

Das Wechselfeld in Drahtrollen.

Von

FRANZ RUSCH.

Einleitung.

Schon frühe hat man erkannt, dass der Widerstand bezw. die Impedanz eines Wechselstromkreises mit wachsender Frequenz zunehmen müsse.

Eine Theorie des sog. Skineffekts für den geraden Draht wurde bald und ohne viel Mühe gegeben.

Experimentell festgestellt wurde die Impedanzzunahme von Drahtrollen, hier in Zürich, durch Tallquist¹⁾, der unter Prof. Weber mit einem Pendelunterbrecher Kurven von Schwingungsvorgängen im Kondensatorkreis aufnahm, desgleichen durch Seiler²⁾ der unter Prof. Dr. Kleiner mit Verwendung des Helmholtzschen Pendels sich ebenfalls im wesentlichen mit der experimentellen Prüfung der Kirchhoffschen Formeln befasste.

Seiler fand, dass das experimentell ermittelte Dekrement, von dem aus der Kirchhoffschen Formel gewonnenen, die sonst die Erscheinungen (Schwingungsdauer, Amplitude) sehr gut wiedergab, erheblich abwich, besonders im Gebiet der hohen Schwingungszahlen.

Herr Prof. Kleiner liess die Sache weiter untersuchen. Lomsché³⁾ und Eichhorn⁴⁾ nahmen auf seine Veranlassung hin für verschiedene Spulen Schwingungskurven auf und verglichen die hieraus abgeleiteten Dekremente mit den nach der Kirchhoffschen Formel berechneten.

Auch sie fanden völlig übereinstimmend mit Seiler, dass die experimentellen Dekremente die berechneten beträchtlich überstiegen.

Aber während die Ergebnisse Eichhorns, in die sich übrigens ein erheblicher Rechenfehler eingeschlichen hatte, so dass ein Teil der

¹⁾ Wied. Ann. 60, pag. 218.

²⁾ Wied. Ann. 61, pag. 30.

³⁾ Diss. Zürich 1903.

⁴⁾ Diss. Zürich 1904.

experimentellen Dekremente kleiner erscheint, als die theoretischen [er übersieht nämlich bei einem Teil seiner Resultate die Multiplikation mit dem Modul der natürlichen Logarithmen], mehr qualitativer Natur sind, kommt Lomsché so weit, eine Kurve aufzustellen, die die Abhängigkeit der Grösse $\left(\frac{W}{2L}\right)$, [die theoretisch nach Thomson-Kirchhoff konstant ist], von der Schwingungsdauer (T) darstellt.

Dolezalek¹⁾ veröffentlichte in den Annalen der Physik eine Untersuchung über die Widerstandszunahme von Selbstinduktionsnormalien mit zunehmender Wechselzahl. Die Wechselströme waren von einer Hochfrequenzmaschine erzeugt. Das Feld, das sie hervorbrachten, hatte also die Gleichung:

$$H = A \cos (n t) + B \sin (n t).$$

Dolezalek konstatierte auch eine Abnahme der Selbstinduktion mit zunehmender Schwingungszahl (n), während er für die Widerstandszunahme mit steigender Frequenz die empirische Formel setzen zu dürfen glaubte:

$$R' = R + k n^2.$$

R' = Wechselstromwiderstand

R = Gleichstromwiderstand

k = Koeffizient, der mit zunehmender Drahtdicke wächst (eine Behauptung, die mit meinen Beobachtungen völlig übereinstimmt).

Kurz nachdem Dolezalek seine Versuche veröffentlicht hatte, gab M. Wien²⁾ auf Grund der alten Anschauung, die mit Selbstinduktionskoeffizienten und Wirbelströmen operiert, eine Theorie der Erscheinung.

Er fand für nicht allzu hohe Schwingungszahlen die Formel:

$$W' - W = \frac{4 \pi^6 m^3 \varrho^4}{(r_1 + r_2) \sigma} \left(1 + \frac{3 r_1^2}{(r_1 + r_2)^2}\right) N^2.$$

σ = spez. Widerstand

m = Windungszahl

ϱ = Drahtradius

r_1 = innerer Spulenradius

r_2 = äusserer „

Für höhere Schwingungszahlen fand er eine Reihenentwicklung, von der er selbst sagt, dass sie schlechte Konvergenz zeige.

