, pag. 423.

ziehungen zwischen den Stücken eines sphärischen Dreieckes und erfordern eine ziemlich umständliche Rechnung; auch muss der Beweis für Parallelkreise und Meridiane getrennt geführt werden. Hier werde ich nun beweisen, dass das Lambertsche Bild eines beliebigen Kugelkreises eine Kurve 4. Ordnung ist. Durch Spezialisierung gewinnen wir sodann die Gleichungen der Parallelkreis- und Meridianbilder. Von den Sätzen der sphärischen Trigonometrie machen wir keinen Gebrauch.

§ 2.

A. Ist (x, y, z) ein beliebiger Punkt der Kugel mit dem Mittelpunkt $(0, 0, -1)$ und dem Radius 1, so ist

$$x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - 1 = 0,$$

oder

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0.$$

Sind ferner $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ (Fig. 1) die Achsenabschnitte einer Ebene E , so lautet die Gleichung der Ebene

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Wir wählen die Achsenabschnitte so, dass die Kugel von der Ebene geschnitten wird. Bezeichnen wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes P (Fig. 2) des Schnittkreises k mit ξ, η, ζ , so kann diese Kreislinie durch die Gleichungen

$$(1') \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2\zeta = 0$$

und

$$(2') \quad \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} - 1 = 0$$

dargestellt werden. Sind endlich x und y die ebenen rechtwinkligen Koordinaten der Lambertschen Projektion P^* des Kugelpunktes $P(\xi, \eta, \zeta)$, so ist zufolge der Definition der Lambertschen Projektion

$$(3) \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x}$$

und

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2.$$

Die Gleichung des Bildes k^* der Kreislinie k wird durch Elimination der Parameter ξ, η, ζ aus den Gleichungen (1'), (2'), (3) und (4) gefunden.

Aus (1') und (4) folgt zunächst

$$\zeta = -\frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Ferner ergibt sich

$$\xi = \frac{a b x (x^2 + y^2 + 2c)}{2c(bx + ay)},$$

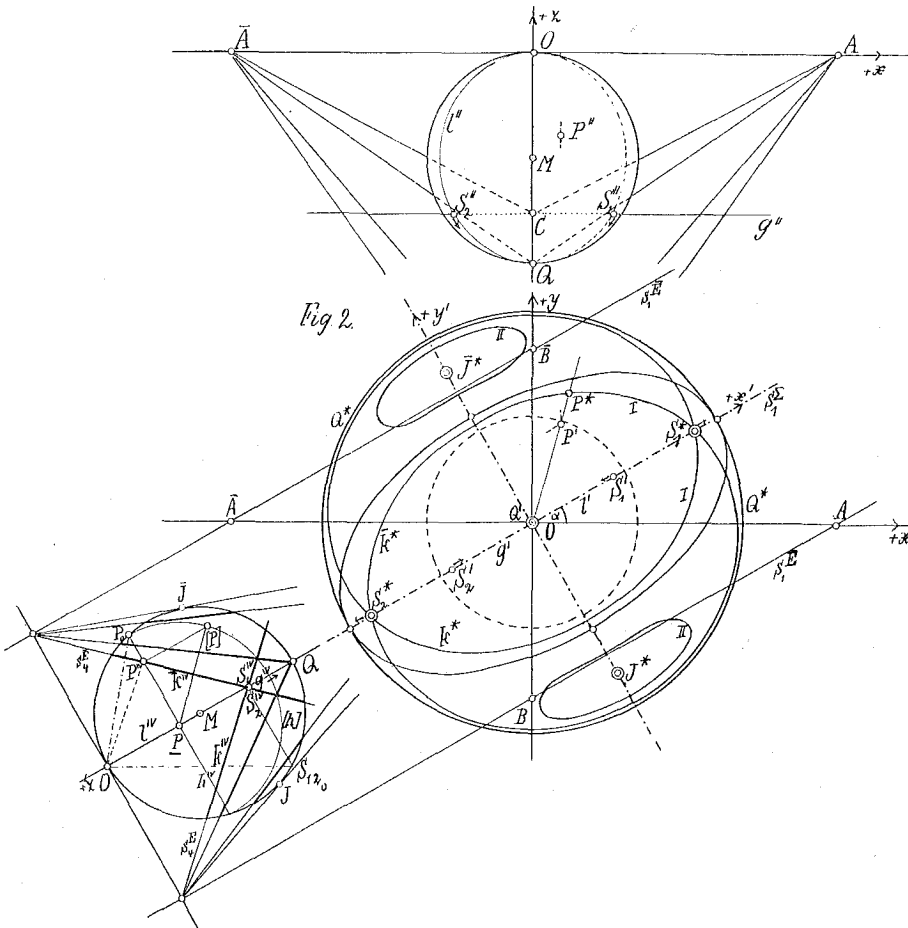
$$\eta = \frac{a b y (x^2 + y^2 + 2c)}{2c(bx + ay)}.$$

