

Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik.

Von

ERNST MEISSNER.

Es werden im folgenden einige Untersuchungen angestellt, die an eine Arbeit anschliessen, welche Herr Hurwitz in den Annales de l'école normale von 1902 publiziert hat. (Zitat Seite 311). Mit Hilfe von Fourier-Entwicklungen werden einige Klassen konvexer geschlossener Kurven untersucht, deren Stützgeradenfunktionen (vergl. Abschnitt I) gewisse Periodizitätseigenschaften besitzen. In den Entwicklungen spielt der Steinersche Krümmungsschwerpunkt eine gewisse Rolle. Im letzten Abschnitt sind einige ihn betreffende Sätze zusammengestellt.

I.

Sei C eine geschlossene, konvexe Kurve mit endlich vielen Ecken E^1), und ohne geradlinige Randpartien. Im Bezug auf ein Axensystem (x, y) , dessen Anfangspunkt O im Innern von C gelegen sein mag, habe die Stützlinie $t(u)$, die den Winkel u mit der x -Axe bildet, die Gleichung

$$x \sin u - y \cos u - p(u) = 0, \quad (1)$$

sodass $p(u)$ die Länge des Lotes OQ bedeutet. (Fig. 1.) Durch die Funktion $p(u)$, ihre Stützgeradenfunktion²⁾, ist die Kurve C vollständig charakterisiert. Sie hat die Periode 2π , ist stetig und differenzierbar, und $p'(u)$ bedeutet die Länge der Strecke QP . Im Berührungspunkt $P(u)$ von $t(u)$ sei der Krümmungsradius von C gleich $\varrho(u)$. Wir machen darüber folgende Voraussetzung: Ist $t(u)$ eine durch eine Ecke E gehende Stützlinie, und nicht gerade eine der Grenzlagen t_1, t_2 (Fig. 2), so soll $\varrho(u) = 0$ gesetzt werden. Für

¹⁾ Eine konvexe Kurve kann abzählbar unendlich viele Ecken haben. Ein einfaches Beispiel gibt Jensen: Konvexe Funktionen, Acta math. tome 30, pag. 191.

²⁾ Minkowski: Volumen und Oberfläche. Math. Ann. Bd. 57, pag. 459.

die zu den Grenzlagen gehörigen Werte von u , sowie für eine endliche Anzahl weiterer Ausnahmepunkte sei $\varrho(u)$ zunächst noch unbestimmt. Für alle übrigen Werte von u im Intervall $0 \leq u < 2\pi$ sei $\varrho(u)$ beschränkt und stetig, und habe nicht unendlich viele Ma-

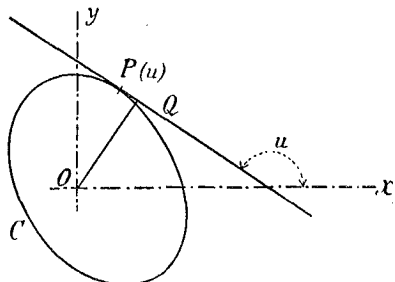


Fig. 1.

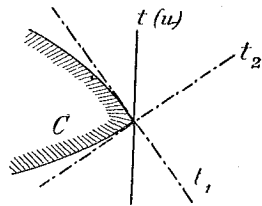


Fig. 2.

xima und Minima. Alsdann lässt sich $\varrho(u)$ in eine Fourier-Reihe nach u entwickeln, die stets konvergiert und bei geeigneter Festsetzung von $\varrho(u)$ für die Ausnahmepunkte stets $\varrho(u)$ darstellt. Sei etwa

$$(2) \quad \varrho(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + a'_n \sin nu).$$

Höchstens von den Ausnahmepunkten abgesehen gelten dann die Gleichungen

$$(3) \quad \varrho(u) = \frac{ds}{du} \quad \varrho(u) \cos u = \frac{dx}{du} \quad \varrho(u) \sin u = \frac{dy}{du},$$

wo (x, y) die Koordinaten von $P(u)$, s die zu $P(u)$ gehörige Bogenlänge bedeuten. Da C eine geschlossene Kurve ist, so folgt

$$\int_C dx = \int_0^{2\pi} \varrho(u) \cos u du = 0 \quad \int_0^{2\pi} \varrho(u) \sin u du = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \varrho(u) du = \int_0^{2\pi} ds = L$$

also

$$(4) \quad a_1 = 0, \quad a'_1 = 0, \quad a_0 \pi = L = \text{Länge der Kurve } C.$$

Multipliziert man (2) mit $\cos u$, resp. $\sin u$ und integriert, so ergeben sich die für jedes u gültigen Formeln

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a'_{n+1} + a'_{n-1}}{2n} \cos nu + \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2n} \sin nu \right) \\ y = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2n} \cos nu + \frac{a'_{n+1} - a'_{n-1}}{2n} \sin nu \right) \end{array} \right\},$$

worin ξ und η durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x du \quad \eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y du \quad (6)$$

bestimmt sind, und die Koordinaten des Krümmungsschwerpunktes Σ von C bedeuten. (Vergl. Abschnitt X.) Endlich ergibt sich aus (5) nach (1) für $p(u)$ die Reihenentwicklung

$$p(u) = \frac{a_0}{2} - \eta \cos u + \xi \sin u - \sum_{\kappa=2}^{\infty} \left(\frac{a_{\kappa}}{\kappa^2 - 1} \cos \kappa u + \frac{a'_{\kappa}}{\kappa^2 - 1} \sin \kappa u \right) \quad (7)$$

und analog aus

$$x \cos u + y \sin u - p'(u) = 0$$

$$p'(u) = \xi \cos u + \eta \sin u + \sum_{\kappa=2}^{\infty} \left(\frac{\kappa a_{\kappa}}{\kappa^2 - 1} \sin \kappa u - \frac{\kappa a'_{\kappa}}{\kappa^2 - 1} \cos \kappa u \right). \quad (7')$$

Die hiemit abgeleiteten Formeln, die für das Folgende Verwendung finden, sind von A. Hurwitz¹⁾ gegeben worden.

II.

Im weitem werden einige fundamentale Formeln zusammengestellt.