Nun nahm Sommerfeld³⁾ das Problem in Angriff und löste es,

¹⁾ Drudes Ann. 12, pag. 1142.

²⁾ Drudes Ann. 14, pag. 1.

³⁾ Drudes Ann. 15, pag. 673.

wie mir scheint, völlig befriedigend und zwar mit Hilfe der Maxwell'schen Theorie.

Er fasst nicht mehr das Feld um den einzelnen Leiter, sondern den ganzen Kraftlinienstrom, der die Spule durchsetzt, ins Auge und trifft damit jedenfalls das Wesen der Sache.

Allerdings muss er folgende vereinfachende Voraussetzungen machen:

1. Die Spule ist unendlich lang.
2. Der Leiter von quadrat. Querschnitt.
3. Die Dicke der Isolation ist Null.

Wenn die Spule unendlich lang ist, dann verläuft $[\mathfrak{H}]$ (das Feld) parallel der Z -Achse, während die \mathfrak{E} (elektrische Kraft) = Linien Kreise um die Achse Z bilden. (Fig. 1.)

1. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_Z$
2. $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\varphi$.

Das erzwungene Feld hat die Zeitgleichung

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \cdot e^{int},$$

wobei natürlich nur der reelle Teil des komplexen Ausdrucks in Betracht kommt.

Das Endresultat der Sommerfeld'schen Entwicklung ist der Ausdruck:

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} \{ \varphi(\alpha) + \psi(\alpha) \} + \frac{M}{2} \{ \varphi(\alpha) - \psi(\alpha) \}.$$

$$\alpha = 2(r_2 - r_1) \sqrt{2\pi n \sigma}$$

n = Schwingungszahl

σ = spez. Leitvermögen

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \frac{\mathfrak{E}i n \alpha + \sin \alpha}{\mathfrak{C}o j \alpha + \cos \alpha}$$

$$\psi(\alpha) = \alpha \frac{\mathfrak{E}i n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \mathfrak{C}o j \frac{\alpha}{2}}{\mathfrak{C}o j \alpha - \cos \alpha}$$

$$M = \frac{\left[(m-0) + (m-1) \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \right]^2 + \left[(m-1) + (m-2) \sqrt{\frac{r_3}{r_2}} \right]^2 + \dots}{\left[(m-0) - (m-1) \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \right]^2 + \left[(m-1) - (m-2) \sqrt{\frac{r_3}{r_2}} \right]^2 + \dots}$$

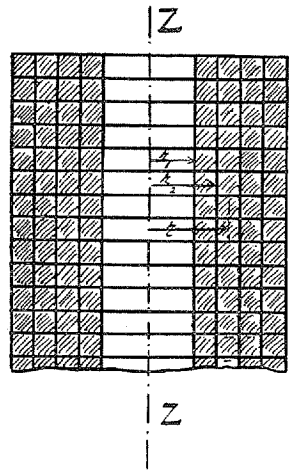
m = Zahl der Drahlagen der Rolle

$r_1, r_2, r_3 \dots$ die aus der Figur ersichtlichen Radien.

W = Wechselstromwiderstand

W_0 = Gleichstromwiderstand.

Fig 1.



Eine Formel für die Variabilität des Selbstinduktionskoeffizienten gibt Sommerfeld nicht.

Es ist ja richtig: die Maxwell-Theorie kennt den Begriff des Selbstinduktionskoeffizienten nicht, aber sie kennt auch keinen Totalstrom und infolgedessen keinen Totalwiderstand, sondern nur einen spezifischen Strom und spezifischen Widerstand. Sie kennt nur eine Variation der Stromdichte, keine Variation des Totalwiderstandes. Wenn man also trotzdem den Hilfsbegriff des Totalwiderstandes einführt, der statt der Stromdichte variiert, so darf man mit demselben Recht den Hilfsbegriff des Selbstinduktionskoeffizienten einführen, der statt der Kraftliniendichte variiert.