Führt man die Ausdrücke für ξ , η und ζ in (1') ein, so folgt nach leichten Umformungen als Gleichung der Kurve k^*

$$(5) \quad a^2 b^2 (x^2 + y^2 + 2c)^2 + c^2 (x^2 + y^2 - 4)(bx + ay)^2 = 0.$$

I. In Lamberts flächentreuer Azimutalprojektion entspricht jedem Kreise der Kugel eine algebraische Kurve 4. Ordnung der Kartenebene.

Weder die Achse der x noch die Achse der y ist Symmetrieachse der Kurve. Weil aber Gleichung (5) die Veränderlichen nur in gerader Dimension enthält, ist O Symmetriezentrum von k^* . Ferner erkennt man, dass die Kurve zirkular ist, d. h. dass sie einfach durch die beiden imaginären Kreispunkte geht.



B. Die durch die Achsenabschnitte $-a, -b, c$ definierte Ebene \bar{E} (Fig. 1 und 2: $O\bar{A} = -a, O\bar{B} = -b, O\bar{C} = c$) schneide die Kugel in dem Kreise \bar{k} . Auch das Bild dieses Kreises ist die Kurve (5); denn

gilt die Gleichung (5) für das Wertetripel (a, b, c) , so gilt sie auch für das Wertetripel $(-a, -b, c)$. Die Kurve k^* besteht aus zwei Ovalen k^* und \bar{k}^* , von welchen das eine dem Kreise k , das andere dem Kreise \bar{k} entspricht.

Die Kreise k und \bar{k} sind kongruent und haben die durch die z -Achse gehende Halbierungsebene Σ des Flächenwinkels der Kreisebenen E und \bar{E} zur Symmetrieebene. Die Schnittgerade g der Ebenen E und \bar{E} ist eine erste Hauptgerade durch den Punkt $C(0, 0, c)$ und parallel zu den Horizontalspuren $s_1^E, s_1^{\bar{E}}, s_1^{\Sigma}$, die alle untereinander parallel sind. Die Gerade g kann die Kugel in zwei, zur z -Achse symmetrischen Punkten S_1 und S_2 schneiden, im Anfangspunkt O oder in seinem Gegenpunkt Q berühren, oder endlich mit der Kugel keinen Punkt gemeinsam haben. Die Schnitt- und Berührungspunkte der Geraden und der Kugel sind auch Schnitt- und Berührungspunkte der Kreise k und \bar{k} . Schnittpunkte von k und \bar{k} liegen also stets in Σ und normalsymmetrisch zur z -Achse und besitzen immer den Abstand c von der Horizontalebene; Berührungspunkte von k und \bar{k} können nur nach O und Q fallen.¹⁾ Somit liegen die Doppelpunkte von k^* , in welche S_1 und S_2 vermöge der Lambertschen Projektion übergehen, stets in s_1^{Σ} und zentrisch-symmetrisch zu O im Abstand $\sqrt{2}c = OS_{1_2_0}$ von O . Berühren sich k und \bar{k} in O , so berühren sich auch k^* und \bar{k}^* in diesem Punkte (Fig. 3). Für $c = -2$ ist Q Berührungspunkt von k und \bar{k} . Die Gleichung (5) geht für $c = -2$ über in