Seien $t_1 t_2 t_3$ (Fig. 3) irgend drei Tangenten an die Kurve C , $P_1 P_2 P_3$ ihre Berührungspunkte, $Q_1 Q_2 Q_3$ die Fußpunkte der vom Anfangspunkt auf sie gefällten Lote, und $T' T''$ die Schnittpunkte der Tangenten ($t_1 t_2$) und ($t_2 t_3$). Sei ferner

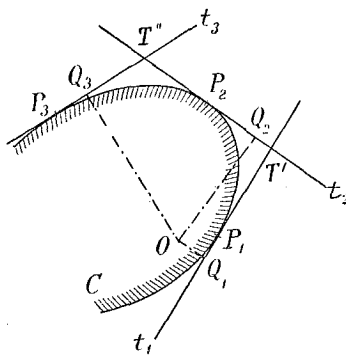


Fig. 3.

$$\angle Q_1 O Q_2 = \alpha \quad \angle Q_2 O Q_3 = \beta$$

$$O Q_1 = p(u) = p_1 \quad O Q_2 = p(u + \alpha) = p_2 \quad O Q_3 = p(u + \alpha + \beta) = p_3,$$

dann ist

$$Q_1 P_1 = \frac{dp(u)}{du} = p'_1 \quad Q_2 P_2 = \frac{dp(u + \alpha)}{du} = p'_2 \quad O Q_3 = \frac{dp(u + \alpha + \beta)}{du} = p'_3$$

und für die Tangentenlängen

$$\tau_1 = P_1 T', \quad \tau_2 = P_2 T', \quad \tau_3 = P_2 T''$$

¹⁾ A. Hurwitz: Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'école norm. T. XIX 1902, pag. 371, 380.

ergeben sich die Gleichungen

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} \tau_1 \sin \alpha &= p_2 - p_1 \cos \alpha - p'_1 \sin \alpha \\ \tau_2 \sin \alpha &= p_1 - p_2 \cos \alpha + p'_2 \sin \alpha \\ \tau_3 \sin \beta &= p_3 - p_2 \cos \beta - p'_2 \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

Bezeichnet

$$s = \tau_2 + \tau_3$$

die Seite $T' T''$, so wird

$$(9) \quad s \sin \alpha \sin \beta = p_1 \sin \beta + p_3 \sin \alpha - p_2 \sin (\alpha + \beta).$$

Der Bogen $P_1 P_2 = b$ der Kurve C berechnet sich aus

$$(10) \quad b = \int_u^{u+\alpha} \varrho(u) du = \int_u^{u+\alpha} (p(u) + p''(u)) du = \int_u^{u+\alpha} p(u) du + p'_2 - p'_1,$$

da für den Krümmungsradius die Gleichung gilt:

$$\varrho(u) = p(u) + p''(u).$$

Endlich ergeben sich noch für die Koordinaten $(X' Y')$ von T' die Relationen

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} X' \sin \alpha &= p_2 \cos u - p_1 \cos (u + \alpha) \\ Y' \sin \alpha &= p_2 \sin u - p_1 \sin (u + \alpha) \end{aligned} \right\}$$

III.

Die rechten Seiten der Gleichungen (8) (9) (10) und (11) lassen sich vermittelst der Entwicklungen (7) (7¹) für $p(u)$ und $p'(u)$ als Fourier-Reihen des Winkels u darstellen. Dasselbe gilt für jede Linearkombination beliebig vieler dieser Ausdrücke. Derartige lineare Kombinationen sind z. B. Seite, Umfang und Schwerpunkt eines der Kurve C umschriebenen Polygons. Sollen sie für jede Lage (u) des Polygons denselben Wert haben, so müssen in der Darstellung durch die Fourier-Reihe alle variablen Glieder verschwinden. Dies liefert im allgemeinen eine Reihe von Bedingungen für die Koeffizienten $a_n a'_n$, die in (7) auftreten, und damit auch für die Form der Kurve C .

Im folgenden wird dies für einige besondere Fälle ausgeführt.

IV.

Wir legen an die Kurve C jetzt n Stützlinien unter den respektiven Winkeln

$$u_0 = u, \quad u_1 = u + \alpha, \quad u_2 = u + 2\alpha, \dots, \quad u_{n-1} = u + (n-1)\alpha, \quad \alpha = \frac{2\pi}{n}$$

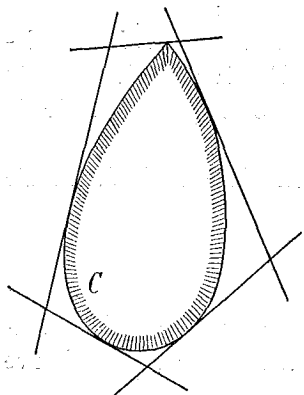


Fig. 4.

und nennen U_n den Umfang des von ihnen gebildeten gleichwinkligen C umschriebenen konvexen¹⁾ n -Ecks. (Fig. 4.) Nach (9) ergibt sich für die Länge s_n der in $t(u_n)$ liegenden Seite desselben:

$$s_n \sin \alpha = p(u_{n-1}) + p(u_{n+1}) - 2p(u_n) \cos \alpha \quad (9')$$

und somit folgt

$$U_n = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \sum_{\kappa=0}^{n-1} p(u + \kappa \alpha) \quad (12)$$

und wenn man die Entwicklung (7) einsetzt:

$$U_n = \left(\frac{n}{\pi} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) L - 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 n^2 - 1} [a_{\kappa n} \cos(\kappa n u) + a'_{\kappa n}(\kappa n u)]. \quad (12')$$

Bedeutet U_n^* den Umfang des regulären n -Ecks, das dem Kreis von der Länge L umschrieben ist, so kann dies auch geschrieben werden

$$U_n^* - U_n = 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} [a_n \cos nu + a'_n \sin(nu)] + \dots \right\}.$$

Da in der Entwicklung rechts alle Fourier-Koeffizienten bis zum Index $(n-1)$ null sind, folgt nach einem von A. Hurwitz²⁾ herührenden Satze, dass die stetige Funktion $U_n^* - U_n$ im Intervall $0 \leq u < 2\pi$ wenigstens $2n$ mal verschwindet.

Es gibt also wenigstens zwei verschiedene gleichwinklige C umschriebene n -Ecke vom Umfang U_n^* .

Wir wollen nunmehr alle diejenigen Kurven C bestimmen, für welche *alle* umschriebenen gleichwinkligen n -Ecke denselben Umfang U_n haben. Sie sollen kurz U_n -Kurven genannt werden. Es ergibt sich aus (12') für sie die Bedingung:

$$a_n = 0 \quad a'_n = 0 \quad \text{sobald } \kappa \equiv 0 \pmod{n} \text{ und } \kappa \neq 0 \quad (13)$$

und es wird dann

$$U_n - \frac{n}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) L = U_n^*. \quad (13')$$

Hieraus folgt der Satz:

U_n -Kurven vom selben Polygonumfang haben alle dieselbe Länge.

¹⁾ Es ist nicht ausgeschlossen, dass bei dieser Konstruktion einige der Polygonseiten eine Länge 0 bekommen, dann nämlich, wenn C genügend spitze Ecken aufweist.

²⁾ A. Hurwitz: Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. Math. Ann. Bd. 57, § 9, Satz 9.

Aus der Bedingung (13) folgt ferner der Satz:

Haben alle der Kurve C umschriebenen gleichwinkligen n -Ecke denselben Umfang, so gilt dies auch für die gleichwinkligen umschriebenen Polygone doppelter, dreifacher usw. Seitenzahl.