Ich werde es später tun.

Gleichzeitig mit Dolezalek untersuchte Mayer¹⁾ am physikalischen Institut der Universität Zürich das Verhalten von Drahtrollen in einem Wechselstromkreis.

Aber er ging einen ganz anderen Weg als Dolezalek. Er leitete nämlich aus der Dämpfungskonstanten eines Kondensatorschwingungskreises den jeweiligen Widerstand der Selbstinduktionsrolle ab, wie seine Vorgänger am Institut, während Dolezalek mit Hochfrequenzwechselstrommaschine und Telephonbrücke arbeitete.

Wie Mayer, verfuhr auch ich. Ich präparierte mir Rollen (von variierender Lagenzahl), durch deren Untersuchung mir die Frage, die mir aus theoretischen Betrachtungen erwachsen war, beantwortet werden musste: Wie ändert sich die Widerstandszunahme mit den geometrischen Verhältnissen der Rolle, speziell mit der Lagenzahl bzw. Schicht(Draht)dicke.

Bevor ich auf meine Versuchsergebnisse eingehe, möchte ich eine Theorie der Widerstandszunahme vorausschicken, für den Fall, dass das Feld \mathfrak{H} durch freie Schwingungen zustande kommt.

Theorie.

Es ist klar, dass die Verhältnisse hier etwas anders liegen werden, als bei Sommerfeld. Bei Sommerfeld bleiben die Feldamplituden konstant, hier aber nehmen sie mit der Zeit ab. Meine zeitliche Feldgleichung lautet:

$$\mathfrak{H} = H_0 e^{(in - \delta)t},$$

wobei wieder nur der reelle Teil des komplexen Ausdruckes zu nehmen ist.

δ ist die Dämpfungskonstante.

¹⁾ Diss. Zürich 1904.

Die Maxwell'schen Gleichungen, die die Vorgänge in der Rolle beschreiben, lauten:

$$1) \quad 4 \pi i = \text{curl } \mathfrak{H}$$

$$2) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = - \text{curl } \mathfrak{E}$$

$$3) \quad i = \sigma \mathfrak{E}.$$

\mathfrak{H} = magnetische Feldstärke

i = Stromdichte

\mathfrak{E} = elektrische Feldstärke

σ = Leitfähigkeit (spezifisch).

Aus 1) und 3) erhalten wir:

$$4 \pi \sigma \mathfrak{E} = \text{curl } \mathfrak{H}$$

und
$$- 4 \pi \sigma \text{curl } \mathfrak{E} = - \text{curl} (\text{curl } \mathfrak{H}).$$

Unter Zuziehung der Gleichung 2)

$$4 \pi \sigma \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{E}} = \Delta \mathfrak{H},$$

da nämlich $\text{curl}^2 \mathfrak{H} = - \Delta \mathfrak{H}$.

\mathfrak{H} ist von (z) unabhängig, also erhält man

$$4 \pi \sigma \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial y^2}.$$

Oder bei Einführung von Zylinderkoordinaten:

$$4 \pi \sigma \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \varphi^2} \right).$$

\mathfrak{H} ist aber auch von φ unabhängig.

Daher wird:

$$4 \pi \sigma \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{H}}{dr} \right)$$

oder
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{H}}{dr} \right) = 4 \sigma (in - \delta) \mathfrak{H}$$

und
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{H}}{dr} \right) + k^2 \mathfrak{H} = 0.$$

Setzt man $kr = x$, dann erhält man

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathfrak{H}}{dx} + \mathfrak{H} = 0.$$

Die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung führt auf Besselsche Funktionen.