$$a^2 b^2 (x^2 + y^2 - 4)^2 + 4(x^2 + y^2 - 4)(bx + ay)^2 = 0$$

oder in

$$(x^2 + y^2 - 4) \{b^2(a^2 + 4)x^2 + a^2(b^2 + 4)y^2 + 8abxy - 4a^2b^2\} = 0,$$

also in

$$(6) \quad x^2 + y^2 - 4 = 0$$

und

$$(7) \quad b^2(a^2 + 4)x^2 + a^2(b^2 + 4)y^2 + 8abxy - 4a^2b^2 = 0.$$

Somit zerfällt die Kurve 4. Ordnung für $c = -2$ in den Kreis (6), das Bild des Punktes Q (Umriss des Bildes der ganzen Kugel) und die Ellipse (7). Offenbar ist die grosse Achse der Ellipse der

¹⁾ In Fig. 2 ist das Gebilde auf eine Normalebene von g orthogonal projiziert. Für diese Tafel sind E, \bar{E}, Σ projizierende Ebenen. Die Bilder von k und \bar{k} und von dem in Σ liegenden Grosskreise l sind die Strecken k^{IV}, \bar{k}^{IV} und l^{IV} .

Der Punkt P^* ist nach folgendem Verfahren konstruiert worden: Wir legen den durch P gehenden Horizontalkreis h in die vierte Tafel um. Die Umlegung von P ist $[P]$ und die vierte Kote von P ist $P^{IV}[P]$. P^* liegt auf dem zu $P[P]$ parallelen Halbstrahl durch O und zwar ist $OP^* = OP = OP_0$. Ausführlicher werde ich die Konstruktion des Lambertschen Netzes nach dieser einfachen darstellend-geometrischen Methode in einem der nächsten Hefte des „Enseignement mathématique“ behandeln.

in s_1^z liegende Durchmesser des Kreises (6). Wir sprechen dieses Resultat in dem folgenden Satze aus:

II. Das Lambertsche Bild eines durch den Punkt Q gehenden Kugelkreises besteht aus dem Kreise um O mit dem Radius 2 und der einen Hälfte einer Ellipse, deren grosse Achse der zur Horizontalspur der Ebene des Kugelkreises parallele Durchmesser des Bildkreises ist.

C. Nun wollen wir die Gestaltänderung von k^* untersuchen unter der Voraussetzung, dass a und b konstant, c dagegen variabel ist, also unter der Annahme, dass E und \bar{E} um ihre Horizontalspuren gedreht werden.

Für $c = 0$ reduzieren sich k und \bar{k} und somit auch k^* auf den Anfangspunkt O . Liegt c zwischen 0 und (-2) , so schneiden sich k und \bar{k} in zwei Punkten S_1 und S_2 und es besitzt k^* zwei reelle Doppelpunkte. Lassen wir c von 0 bis (-2) abnehmen, so bewegen sich S_1 und S_2 von O aus auf dem in Σ liegenden Grosskreis l der Kugel abwärts und zwar so, dass die z -Achse stets Symmetrieachse von $S_1 S_2$ ist. Die Doppelpunkte S_1^* und S_2^* entfernen sich auf s_1^z (l^*) von O aus in entgegengesetztem Sinne, jetzt so, dass $S_1^* S_2^*$ immer durch O halbiert wird und dass der Radius Vektor jedes der Doppelpunkte gleich ist der Kugelsehne OS_1 oder OS_2 , also gleich $\sqrt{2}c$. Während aber für $c = -2$ die Punkte S_1 und S_2 mit Q zusammenfallen, besitzen S_1^* und S_2^* für $c = -2$ die im Lambertschen Bilde der Kugel grösstmögliche Entfernung: sie sind die Endpunkte eines Durchmessers des Umrisskreises (6). In diesem ungleichen Verhalten von Original und Bild kommt die Eigenschaft der Lambertschen Projektion, im Punkte Q nicht ein-, sondern ∞ -vieldeutig zu sein — dem Punkte Q entspricht der Kreis Q^* —, zum Ausdruck.