Die Bedingung für U_n -Kurven kann nach (12) auch durch die Relation

$$(14) \quad \sum_{\kappa=0}^{n-1} p(u + \kappa\alpha) = \text{konstant}$$

ausgedrückt werden. Sie ist also auch erfüllt für $p^*(u) = p(u) + \text{Konstante}$. Aber $p^*(u)$ ist die Stützgeradenfunktion einer Parallelkurve zu U_n . Mithin gilt der Satz:

(Konvexe) Parallelkurven zu U_n -Kurven sind wieder U_n -Kurven.

Nach unserer Definition einer U_n -Kurve ist stets $n > 3$ voraussetzen. Wir wollen aber auch von U_1 - und U_2 -Kurven sprechen, wenn die Relation (14) für $n = 1$ resp. $n = 2$ erfüllt ist.

Für $n = 1$ wird dann $a_\kappa = a'_\kappa = 0$ für alle $\kappa > 0$, und nach (5) also

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + \frac{a_0}{2} \sin u \\ y &= \eta - \frac{a_0}{2} \cos u \end{aligned} \right\}, \quad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{a_0^2}{4}.$$

Die U_1 -Kurven sind also die Kreise der Ebene.

Für $n = 2$ wird

$$p(u) + p(u + \pi) = b = \text{konstant}$$

und wir erhalten die von A. Hurwitz¹⁾ untersuchten Kurven konstanter Breite b . Es ist leicht einzusehen, wie sich die angegebenen Sätze für sie modifizieren.

V.

Für $n = 3$ wird das gleichwinklige n -Eck regulär. Wir wollen nunmehr alle diejenigen Kurven (sie mögen P_n -Kurven heissen, bestimmen, deren sämtliche gleichwinklige umschriebene n -Ecke auch gleichseitig, also regulär sind.

Es muss dann in (9') für irgend zwei Indizes λ, ν

$$\sin \alpha (s_\lambda - s_\nu) = 0$$

sein. Setzt man abkürzend:

¹⁾ In der unter ¹⁾ Seite 311 zitierten Arbeit.

$$A_n = -\frac{a_n}{x^2-1} \quad A'_n = \frac{-a'_n}{x^2-1} \quad (15)$$

$$C_n = \cos(x\lambda\alpha) - \cos(x\nu\alpha) \quad S_n = \sin(x\lambda\alpha) - \sin(x\nu\alpha), \quad (16)$$

so folgt das identische Verschwinden der Reihe

$$\sin \alpha (s_\lambda - s_\nu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\cos n\alpha - \cos \alpha] \left\{ [A_n C_n + A'_n S_n] \cos(xu) + [-A_n S_n + A'_n C_n] \sin(xu) \right\}.$$

Nun wird $\cos(x\alpha) - \cos \alpha = 0$, dann und nur dann, wenn

$$x \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

ist. Es bleiben in diesem Fall die Koeffizienten A_n, A'_n resp. a_n, a'_n keiner Bedingung unterworfen. Ist aber $x \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$, so müssen für beliebiges λ und ν die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_n C_n + A'_n S_n &= 0, \\ -A_n S_n + A'_n C_n &= 0 \end{aligned}$$

gleichzeitig erfüllt werden. Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} A_n (S_n^2 + C_n^2) &= 0, \\ A'_n (S_n^2 + C_n^2) &= 0. \end{aligned}$$

Es ist $(S_n^2 + C_n^2) = 0$, wenn S_n und C_n gleichzeitig null sind, und nach (16) tritt dies dann und nur dann ein, wenn

$$x(\lambda - \nu) \equiv 0 \pmod{n}$$

ist. Da λ und ν beliebige ganze Zahlen bedeuten, so können die A_n, A'_n resp. die a_n, a'_n nur noch in dem Fall von null verschiedene Werte haben, wo

$$x \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{ist.}$$

Die Kurve C ist also eine P_n -Kurve dann und nur dann, wenn alle Fourierkoeffizienten a_n, a'_n verschwinden, sobald x keine der Kongruenzen

$$x \equiv 0 \pmod{n} \quad x \equiv 1 \pmod{n} \quad x \equiv -1 \pmod{n} \quad (17)$$

erfüllt.

Für $n = 4$ ergibt sich die Bedingung

$$a_{4n+2} = 0 \quad a'_{4n+2} = 0 \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel einer solchen Kurve P_4 , für die alle umschriebenen Rechtecke Quadrate sind, ist die durch

$$\rho(u) = 1 - \cos(4u)$$

bestimmte, algebraische Kurve

$$x - \xi = \sin u + \frac{1}{6} \sin 3u + \frac{1}{10} \sin 5u$$

$$y - \eta = \cos u + \frac{1}{6} \cos 3u - \frac{1}{10} \cos 5u.$$

VI.

Verlangt man von einer Kurve P_n , dass sie gleichzeitig auch U_n -Kurve sei, so sind alle ihr umschriebenen regulären n -Ecke vom selben Umfang, also kongruent. Nennen wir solche Kurven R_n -Kurven, so ergibt sich aus (13) und (17), dass für R_n -Kurven ausser a_0 nur diejenigen Koeffizienten a_n, a'_n von null verschieden werden können, für welche

$$(18) \quad \kappa \equiv \pm 1 \pmod{n} \quad \text{wird.}$$

Die R_n -Kurven besitzen eine bemerkenswerte kinematische Eigenschaft:

Sie lassen sich zwangsläufig in einem starren regulären n -Eck so bewegen, dass sie während der Bewegung stets alle Seiten desselben berühren. Infolge dessen schneiden sich die n -Normalen in den Berührungsstellen alle in einem Punkte (dem Momentanzentrum).

Solche Kurven sind in den einfachsten Fällen von Reulaux¹⁾ angegeben worden. Er behandelt spezielle, aus Kreisbogen zusammengesetzte Kurven R_3, R_4 und R_6 . Hier ergeben sich alle Lösungen. Man kann unbegrenzt viele Beispiele algebraischer Kurven sofort angeben, indem man einfach die Reihe

$$\varphi(u) = \frac{a_0}{2} + (a_{n-1} \cos(n-1)u + a'_{n-1} \sin(n-1)u) \\ + (a_{n+1} \cos(n+1)u + a'_{n+1} \sin(n+1)u) + \dots$$

irgendwo abbricht, und die noch verfügbaren Konstanten a_n, a'_n so wählt, dass $\varphi(u)$ nie negativ wird. Wir erwähnen etwa die ellipsenförmige Kurve $\varphi(u) = 1 - \cos 2u$

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} x &= \xi + \frac{\sin u}{2} - \frac{\sin 3u}{6} \\ y &= \eta - \frac{3 \cos u}{2} + \frac{\cos 3u}{6} \end{aligned} \right\}$$

auf die wir noch zurückgreifen werden. (Fig. 6.)

¹⁾ Reulaux: Theoretische Kinematik. Braunschweig 1875.

VII.