Ich begnüge mich, wie Sommerfeld, mit einer näherungsweise Lösung. Diese genäherte Lösung lautet:

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{x}} (\alpha e^{ix} + \beta e^{-ix}).$$

Die Konstanten α und β bestimmen sich aus folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \text{ im Aussenraum der Rolle} \\ \xi &= H e^{(in-\delta)t} \text{ im Innenraum der Rolle.} \end{aligned}$$

Also

- 1) $\alpha e^{ikr_1} + \beta e^{-ikr_1} = \sqrt{kr_1}$
- 2) $\alpha e^{ikr_2} + \beta e^{-ikr_2} = 0.$

Dabei ist zunächst angenommen, dass die Rolle nur eine Drahtlage habe. Mit Einführung der hieraus bestimmten Konstanten erhält man:

$$\xi = \sqrt{\frac{r_1}{r}} \frac{e^{ik(r_2-r)} - e^{-ik(r_2-r)}}{e^{ik(r_2-r_1)} - e^{-ik(r_2-r_1)}} \cdot H e^{(in-\delta)t}$$

und $4\pi i = -\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sqrt{\frac{r_1}{r}} ik \frac{e^{ik(r_2-r)} + e^{-ik(r_2-r)}}{e^{ik(r_2-r_1)} - e^{-ik(r_2-r_1)}} \cdot H e^{(in-\delta)t}.$

Hiebei braucht man nur nach den Exponenten zu differenzieren, da ik so gross ist, dass das Glied ohne ik als Faktor gar nicht in Betracht kommt.

Die Sommerfeldschen Näherungsformeln leite ich nicht ab, da sie sich für meinen Fall nicht wesentlich ändern.

Bedeutung von ik .

Ich setze $ik = a + bi$, wobei $k = \sqrt{-4\pi n \sigma (in - \delta)}$. Nach leichter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2\pi\sigma(\sqrt{n^2 + \delta^2} - \delta)} \\ b &= \sqrt{2\pi\sigma(\sqrt{n^2 + \delta^2} + \delta)}. \end{aligned}$$

Bei meinen Versuchen war (n) so gross, dass man δ^2 gegen n^2 vernachlässigen darf; dann ist

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2\pi\sigma(n - \delta)} \\ b &= \sqrt{2\pi\sigma(n + \delta)}. \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$n = \frac{2\pi}{T} \text{ Schwingungszahl in } 2\pi \text{ sec.}$$

δ = Dämpfungskonstante

σ = spez. Leitfähigkeit.

Setzt man $\delta = 0$ (Sommerfeld), so erhält man den Sommerfeldschen Koeffizienten

$$ik = (1 + i)k.$$

Wenn man von dem vorausgehenden komplexen Ausdruck für i den reellen Teil nimmt, so erhält man die Gleichung des spezifischen Stromes. Sie lautet:

$$i = \sqrt{a^2 + b^2} \frac{H}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r}} \sqrt{\frac{\cos 2\xi + \cos 2\eta}{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos \{nt + \varphi\}$$

$$\xi = \sqrt{2\pi\sigma(n-\delta)(r_2-r)} \quad , \quad \eta = \sqrt{2\pi\sigma(n+\delta)(r_2-r)}$$

$$\alpha = \sqrt{2\pi\sigma(n-\delta)(r_2-r_1)} \quad \beta = \sqrt{2\pi\sigma(n+\delta)(r_2-r_1)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\frac{n+\delta}{n-\delta}} \cdot \frac{\sin(\eta-\beta) \cos(\alpha+\xi) - \sin(\eta+\beta) \cos(\alpha-\xi)}{\sin(\alpha+\xi) \cos(\eta-\beta) + \cos(\eta+\beta) \cos(\alpha-\xi)}}{1 - \sqrt{\frac{n+\delta}{n-\delta}} \cdot \frac{\sin(\eta-\beta) \cos(\alpha+\xi) - \sin(\eta+\beta) \cos(\alpha-\xi)}{\sin(\alpha+\xi) \cos(\eta-\beta) + \cos(\eta+\beta) \cos(\alpha-\xi)}}$$

Es ist also nicht nur die Amplitude der Stromdichte, sondern auch ihre Phase von (r) abhängig: im einzelnen Draht. [Die Stromfäden im Draht sind nicht nur von verschiedener Intensität, sondern auch in der Phase gegeneinander verschoben.]