Für Werte von c , die < -2 oder > 0 sind, haben k und \bar{k} , wenn die Kugel von E und \bar{E} überhaupt geschnitten wird, keine gemeinsamen, k^* also keine Doppelpunkte. Der Übergang von der Gestalt I der Kurve k^* in die Gestalt II (Fig. 2) vollzieht sich für $c = -2$.

Berühren endlich E und \bar{E} die Kugel in den Punkten J und \bar{J} , so besteht k^* aus den beiden Punkten J^* und \bar{J}^* , in welche die beiden Ovale sich schliesslich zusammenziehen. Die Punkte J^* und \bar{J}^* liegen auf der zu s_1^z normalen Geraden durch O und haben von diesem Punkte den Abstand

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2}}.$$

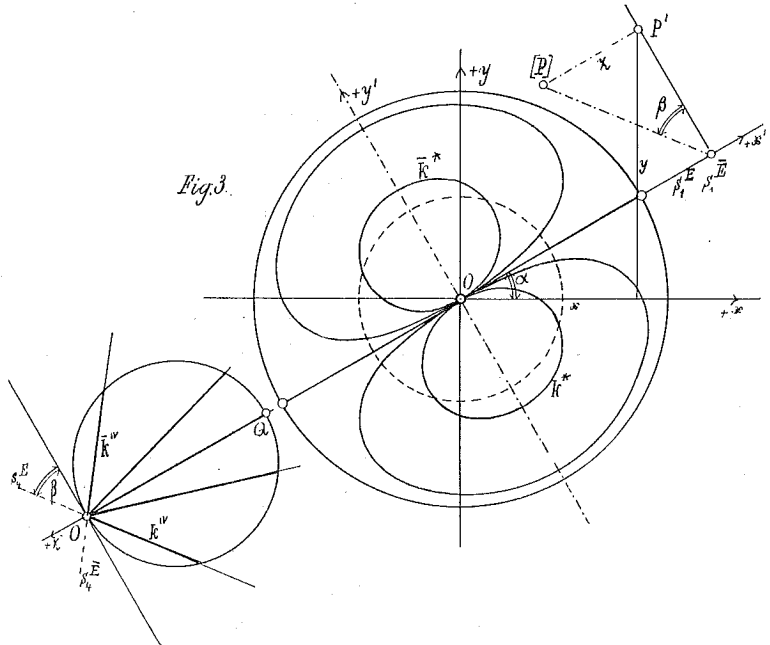
Aus dieser Betrachtung gewinnen wir den Satz:

III. Sind in Gleichung (5) a und b konstant, c dagegen veränderlich, so liegen die Doppelpunkte aller durch (5) definierten Kurven vierter Ordnung auf einer Geraden durch den Anfangspunkt.

D. Wegen des zweiten Teils der Definition der Lambertischen Projektion ist der Radius Vektor des Doppelpunktes S_1^* (oder S_2^*) gleich der Kugelsehne OS_1 (oder OS_2), also gleich $\sqrt{2}c$, d. h. von a und b unabhängig. Schneiden wir also die Kugel durch die Ebenen des Ebenenbündels mit dem Scheitel $C(0, 0, c)$ und konstruieren wir zu den Schnittkreisen die Lambertischen Bilder, so liefert jedes Ebenenpaar $\pm a, \pm b, c$ eine Kurve 4. Ordnung (wenn die Kugel geschnitten wird). Während die Anomalie der Doppelpunkte von a und b abhängig ist, besitzt der Radius Vektor aller Doppelpunkte den von a und b unabhängigen und somit konstanten Wert $\sqrt{2}c$, d. h.

IV. Sind in Gleichung (5) a und b variabel, c dagegen konstant, so liegen die Doppelpunkte der unendlich vielen durch (5) definierten Kurven 4. Ordnung auf dem Kreise um O mit dem Radius $\sqrt{2}c$.

Der Ort der Doppelpunkte ist also eine Gerade durch O oder ein Kreis um O , je nachdem a und b konstant und c veränderlich oder a und b veränderlich und c konstant ist.