Wir wollen jetzt für die Klasse der Kurven R_3 die Polbahnen der erwähnten Bewegung allgemein bestimmen.

Denken wir uns die Kurve R_3 fest, und um sie herum das starre gleichseitige Dreieck Δ so bewegt, dass es sie stets in drei Punkten von den Parametern

$$u, \quad u + \alpha, \quad u - \alpha \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{3} \right)$$

berührt. Die Normalen in diesen Punkten, d. h. die Lote auf ihre Stützlinien, die Dreiecksseiten, müssen sich im Momentanzentrum $M(x, y)$ schneiden. Man erhält für (x, y) somit die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x \cos u + y \sin u - p'(u) &= 0 \\ x \cos(u - \alpha) + y \sin(u - \alpha) - p'(u - \alpha) &= 0 \\ x \cos(u + \alpha) + y \sin(u + \alpha) - p'(u + \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

die verträglich sein müssen. In der Tat hat ihre Determinante den Wert

$$-\sin \alpha [p'(u) + p'(u - \alpha) + p'(u + \alpha)]$$

und die Klammer ist wegen

$$p(u) + p(u + \alpha) + p(u - \alpha) = \text{konstant}$$

stets gleich null.

Für (x, y) ergibt sich daraus

$$\left. \begin{aligned} x \sin \alpha &= p'(u + \alpha) \sin(u - \alpha) - p'(u - \alpha) \sin(u + \alpha) \\ y \sin \alpha &= p'(u - \alpha) \cos(u + \alpha) - p'(u + \alpha) \cos(u - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

Setzt man hier die Entwicklungen (7¹) ein, und beachtet die Bedingungen

$$a_{3\kappa} = 0 \quad a'_{3\kappa} = 0 \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

so folgt

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi - \sum_{\kappa=2}^{\infty} \frac{x}{x^2-1} [a'_{\kappa} \cos(\kappa+1)u - a_{\kappa} \sin(\kappa+1)u] \\ y &= \eta - \sum_{\kappa=2}^{\infty} \frac{x}{x^2-1} [a'_{\kappa} \sin(\kappa+1)u + a_{\kappa} \cos(\kappa+1)u] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hierbei gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem κ nach 3 den Rest +1 oder -1 lässt, und der am Summenzeichen angebrachte Akzent deutet an, dass nur über die durch 3 nicht teilbaren Indizes κ zu summieren ist. Man entnimmt aus den Formeln (20) sofort

$$\begin{aligned} x(u) &= x(u - \alpha) = x(u + \alpha), \\ y(u) &= y(u - \alpha) = y(u + \alpha) \end{aligned}$$

und schliesst daraus, dass nach einer vollen Umdrehung des Dreiecks Δ um die Kurve jeder Punkt der Polbahn (20) dreimal Momentanzentrum geworden ist.

Die Gleichungen (20) liefern die Polbahn P_1 , auch dann, wenn n irgend eine positive ganze Zahl bedeutet.

Wir wollen im folgenden nun das Dreieck Δ festhalten, und die Kurve R_3 sich in ihm bewegen lassen.

Alsdann ist P_1 die bewegliche Polbahn, und es bleibt die feste Polbahn P_2 noch zu bestimmen übrig. Wir wählen ein mit Δ fest verbundenes Koordinatensystem (x^*, y^*) , dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt von Δ liegt, und dessen x^* -Axe einer Seite von Δ parallel geht (Fig. 5). Das Momentanzentrum M habe bezüglich dieses Systems die Koordinaten (x^*, y^*) . Sind q_1, q_2, q_3 seine Abstände von den drei Dreiecksseiten, so wird

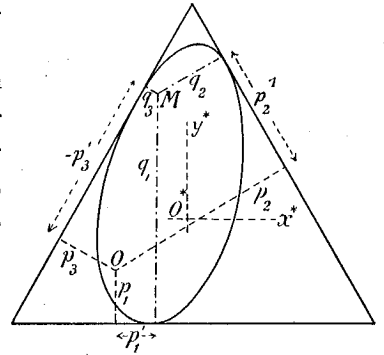


Fig. 5.

$$\left. \begin{aligned} q_1 \sqrt{3} &= \sqrt{3} p(u) + p'(u + \alpha) - p'(u - \alpha) \\ q_2 \sqrt{3} &= \sqrt{3} p(u + \alpha) + p'(u - \alpha) - p'(u) \\ q_3 \sqrt{3} &= \sqrt{3} p(u - \alpha) + p'(u) - p'(u + \alpha) \end{aligned} \right\}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} [p(u + \alpha) - p(u)] + p'(u - \alpha) \\ y^* &= \left(p(u - \alpha) - \frac{h}{3} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} [p'(u + \alpha) - p'(u)] \end{aligned}$$

h ist die Dreieckshöhe.

Bei Einführung der Reihen (7) (7¹) ergibt sich endlich:

$$(21) \quad \begin{cases} x^* = \sum_{n=2}^{\infty} (B_n \cos n u + B'_n \sin n u), \\ y^* = \sum_{n=2}^{\infty} \pm (B'_n \cos n u - B_n \sin n u), \end{cases}$$

wobei

$$(22) \quad \begin{cases} B_n = \left(\mp \frac{\sqrt{3}}{2} a_n + \frac{a'_n}{2} \right) \frac{1}{n \pm 1}, \\ B'_n = \left(-\frac{a'_n}{2} \mp \frac{a_n \sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{n \pm 1} \end{cases}$$

gesetzt ist, und wobei Doppelvorzeichen und Akzent im frühern Sinne zu deuten sind.

Die Gleichungen (21) liefern die feste Polbahn P_2 . Ein voller Umschwung der Kurve R_3 in Δ kann nun so erzeugt werden, dass man die Polbahn P_1 dreimal in ihrer ganzen Länge auf P_2 abrollen lässt.

Besonders einfach werden die Verhältnisse bei den algebraischen Kurven, für welche

$$\varrho(u) = \frac{a_0}{2} + a_m \cos(mu) + a'_m \sin(mu)$$

ist, wo m irgend eine ganze, durch 3 unteilbare Zahl bedeutet. Nach (20) ergibt sich nämlich für P_1 :

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi - \frac{m}{m^2-1} (a'_m \cos(m+1)u - a_m \sin(m+1)u) \\ y &= \eta \pm \frac{m}{m^2-1} (a'_m \sin(m+1)u + a_m \cos(m+1)u) \end{aligned} \right\}$$

also

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{m^2}{(m^2-1)^2} (a_m^2 + a'^2_m) = r_1^2.$$

P_1 ist ein Kreis um den Krümmungsschwerpunkt Σ von R , und mit dem Radius

$$r_1 = \frac{m}{m^2-1} \sqrt{a_m^2 + a'^2_m}.$$

Für die feste Polbahn P_2 folgt noch (21)

$$\begin{aligned} x^* &= B_m \cos(mu) + B'_m \sin(mu) \\ y^* &= \pm B'_m \cos(mu) \mp B_m \sin(mu), \end{aligned}$$

und die Elimination von u liefert

$$x^{*2} + y^{*2} = B_m^2 + B'^2_m = \frac{a_m^2 + a'^2_m}{(m \pm 1)^2} = r_2^2.$$

Auch P_2 ist also ein Kreis. Sein Zentrum liegt im Mittelpunkt von Δ , sein Radius r_2 ist

$$r_2 = \frac{1}{m \pm 1} \sqrt{a_m^2 + a'^2_m}.$$

Für das Verhältnis der Radien beider Kreise bekommt man

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m}{m \pm 1}.$$

Der bewegliche Polkreis umschliesst den festen, oder rollt auf dessen Innenseite je nachdem m nach 3 den Rest $+1$ oder -1 lässt. Je grösser m ist, um so mehr nähert sich die Bewegung einer Rotation, die zugehörige Kurve der Kreisform.