Das Argument meiner hyperbolischen und Kreisfunktionen ist in meinen Formeln ausser von (n) auch von (δ) abhängig. Dasselbe gilt von der Amplitude.

Der Gesamtstrom im Draht wird erhalten durch die Integration aller Stromfäden über den Drahtquerschnitt.

Er ist:

$$J = \frac{H}{4\pi N} e^{i(n-\delta)t}$$

Dabei bedeutet N die Zahl der Windungen pro Längeneinheit der Spule.

Eine ähnliche Gleichung wie für (i) ergibt sich auch für ξ . Auch von ξ ist die Amplitude und Phase von (r) abhängig.

Der Widerstand der Drahtrolle wird durch den Jouleschen Energieverbrauch definiert.

Wenn ein Strom von der Gleichung:

$$i = J e^{-\delta t} \sin(nt + \varphi)$$

vorliegt, so wird dieser (pro Widerstandseinheit und pro $x \cdot T$ sec):

$$\text{Energieverlust} = E = \frac{J^2}{4} (1 - e^{-2 \cdot x \cdot \delta T}) \left[\frac{n \sin 2\varphi - \delta \cos 2\varphi}{n^2 + \delta^2} + \frac{1}{\delta} \right] \cdot 1)$$

1) Wenn (n) sehr gross, lässt sich $\frac{n \sin 2\varphi - \delta \cos 2\varphi}{n^2 + \delta^2}$ gegen $\frac{1}{\delta}$ vernachlässigen, dann ist

$$E = J^2 \frac{1 - e^{-2 \cdot x \cdot \delta T}}{4 \cdot \delta}$$

Diese Formel wird sowohl für den Stromfaden, als für den Gesamtstrom angewandt. Dann ist:

$$E = w \int_0^{x \cdot T} J^2 \cdot dt = \frac{1}{2 \pi r_1 N} \int_{r_1}^{r_2} 2 \pi r dr \int_0^{x \cdot T} \frac{1}{\sigma} i^2 dt.$$

Nach der Ausrechnung hebt sich der Faktor $\frac{1 - e^{-2 \cdot x \cdot \delta \cdot T}}{4 \delta}$ auf beiden Seiten hinweg.

Man erhält so:

$$w = \frac{a^2 + b^2}{\sigma} \cdot N \cdot \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{\cos 2 a (r_2 - r) + \cos b (r_2 - r)}{\cos 2 a (r_2 - r_1) - \cos 2 b (r_2 - r_1)}$$

endlich

$$w = \frac{N}{\sigma} \frac{b \sin 2 \alpha + a \sin 2 \beta}{\cos 2 \alpha - \cos 2 \beta}.$$

Diese Formel geht für $\delta = 0$ in die Sommerfeldsche über. In ihr sind nicht nur die Amplituden a und b , sondern auch die Argumente α und β von δ abhängig (ausser von n).

Da aber $\delta = \frac{W}{2L}$, so müsste die obige transzendente Gleichung nach w aufgelöst werden, wenn man genau rechnen wollte.

Um dies zu vermeiden, könnte man etwa so verfahren: Man setzt zunächst $\delta = 0$ und berechnet einen Näherungswert von w . Mit Hilfe dieses w berechnet man ein δ , geht damit in die Formel ein und berechnet eine zweite Näherung von w und fährt so fort, bis die Genauigkeit befriedigt.

Ich gehe nun zum allgemeinsten Fall, zum

Feld einer Rolle mit m -Schichten.