E. Für $a = b = c = 0$ gehen E und \bar{E} durch O . In diesem Falle bestimmen wir die Ebene E durch ihren Neigungswinkel β gegen die Horizontalebene und den Neigungswinkel α ihrer Horizontalspur gegen die x -Achse (Fig. 3). Die Gleichung der auf diese Weise bestimmten Ebene ist

$$(8) \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha + z \operatorname{ctg} \beta = 0$$

und die Gleichung des Bildes ihres Schnittkreises mit der Kugel

$$(9) \quad (x^2 + y^2)^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 (x^2 + y^2 - 4) = 0.$$

Die Kurve (9) ist auch das Bild des Kreises, der von der Ebene \bar{E} , die zu E bezüglich der Ebene $y = x \operatorname{tg} \alpha$ symmetrisch liegt, aus der Kugel herausgeschnitten wird. Aus der Figur 3 kann leicht ersehen werden, wie k^* sich ändert, wenn α konstant, aber β veränderlich ist. k^* besteht im allgemeinen aus zwei zur Geraden $y = x \operatorname{tg} \alpha$ symmetrischen Ovalen, die sich in O berühren. Für $\beta = 0$ geht k^* in den Punkt O , für $\beta = 90^\circ$ in den Kreis $x^2 + y^2 - 4 = 0$ (Bild von Q) und den Durchmesser $y = x \operatorname{tg} \alpha$ (Bild eines Grosskreises durch O) über.

F. Für k^* sind die Gerade s_1^x und die dazu normale Gerade $J^* \bar{J}^*$ Symmetrieachsen (s. Fig. 2). Um die Gleichung (5) auf diese Achsen zu transformieren, wählen wir den durch den ersten (oder zweiten) Quadranten gehenden Halbstrahl von s_1^x zur positiven x' -Achse. Für den Drehungswinkel α haben wir, da $s_1^x \parallel s_1^x$ ist, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}$, somit

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Für den Übergang vom System (x, y) zum System (x', y') gelten die Transformationsgleichungen

$$(10) \quad x = \frac{ax' + by'}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{-bx' + ay'}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Setzt man (10) in (5) ein, so erhält man nach leichter Rechnung die auf die Symmetrieachsen von k^* bezogene Gleichung von k^* :

$$(11) \quad a^2 b^2 (x'^2 + y'^2 + 2c)^2 + c^2 (a^2 + b^2) y'^2 (x'^2 + y'^2 - 4) = 0.$$

Für $c = -2$ geht (11) über in

$$(x'^2 + y'^2 - 4) [a^2 b^2 x'^2 + \{a^2 b^2 + 4(a^2 + b^2)\} y'^2 - 4a^2 b^2] = 0,$$

oder

$$(12) \quad x'^2 + y'^2 - 4 = 0$$

und

$$(13) \quad a^2 b^2 x'^2 + \{a^2 b^2 + 4(a^2 + b^2)\} y'^2 - 4a^2 b^2 = 0$$

oder

$$(13') \quad \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{\left\{ \frac{2ab}{\sqrt{a^2 b^2 + 4(a^2 + b^2)}} \right\}^2} - 1 = 0.$$

(12) ist die Gleichung des Umrisskreises, (13) die Gleichung der auf ihre Achsen bezogenen Ellipse. Bezeichnen p und q die Längen der beiden Halbachsen, so hat man $p = 2$ und

$$q = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 b^2 + 4(a^2 + b^2)}}.$$

Transformiert man endlich Gleichung (9) auf die Symmetrieachsen mittelst der Gleichungen (s. Fig. 3)

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

so lautet die Gleichung (9) im System (x', y')

$$(14) \quad (x'^2 + y'^2)^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + (x'^2 + y'^2 - 4) y'^2 = 0.$$

§ 3.

A. Aus dem Satze I des letzten Abschnittes folgt, dass auch den Parallelkreisen und Meridianen in der Karte Kurven vierter Ordnung entsprechen.¹⁾

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir als Nullmeridian den in der (yz) -Ebene liegenden Grosskreis der Kugel wählen. Der Kartennittelpunkt O ist sodann durch seine geographische Breite φ_0 bestimmt. In Figur 4 ist NS die Erdachse und die dazu normale Gerade durch O die Seitenspur der Äquatorebene. Die Ebenen der Parallelkreise sind normal zu NS und die Ebenen der Meridiane bilden ein Ebenenbüschel mit NS als Achse. Wir projizieren das Gebilde auf die (yz) -Ebene (oder eine dazu parallele Ebene). Die Bilder der Parallelkreise sind parallele Sehnen, die Bilder der Meridiane Ellipsen mit NS als grosser Achse.