Das Beispiel (19) ist eine Kurve der betrachteten Art. Der Polkreis P_1 hat den Radius

$$r_1 = \frac{2}{3}$$

und den Mittelpunkt der Kurve zum Zentrum. Der Radius r_2 des festen Polkreises ist 1. Die Länge L der Kurve ist

$$L = a_0 \pi = 2 \pi$$

und der Dreiecksumfang nach (13') gleich $6\sqrt{3}$. Der feste Polkreis P_2 ist also der dem Dreieck \triangle eingeschriebene Kreis. (Fig. 6.)

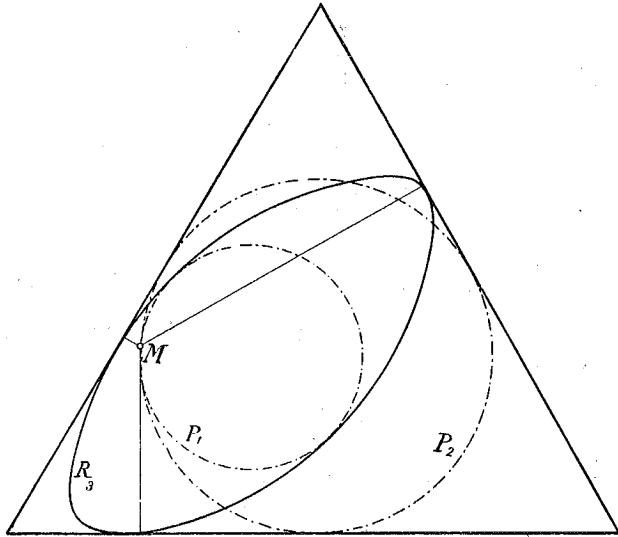


Fig. 6.

VIII.

Wir denken uns wieder wie im IV. Abschnitt einer Kurve C das gleichwinklige n -Eck umschrieben, und berechnen die Koordinaten (x, y) seines Schwerpunktes S .

Nach Gleichung (11) hat die λ -te Ecke des Polygons die Koordinaten x_λ, y_λ , wobei

$$\begin{aligned} x_\lambda \sin \alpha &= p_{\lambda+1} \cos (u + (\lambda - 2) \alpha) - p_\lambda \cos (u + \lambda \alpha), \\ y_\lambda \sin \alpha &= p_{\lambda+1} \sin (u + (\lambda - 2) \alpha) - p_\lambda \sin (u + \lambda \alpha), \end{aligned}$$

und es ergibt sich daraus

$$(23) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{2}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} p(u + \nu \alpha) \sin (u + \nu \alpha), \\ \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = -\frac{2}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} p(u + \nu \alpha) \cos (u + \nu \alpha) \end{cases}$$

Trägt man die Entwicklungen (7) hier ein, so kommt

$$\begin{aligned} x &= \xi - \sum' [\mp A'_k \cos (x \mp 1) u \pm A_k \sin (x \mp 1) u] \\ \eta &= \eta - \sum' [A_k \cos (x \mp 1) u + A'_k \sin (x \mp 1) u] \end{aligned} \quad (23')$$

Wiederum gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $x \equiv +1$ oder $x \equiv -1 \pmod{n}$ und es ist nur über Indizes x zu summieren, die einer dieser Kongruenzen genügen.

Die Kurven S_n , für welche alle Schwerpunkte aller umschriebenen gleichwinkligen n -Ecke zusammenfallen, erfüllen also die Bedingungen

$$a_x = 0 \quad a'_x = 0, \quad \text{sobald } x \equiv \pm 1 \pmod{n}. \quad (24)$$

Der gemeinsame Schwerpunkt ist der Krümmungsschwerpunkt $\mathcal{S}(\xi, \eta)$ der Kurve.

Eine Kurve S_n , die gleichzeitig Kurve R_n ist, ist in Übereinstimmung mit den Bedingungen (24) und (18) ein Kreis. Sie entsteht durch Rotation eines regulären n -Ecks um seinen Mittelpunkt.

Die Kurven T_n , für welche nur die Koeffizienten (a_x, a'_x) von null verschieden sind, deren Index durch n teilbar ist, werden von konzentrischen regulären n -Ecken eingehüllt; denn sie sind gleichzeitig S_n - und P_n -Kurven. Macht man ihren Krümmungsschwerpunkt zum Anfangspunkt 0, so hat die Stützgeradenfunktion die Form

$$p(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} [A_{\lambda n} \cos(\lambda n u) + A'_{\lambda n} \sin(\lambda n u)].$$

Man entnimmt daraus

$$p(u + \alpha) = p(u).$$

Die T_n -Kurven setzen sich also aus n kongruenten Kurvenbögen zusammen.

IX.

Sei C wieder die allgemeine in Abschnitt betrachtete Kurve. Man lege um C einen geschlossenen, undehnbaren Faden von der Länge $A > L$, und spanne ihn von einem Punkte A aus an, so dass er längs $B_1 D B_2$ (Fig. 7) an der Kurve C anliegt, und die Stücke $A B_1 = \tau_1$ $A B_2 = \tau_2$ in zwei Tangenten t_1 t_2 der Kurve zu liegen kommen. Bei gegebenem A ist der Ort aller Punkte A eine C umschliessende Kurve, die mit $Z(A)$ bezeichnet werden soll.

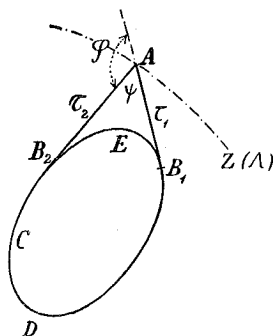


Fig. 7.

Man soll die Kurve C nun so bestimmen, dass es unter den Kurven $Z(A)$ solche gibt, von denen aus C unter konstantem Winkel ψ gesehen wird.