Wie Sommerfeld erhalte ich:

$$\mathfrak{H}_1 = \left\{ \sqrt{\frac{r_1}{r}} \frac{e^{ik(r_2-r)} - e^{-ik(r_2-r)}}{e^{ik(r_2-r_1)} - e^{-ik(r_2-r_1)}} - \frac{m-1}{m} \sqrt{\frac{r_2}{r}} \frac{e^{ik(r_1-r)} - e^{-ik(r_1-r)}}{e^{ik(r_2-r_1)} - e^{-ik(r_2-r_1)}} \right\} H e^{(in-\delta)t}$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{H}_m = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{r_m}{r}} \frac{e^{ik(r_{m+1}-r)} - e^{-ik(r_{m+1}-r)}}{e^{ik(r_{m+1}-r_m)} - e^{-ik(r_{m+1}-r_m)}} H e^{(in-\delta)t}.$$

Nur ist bei mir wieder $ik = a + bi$.

Ich schreite nun zunächst zur Berechnung der

Selbstinduktion.

Ich gehe von der magnetischen Energie (T) aus:

$$T = \frac{1}{8 \pi} \int \mathfrak{H}^2 d \tau = \frac{i^2}{2} L.$$

Das Integral zerfällt in Teilintegrale. Im Hohlraum der Rolle ist \mathfrak{H} von τ unabhängig, also gilt:

$$T_0 = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \int d\tau$$

$$\int d\tau = \pi r_1^2 l, \quad \text{wenn } l = \text{Spulenlänge.}$$

Also
$$T_0 = \frac{1}{8} \mathfrak{H}^2 \cdot r_1^2 l.$$

Der Totalstrom in der Windung ist

$$J = \frac{H}{4\pi m \cdot N} \cdot e^{(in - d)t}.$$

Daher
$$\frac{i^2}{2} = \frac{H^2}{32\pi^2 m^2 N^2}$$

und
$$L = \frac{T_0}{\left(\frac{i^2}{2}\right)} = 4\pi^2 m^2 N^2 r_1^2 l.$$

Das Raumelement $d\tau$ für das Spulenmaterial ist

$$d\tau = 2r\pi dr \cdot l.$$

Für die erste Schichte haben wir dann:

$$T_1 = \frac{2\pi \cdot l}{8\pi} \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{H}_1^2 \cdot r \cdot dr.$$

\mathfrak{H}_1^2 erhält man als das Produkt der imaginären Grösse \mathfrak{H}_1 und der dazu konjugierten als einen reellen Ausdruck in hyperbolischen und gewöhnlichen Cosinus. Die langwierigen Zwischenrechnungen muss ich übergehen, um Raum zu sparen. Ich erhalte:

$$L_1 = 4\pi^2 N^2 m^2 r_1^2 l \frac{r_2 - r_1}{r_1^2} \left\{ \left(r_1 + \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 r_2 \right) f - 2 \frac{m-1}{m} \sqrt{r_2} F \right\}$$

$$L_2 = 4\pi^2 N^2 m^2 r_1^2 l \frac{r_2 - r_1}{r_1^2} \left\{ \left(\left(\frac{m-1}{m} \right)^2 r_2 + \left(\frac{m-2}{m} \right)^2 r_3 \right) \cdot f - 2 \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \sqrt{r_3} F \right\}.$$

u. s. w.

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_m$$

$$L = L_0 \left\{ 1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1^2} [M'_1 f - M'_2 F] \right\}$$

$$M'_1 = \left(\frac{m}{m} \right)^2 r_1 + 2 \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 r_2 + 2 \left(\frac{m-2}{m} \right)^2 r_3 + \dots + 2 \left(\frac{1}{m} \right)^2 r_{m+1}$$

$$M'_2 = 2 \left\{ \frac{m-1}{m} \sqrt{r_2} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \sqrt{r_3} + \dots + \left(\frac{2}{m} \right) \cdot \left(\frac{1}{m} \right) \sqrt{r_{m+1}} \right\}$$

$$f = \frac{\beta \text{Sin } 2\alpha - \alpha \text{ sin } 2\beta}{\alpha \cdot \beta (\text{Co} \text{ } 2\alpha - \cos 2\beta)}$$

$$F = 2 \frac{\beta \text{Sin } \alpha \cos \beta - \alpha \text{ Coj } \alpha \sin \beta}{\alpha \cdot \beta (\text{Co} \text{ } 2\alpha - \cos 2\beta)}.$$

M'_1 und M'_2 sind von den Sommerfeldschen Koeffizienten M_1 und M_2 verschieden.

f und F sind auch grundverschieden von den Sommerfeldschen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$. Man kann das sofort aus den Grenzwerten dieser Grössen erkennen.