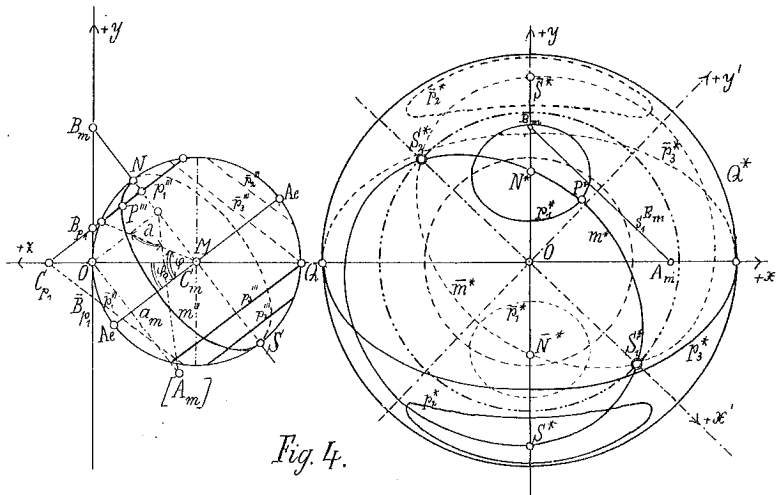


Fig. 4.

Um die Gleichung des Bildes des Parallelkreises p (φ) und des Meridians m (λ) zu finden, berechnen wir für die Parallelkreis- und Meridianebenen die Achsenabschnitte.

¹⁾ Siehe z. B. Schweiz. Schulatlas. Vgl. ferner: Zöpplitz-Bludau, Kartenentwurflehre, Leipzig 1899, Seite 42–45.

I. Parallelkreisbild. Man erhält aus Fig. 4 leicht

$$(15) \quad a = \infty, b = OB_{p_1} = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}, c = OC_{p_1} = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0}.$$

Da die Horizontalspur der Parallelkreisebene parallel zur x -Achse ist, fallen die Koordinatensysteme (x, y) und (x', y') zusammen und die Gleichung von p^* kann aus (5) oder (11) gewonnen werden. Setzt man die Werte (15) in (5) oder (11) ein, so nimmt die linke Seite jeder Gleichung die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an. Dividieren wir beide Seiten der Gleichung (5) oder (11) durch a^2 und gehen dann mit den Werten (15) in die umgeformte Gleichung ein, so ergibt sich als Gleichung des Parallelkreisbildes

$$(16) \quad \{(x^2 + y^2) \sin \varphi_0 + 2(\sin \varphi - \sin \varphi_0)\}^2 + y^2(x^2 + y^2 - 4) \cos^2 \varphi_0 = 0.$$

Aus Fig. 4 und § 2 folgt, dass die Kurve (16) 2 reelle und getrennt liegende Doppelpunkte besitzt, wenn $|\varphi| < \varphi_0$, dass die Doppelpunkte für $\varphi = \varphi_0$ im Punkte O sich vereinigen, dass sie imaginär werden, für $|\varphi| > \varphi_0$ und dass für $\varphi = -\varphi_0$ die Kurve (16) in den Kreis $x^2 + y^2 = 4$ und die Ellipse $x^2 \sin^2 \varphi_0 + y^2 = 4 \sin^2 \varphi_0$ zerfällt. Von den beiden Ovalen, aus welchen (16) besteht, hat nur das eine eine sachliche Bedeutung; das andere stellt den Kugelkreis \bar{p} dar, der, entsprechend früheren Erläuterungen, zu p symmetrisch liegt. — Die Parallelkreisbilder haben die Form p_1^* oder p_2^* , je nachdem der Parallelkreis nördlich oder südlich von dem durch den Gegenpunkt des Kartenmittelpunktes gehenden Parallelkreis liegt; die Übergangsform von p_1^* zu p_2^* ist die Kurve p_3^* , die aus einer Halbellipse und einem Halbkreise besteht (siehe Satz II). Zählen wir p_3^* zu den p_1^* , so besteht p_3^* aus der halben Ellipse und dem obern (im 1. und 2. Quadranten liegenden) Halbkreis; fassen wir dagegen p_3^* als zu den p_2^* gehörend auf, so setzt sich p_3^* aus der halben Ellipse und dem untern Halbkreis zusammen.