Sei $\varphi = \pi - \psi$, u der Winkel der Tangente t_1 mit der x -Axe, dann bildet die Tangente t_2 mit der x -Axe den Winkel $u + \varphi$, und nach (8) ist

$$(8') \quad \begin{cases} \tau_1 \sin \varphi = p(u + \varphi) - p(u) \cos \varphi - p'(u) \sin \varphi \\ \tau_2 \sin \varphi = p(u) - p(u + \varphi) \cos \varphi + p'(u + \varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

Der Kurvenbogen $b(u) = B_1 E B_2$ ist nach (10) gleich

$$b(u) = \int_u^{u+\varphi} p(u) du + p'(u + \varphi) - p'(u),$$

somit ergibt sich, wenn L wie früher die Länge von C bedeutet:

$$(25) \quad A = L - b(u) + \tau_1 + \tau_2$$

oder nach (8')

$$(25') \quad A = L - \int_u^{u+\varphi} p(u) du + tg \frac{\varphi}{2} [p(u + \varphi) + p(u)]$$

Unsere Aufgabe verlangt, dass A und φ konstant, d. i. von u unabhängig seien. Man erhält für die unbekannte Funktion

$$\int_u^u p(u) du = P(u)$$

des Problems:

$$(26) \quad -P(u + \varphi) + P(u) + tg \frac{\varphi}{2} (P'(u + \varphi) + P'(u)) = \text{konstant},$$

also eine Differentialfunktionalgleichung.

Aus (3₁) ergibt sich für die Bogenlänge von C :

$$s(u) = \int^u \varrho(u) du = \text{konstant} + \frac{a_0 u}{2} + \sum_2^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin n u - \frac{a'_n}{n} \cos n u \right)$$

und für $b(u)$ die Fourier-Reihe

$$(27) \quad \begin{aligned} b(u) = & \frac{a_0 \varphi}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n u}{n} [a_n \sin n \varphi + a'_n (1 - \cos n \varphi)] \\ & + \frac{\sin n u}{n} [-a_n (1 - \cos n \varphi) + a'_n \sin n \varphi]. \end{aligned}$$

Entwickelt man auch die letzten Glieder von (25) in Reihen, so folgt schliesslich die Formel:

$$(28) \quad A = \frac{a_0}{2} \left(2\pi - \varphi + 2 tg \frac{\varphi}{2} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} (D_n \cos n u + D'_n \sin n u).$$

Hierin ist gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{a_n}{n(n^2-1)} d_n + \frac{a'_n}{n(n^2-1)} d'_n \\ D_n &= \frac{-a_n}{n(n^2-1)} d'_n + \frac{a'_n}{n(n^2-1)} d_n \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

und

$$\left. \begin{aligned} d_n &= n(1 + \cos n\varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \sin n\varphi \\ d'_n &= n \sin n\varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - (1 - \cos n\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (28'')$$

Als Bedingungen für $A = \text{Konstante}$ hat man also

$$D_n = 0 \quad D'_n = 0.$$

Die Koeffizienten a_n, a'_n können somit nur dann von null verschieden sein, wenn die Determinante dieser Gleichungen null ist, d. h. wenn für den betreffenden Index n

$$d_n^2 + d_n'^2 = 0 \quad \text{erfüllt ist.}$$

Dies ist der Fall, wenn n und φ die Relationen befriedigen

$$\left. \begin{aligned} n(1 + \cos n\varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= \sin n\varphi \\ n \sin n\varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= 1 - \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (0 < \varphi < \pi).$$

Beachtet man, dass dann $(1 + \cos n\varphi)$ und $\sin n\varphi$ nicht null sind, so können nach Einführung von

$$x = \frac{\varphi}{2}$$

diese zwei Gleichungen ersetzt werden durch die eine:

$$\frac{1}{n} \operatorname{tg}(nx) = \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \quad (29)$$

Es fragt sich, ob bei gegebenem x positiv ganzzahlige Lösungen $n \geq 2$ dieser Gleichung existieren, und ob es eventuell deren unendlich viele gibt.

Sind $x_1, x_2 \dots x_j \dots$ die Lösungen, so bleiben für die gesuchte Kurve C die Koeffizienten

$$a_{nj}, a'_{nj} \quad j = 1, 2, \dots$$

völlig willkürlich, während die übrigen alle gleich null sind (Ausnahme ist a_0). Ist für den gegebenen Wert von x keine Lösung vorhanden, so ist der Kreis die einzige Kurve C , die der vorgeschriebenen Bedingung genügt.

Die Beantwortung der gestellten Frage wird sehr schwierig sein. Wir begnügen uns damit, zu zeigen, dass eine im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ überall dicht liegende Menge von Werten x existiert, für welche je-

weilen die Gleichung (29) wenigstens eine ganzzahlige Lösung $\kappa \geq 2$ besitzt.

Wir denken uns ein beliebiges ganzzahliges κ gegeben, und betrachten (29) als Gleichung für das zugehörige x . Zeichnet man sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Kurven $y_1 = tg x$ und $y_2 = \frac{1}{\kappa} tg \kappa x$ auf, so ergibt eine Diskussion ihrer Bilder folgendes Resultat:

Die Gleichung (29) hat im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ stets $\nu = \left[\frac{\kappa - 2}{2} \right]$ verschiedene Lösungen

$$x_1(\kappa) \quad x_2(\kappa) \quad x_\nu(\kappa).$$

$\left[\frac{\kappa - 2}{2} \right]$ bedeutet dabei die grösste in $\frac{\kappa - 2}{2}$ steckende ganze Zahl.

Die ν -Lösungen liegen separiert in den ν -Intervallen, die man erhält, wenn man die Strecke $(0 \dots \frac{\pi}{2})$ in κ -gleiche Teile teilt, und dann die geraden Teilstücke und die einen der Punkte $0, \frac{\pi}{2}$ enthaltenden ungeraden unterdrückt.

Die frühere Behauptung folgt jetzt aus dem Umstande, dass die ν -Intervalle für genügend grosses κ beliebig klein werden.

Sei jetzt C_n die Kurve, die aus C entsteht, wenn alle Koeffizienten a_n, a'_n gleich null gesetzt werden mit Ausnahme von a_0, a_n, a'_n . Für C_n ist dann

$$q(u) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos(nu) + a'_n \sin(nu)$$

$$p(u) = \frac{a_0}{2} - \eta \cos u + \xi \sin u - \frac{a_n}{n^2 - 1} \cos nu - \frac{a'_n}{n^2 - 1} \sin nu$$

und die Gleichungen (5) liefern die Parameterdarstellung der Kurve.