II. Meridianbild. Für die Achsenabschnitte der Ebene des Meridians m (λ) ergeben sich aus Fig. 4 die Werte

$$(17) \quad a = OA_m = \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \lambda, b = OB_m = \operatorname{ctg} \varphi_0, c = OC_m = 1.$$

Führen wir diese Werte in (5) ein, d. h. beziehen wir das Meridianbild auf das Koordinatensystem, dessen Achsen die Ost-West-Linie und die Mittagslinie sind, so lautet die Gleichung des Meridianbildes

$$(18) \quad (x^2 + y^2 - 2)^2 \cos^2 \varphi_0 + (x^2 + y^2 - 4)(x \operatorname{ctg} \lambda + y \sin \varphi_0)^2 = 0.$$

Da der Abschnitt $c = -1$ immer zwischen 0 und (-2) liegt, so hat m^* stets zwei reelle Doppelpunkte und da die Verbindungslinie x' der Doppelpunkte nach § 2 parallel zur Horizontalspur der

Schnittebene ist, liegen die Doppelpunkte von (18) auf der Geraden durch O mit dem Richtungskoeffizienten

$$-\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg} \varphi_0 : \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{ctg} \lambda : \sin \varphi_0,$$

also auf der Geraden $x \operatorname{ctg} \lambda + y \sin \varphi_0 = 0$. Der Radius Vektor jedes Doppelpunktes ist $\sqrt{2}$. Die Schnittpunkte der beiden Kreise m und \bar{m} , die der Kurve (18) entsprechen, sind bei variablem λ (und φ_0) die Endpunkte eines Durchmessers des horizontalen Grosskreises der Kugel. Wir sprechen das Resultat in einem Satze aus, der ein Spezialfall des Satzes IV von § 2 ist:

V. Bedeuten φ_0 und λ in Gleichung (18) Parameter, so besitzt die einem beliebigen Wertepaar (φ_0, λ) entsprechende Kurve vierter Ordnung zwei reelle Doppelpunkte; der Ort dieser Doppelpunkte ist der Kreis um O mit dem Radius $\sqrt{2}$, also das Lambertsche Bild des horizontalen Grosskreises.

Die Verbindungsgerade der Doppelpunkte irgend einer der Kurven (18) und die dazu normale Gerade durch O sind Achsen normaler Symmetrie der Kurve. Beziehen wir m^* auf ihre Symmetrieachsen als Koordinatenachsen, so erhalten wir die neue Gleichung von m^* , indem wir die Werte (17) in (11) substituieren. Die auf die Symmetrieachsen bezogene Gleichung von m^* ist somit:

$$(19) \quad (x'^2 + y'^2 - 2)^2 \cos^2 \varphi_0 + (\sin^2 \varphi_0 + \operatorname{ctg}^2 \lambda) y'^2 \cdot (x'^2 + y'^2 - 4) = 0.$$

B. Für den transversalen und den normalen Entwurf vereinfachen sich die Gleichungen der Parallelkreis- und Meridianbilder bedeutend.