Die obenstehenden Resultate geben für C_n -Kurven folgenden Satz:

Unter den zu C_n gehörigen Kurven $Z(A)$ gibt es im ganzen $\nu = \left[\frac{n - 2}{2} \right]$ verschiedene, von denen aus jeweiligen C_n unter festem Winkel gesehen wird. Die konstanten Schwinkel haben der Reihe nach die Werte:

$$\psi_1 = \pi - 2x_1(n); \quad \psi_2 = \pi - 2x_2(n); \quad \psi_\nu = \pi - 2x_\nu(n)$$

und die zugehörigen Fadenlängen A sind:

$$A_1 = L \left(\frac{\pi - x_1(n)}{\pi} + \frac{tg(x_1(n))}{\pi} \right); \quad A = L \left(\frac{\pi - x_\nu(n)}{\pi} + \frac{tg(x_\nu(n))}{\pi} \right)$$

Beispiel:

Der kleinste Wert von κ , für den $\nu > 0$ wird, ist $\kappa = 4$. Es wird $\nu = 1$, und

$$\begin{aligned} x(4) &= \pi \cdot 0,3647 & A &= 1,347 \cdot L. \\ &= 65^\circ 54' 18'' \end{aligned}$$

Macht man durch passende Wahl der Axen $a'_4 = 0$, $\xi = \eta = 0$, und setzt etwa $2a_4 = a_0$, so wird für C_4 :

$$\varrho(u) = \frac{a_0}{2} (1 + \cos(4u)) \quad p(u) = \frac{a_0}{2} \left(1 - \frac{\cos 4u}{15}\right).$$

Die Kurve C_4 (Fig. 8) hat die Parametergleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a_0}{2} \left(\sin u + \frac{\sin 3u}{6} + \frac{\sin 5u}{10} \right) \\ y &= \frac{a_0}{2} \left(-\cos u + \frac{\cos 3u}{6} - \frac{\cos 5u}{10} \right) \end{aligned} \right\}$$

und ist gleichzeitig auch Kurve P_4 , R_3 und R_5 , T_4 und S_ν ($\nu \equiv 3,5$).

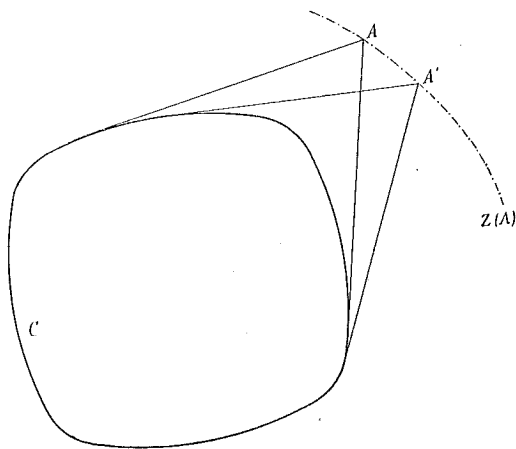


Fig. 8.

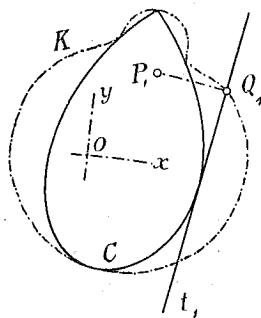


Fig. 9.

X.

Es sollen jetzt noch einige Sätze über den Krümmungsschwerpunkt $\Sigma(\xi, \eta)$ konvexer Kurven abgeleitet werden.

Sei wieder C die Kurve des I. Abschnittes, $P_1(x_1, y_1)$ ein beliebiger Punkt ihrer Ebene. Wir fällen von P_1 aus auf alle Stützlinien von C die Lote. Die Fusspunkte Q_1 derselben liegen auf der geschlossenen Fusspunktskurve $K(P_1)$, (Fig. 9), die C einfach umschliesst, wenn

P_1 im Innern von C liegt, wenn P_1 ausserhalb C liegt, in P_1 aber einen Doppelpunkt besitzt. Man hat dann

$$P_1 Q_1 = p_1(u) = p(u) - x_1 \sin u + y_1 \cos u$$

und wegen (7)

$$p_1(u) = \frac{a_0}{2} - (x_1 - \xi) \sin u + (y_1 - \eta) \cos u - \sum_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} (a_n \cos x u + a'_n \sin x u).$$

Für die vom Lote $P_1 Q_1$ beim Umlauf der Stützlinie beschriebene Fläche, den „Inhalt“ F der Fusspunktkurve $K(P_1)$ ergibt sich

$$F = \int_0^{2\pi} p_1^2(u) du = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_2^{\infty} \frac{a_n^2 + a'_n{}^2}{x^2 - 1} \right\} + \frac{\pi}{2} [(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2].$$

Ist F_0 der Inhalt der Fusspunktkurve $K(\Sigma)$ des Krümmungsschwerpunkts Σ , δ der Abstand des Punktes P_1 von Σ , so folgt hieraus

$$F = F_0 + \frac{\delta^2 \pi}{2}$$

oder der Satz:

Der Krümmungsschwerpunkt Σ ist derjenige Punkt der Ebene der Kurve C , für welchen der Inhalt F der Fusspunktkurve minimal wird. F ist konstant auf Kreisen mit dem Mittelpunkt Σ und um den halben Inhalt derselben grösser als der Minimalwert.

Dieser Satz rührt von Jakob Steiner¹⁾ her, der dem Punkt Σ eine ausführliche Abhandlung gewidmet hat, und von dem auch der Name „Krümmungsschwerpunkt“ herrührt. Sofern nämlich für C der Krümmungsradius $\varrho(u)$ nie null wird, kann man Σ auffassen als gewöhnlichen Schwerpunkt der Kurve C , wenn sie in jedem Punkt mit einer Masse belegt wird, die der Krümmung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ in diesem Punkte proportional ist. In der Tat, nach (6) ist dann

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x du = \frac{\int_c \left(\frac{1}{\varrho}\right) \cdot x ds}{\int_c \left(\frac{1}{\varrho}\right) ds} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\int_c \left(\frac{1}{\varrho}\right) y ds}{\int_c \left(\frac{1}{\varrho}\right) ds}.$$

¹⁾ J. Steiner. Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Figuren. Werke Bd. II. Pag. 97.

Treten Ecken an der Kurve auf, so ist diese Art der Massenbelegungen etwas zu modifizieren.

Es sei $S(x^*, y^*)$ der gewöhnliche Schwerpunkt der Kurve C . Dann ist

$$x^* = \frac{1}{L} \cdot \int_c x ds = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} x \cdot \varrho(u) du = \frac{1}{a_0 \pi} \int_0^{2\pi} x(u) \varrho(u) du$$

$$y^* = \frac{1}{L} \cdot \int_c y ds = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} y \cdot \varrho(u) du = \frac{1}{a_0 \pi} \int_0^{2\pi} y(u) \varrho(u) du.$$

Setzt man für $x(u)$, $y(u)$ und $\varrho(u)$ die Fourierreihen (5) und (2) ein, so folgt

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \xi + \frac{1}{2 a_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n' a_{n+1} - a_n a_{n+1}'}{n(n+1)} \\ y^* &= \eta + \frac{1}{2 a_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1} + a_n' a_{n+1}'}{n(n+1)} \end{aligned} \right\}$$

Die rechter Hand auftretenden Summen werden null für die Kurven U_2 , S_3 , S_4 , T_n und für die Kurven R_n , wenn $n > 3$ ist.