I. Transversaler Entwurf, $\varphi_0 = 0$, der Kartenmittelpunkt ist ein Punkt des Äquators. Die Gleichungen des Parallelkreis- und des Meridianbildes lauten

$$(20) \quad (x^2 + y^2 - 4) y^2 + 4 \sin^2 \varphi = 0$$

und

$$(21) \quad (x^2 + y^2 - 4) (x^2 + y^2 \sin^2 \lambda) + 4 \sin^2 \lambda = 0.$$

Für $\lambda = 90^\circ$ geht (21) über in $(x^2 + y^2 - 2)^2 = 0$, d. h. im transversalen Entwurf bildet sich der Meridian $\lambda = 90^\circ$ als Kreis um O mit dem Radius $\sqrt{2}$ ab, was auch direkt aus der Definition der Lambertschen Projektion geschlossen werden kann, da dieser Kugelkreis ein Horizontalkreis ist. Wird nur, wie dies in den Atlanten gewöhnlich geschieht¹⁾, die Halbkugel mit dem sphärischen

¹⁾ Siehe z. B. Schweiz. Schulatlas, Bl. 118 u. 119, Australien und Polynesien. Vgl. auch die Netze in Germain, Projections des cartes géographiques, Paris.

Mittelpunkt O abgebildet, so ist der genannte Kreis Umriss der Karte; das Bild der andern Halbkugel ist der von diesem Kreise und dem Kreise Q^* begrenzte Kreisring.

II. Normaler Entwurf, $\varphi_0 = 90^\circ$, der Kartenmittelpunkt ist der Nordpol. In diesem Falle sind die Parallelkreise Horizontalkreise und die Meridiane Hauptkreise durch O , erstere gehen, wie in § 1 aus der Definition der Lambertschen Projektion geschlossen wurde, in Kreise um O , letztere in Strahlen durch O über. In der Tat, setzen wir in den Gleichungen (16) und (18) $\varphi_0 = 90^\circ$, so ergeben sich als Parallelkreisbilder die Kreise

$$(22) \quad x^2 + y^2 = 2(1 - \sin \varphi)$$

und als Meridianbilder die Strahlen

$$(23) \quad y = -x \operatorname{ctg} \lambda.$$

§ 4.

Stehen auch die bei Lamberts flächentreuer Azimutalprojektion auftretenden Kurven vierter Ordnung mit keiner besondern Klasse von Kurven vierter Ordnung in einer Beziehung, so besitzen sie doch eine Reihe interessanter Eigenschaften. Wir begnügen uns damit, kurz darauf hinzuweisen, dass unsere Kurven hübsche Beispiele für die Quadratur ebener Kurven liefern.

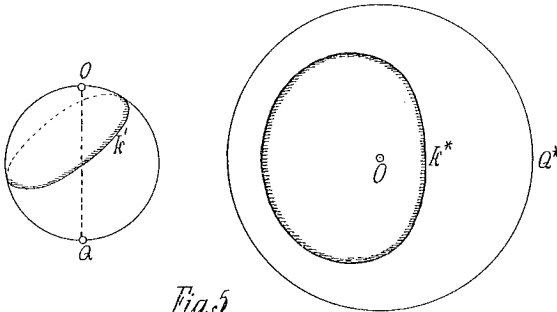


Fig. 5.

Jede der Kurven (5), (9), (11), (14), (16), (18), (19), (20), (21) besteht aus zwei kongruenten Ovalen, den Bildern zweier, zu einer gewissen Ebene durch die z -Achse symmetrischer Kugelkreise. Das Oval k^* sei das Bild des Kreises k (Fig. 5). Der ganzen Kugelfläche entspricht der Kreis Q^* ; Kugelfläche und Kreis besitzen den Flächeninhalt 4π . Die Kugelfläche wird durch den Kreis k , der Kreis Q^* durch das Oval k^* in zwei Teile zerlegt, die paarweise flächengleich sind; die Kugelkalotte, die Q nicht enthält, entspricht dem Innern des Ovals, die andere Kalotte dem von dem Oval k^* und dem Kreise Q^* begrenzten Flächenstück. Wie jeder Grosskreis, z. B. jeder

Meridian, die Kugel halbiert, so halbiert auch sein Bild, z. B. jedes Oval von (18), (19), (21), den Kreis Q^* . Versucht man diese und andere Eigenschaften, die eine direkte Folge der Flächentreue der Lambertschen Projektion sind, auf dem Wege der Rechnung herzuleiten, so ergeben sich eine Reihe interessanter Übungsbeispiele der Integralrechnung. Wir verweisen in diesem Punkte auf einen demnächst im „Enseignement mathématique“ erscheinenden Aufsatz.