Für alle diese Kurven, insbesondere für Kurven konstanter Breite (U_2) und Kurven mit Mittelpunkt (T_2) fällt also der Krümmungsschwerpunkt Σ mit dem gewöhnlichen Schwerpunkt S zusammen.

Zu einem bemerkenswerten Satze gelangt man, wenn man gleichzeitig mit C eine zweite Kurve C^* mit der Stützgeradenfunktion $p^*(u)$ und von gleicher Länge ins Auge fasst. Legt man C und C^* so, dass die zwei Krümmungsschwerpunkte Σ und Σ^* zusammenfallen, so ergibt sich nach (7) für $p(u) - p^*(u)$ eine Fourier-Entwicklung, in der das konstante Glied und die Glieder mit $\cos u$ und $\sin u$ verschwinden. Nach einem schon früher erwähnten¹⁾ Hurwitzschen Satze schliesst man, dass die stetige Funktion $p(u) - p^*(u)$ im Intervall $0 \leq u < 2\pi$ wenigstens vier Strecken konstanten Vorzeichens besitzt. Einer Nullstelle von $p(u) - p^*(u)$ korrespondiert eine gemeinsame Stützlinie von C und C^* . Gemeinsamen Stützlinien in gemeinsamen Ecken von C und C^* entsprechen Nullstellen von $p(u) - p^*(u)$, die als in derselben Strecke konstanten Zeichens liegend, angesehen werden können. Somit folgt die Existenz von wenigstens vier C und C^* gemeinsamen Stützgeraden der Art, dass keine zwei von ihnen Stützlinien derselben Ecke sind. Man darf hieraus auf die Existenz von wenigstens vier Schnittpunkten der Kurven C und C^* schliessen, und hat somit den Satz:

¹⁾ Zitat ²⁾ Seite 313.

Haben zwei konvexe Kurven gleicher Länge die Krümmungsschwerpunkte gemein, so schneiden sie sich in wenigstens vier Punkten.¹⁾

Als spezieller Fall folgt der Satz:

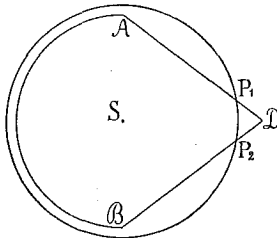
Dreht man eine Kurve um ihren Krümmungsschwerpunkt Σ , so haben je zwei verschiedene Lagen stets wenigstens vier Punkte gemein.

Betrachtet man zwei infinitesimal benachbarte Lagen, so erhält man weiters den Satz:

Vom Krümmungsschwerpunkt Σ aus gehen stets wenigstens vier Normalen an die Kurve.²⁾

Zu weitem Theoremen führt die Untersuchung der Funktion $p'(u) - p^{*'}(u)$. Ist sie im Intervall $u_1 \leq u < u_2$ identisch null, so sind die zugehörigen Bogen von C und C^* Parallelkurven. Ist u_0 eine Nullstelle von $p'(u) - p^{*'}(u)$, so steht die Gerade $P(u_0) P^*(u_0)$ in $P(u_0)$ normal zur Stützgeraden $t(u_0)$ und in $P^*(u_0)$ normal zu $t^*(u_0)$. Wir nennen eine solche Gerade eine gemeinsame Normale von C und C^* , und zwar eine „gleichsinnige“, weil beim Durchlaufen derselben die Kurven C und C^* entweder beide beim Eintreten ins Kurveninnere oder beide beim Verlassen derselben normal durchsetzt werden. (Fig. 10.) — Auch einer Nullstelle der Funktion $p'(u + \pi) + p^{*'}(u)$ entspricht eine gemeinsame Normale von C und C^* , aber eine ungleichsinnige, d. h. eine solche, die normal in die eine Kurve eintritt, und aus der andern normal austritt. (Fig. 11.) Eine gemeinsame Normale kann nur dann gleichzeitig gleichsinnig und ungleichsinnig sein, wenn sie für beide Kurven Binormale ist.

¹⁾ Der analoge Satz für den gewöhnlichen Schwerpunkt S gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:



Die Kurve C bestehe aus einem Halbkreis vom Radius r und Zentrum S und zwei gleichen Strecken AD, BD von der Länge a . Man wähle a so, dass der Schwerpunkt von C nach S fällt

$$\left(a = \frac{r}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{17}} \right).$$

Ist ϱ der Radius des Kreises C^* derselben Länge wie C , und vom Mittelpunkt S , so ergibt sich

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{17}}}{2\pi} = 1,0093 > 1.$$

C^* schneidet C also nur in zwei Punkten P_1, P_2 auf AD resp. BD . Will man geradlinige Ränder bei C vermeiden, so ersetze man AD und BD durch genügend flache Kreisbogen, und runde die Ecken genügend fein etwa durch kleine Kreise ab.

²⁾ Normale von C ist dabei jede Gerade, die in einem Punkte von C senkrecht auf einer Stützlinie in jenem Punkte steht.

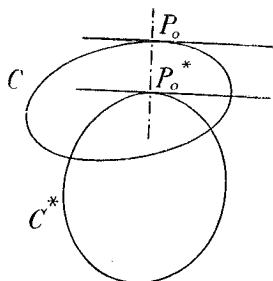


Fig. 10.

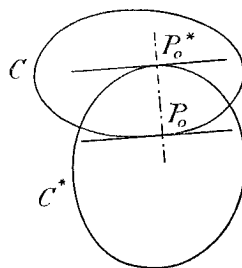


Fig. 11.

Man hat nun nach (7') die Entwicklungen

$$(30) \quad \begin{cases} p'(u) - p^{*'}(u) = (\xi - \xi^*) \cos u + (\eta - \eta^*) \sin u + \dots \\ p'(u + \pi) + p^{*'}(u) = -(\xi - \xi^*) \cos u - (\eta - \eta^*) \sin u + \dots \end{cases}$$

und entnimmt daraus, dass beide Funktionen wenigstens zweimal null werden im Intervall $0 \leq u < 2\pi$. Dies ergibt den Satz:

Zwei beliebige Kurven C, C^* haben stets wenigstens zwei gleichsinnige und wenigstens zwei ungleichsinnige gemeinsame Normalen.

Vereinigt man nun die Krümmungsschwerpunkte Σ, Σ^* der beiden Kurven, so verschwinden in (30) auch die Glieder mit $\cos u, \sin u$, und die beiden Funktionen werden jede in $(0 \leq u < 2\pi)$ wenigstens viermal null. Dies lässt sich in den Satz fassen:

Zwei Kurven C, C^* mit gemeinsamen Krümmungsschwerpunkten Σ, Σ^* besitzen wenigstens vier gleichsinnige und wenigstens vier ungleichsinnige gemeinsame Normalen.

Zürich, 14. Juni 1909.