Es wird nämlich für

$$n = \infty \quad f = F = 0,$$

während hierfür $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha) = \infty$ wird, d. h. für $n = \infty$ wird wohl $w = \infty$, aber L bleibt endlich und zwar wird

$$L_{n=\infty} = L_0,$$

$$\text{für } n = 0 \text{ wird } f = -F = \frac{2}{3}.$$

Also
$$L_{n=0} = L_0 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{r_2 - r_1}{r_1^2} [M'_1 + M'_2] \right\}$$

$$L_{n=0} > L_0.$$

Mit Worten: L nimmt ab mit zunehmender Schwingungszahl und zwar ist der Grenzwert (für $n = \infty$) der Wert, den man mit der gewöhnlichen Solenoidformel für L berechnet (L_0).

Da der Faktor $\frac{r_2 - r_1}{r_1^2}$ für gewöhnlich in sehr kleinen Grenzen bleibt, so sieht man ohne weiteres, dass die Variation von L sehr klein ist.

Will man die Änderung von L nachweisen (experimentell), so muss man die Drahtdicke $r_2 - r_1 = d$ möglichst gross und r_1 möglichst klein machen. Dann wird M'_1 und M'_2 möglichst gross.

Der Widerstand.

Für die Stromdichten in den einzelnen Schichten finden wir

$$4 \pi i_1 = ik \left\{ \sqrt{\frac{r_1}{r}} \frac{e^{ik(r_2-r)} + e^{-ik(r_2-r)}}{e^{ik(r_2-r_1)} - e^{-ik(r_2-r_1)}} - \frac{m-1}{m} \cdot \sqrt{\frac{r_2}{r}} \frac{e^{ik(r_1-r)} + e^{-ik(r_1-r)}}{e^{ik(r_2-r_1)} - e^{-ik(r_2-r_1)}} \right\} \cdot H \cdot e^{(in-\delta)t}$$

u. s. w.

$$4 \pi i_m = ik \frac{1}{m} \sqrt{\frac{r_m}{r}} \frac{e^{ik(r_{m+1}-r)} + e^{-ik(r_{m+1}-r)}}{e^{ik(r_{m+1}-r_m)} - e^{-ik(r_{m+1}-r_m)}} \cdot H e^{(in-\delta)t}.$$

Es gelten auch hier alle Folgerungen, die schon Sommerfeld gezogen, so z. B., dass in angrenzenden Schichten die Stromdichten gerade entgegengesetzte Phasen haben.

Der Totalstrom ist

$$J = \frac{H}{4 \pi m N} e^{(in-\delta)t}.$$

Aus energetischen Betrachtungen findet man wieder den Widerstand w als eine Summe von Körperintegralen über die einzelnen Schichten.

$$w = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \frac{N}{m\sigma(r_2 - r_1)} \{M_1 \Phi - M_2 \Psi\}$$

$$M_1 = m^2 + (m-1)^2 \frac{r_2}{r_1} + (m-1)^2 + (m-2)^2 \frac{r_3}{r_2} + (m-2)^2 + \dots$$

$$M_2 = 2 \left[m(m-1) \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} + 2(m-1)(m-2) \sqrt{\frac{r_3}{r_2}} + \dots \right]$$

$$\Phi = \frac{\beta \operatorname{Sin} 2\alpha + \alpha \sin 2\beta}{\operatorname{Cos} 2\alpha - \cos 2\beta}$$

$$\Psi = 2 \frac{\beta \operatorname{Sin} \alpha \cos \beta + \alpha \operatorname{Cos} \alpha \sin \beta}{\operatorname{Cos} 2\alpha - \cos 2\beta}$$

Für Gleichstrom gilt $n = 0$, $\Phi = \Psi = 1$, also

$$w_0 = \frac{N}{m\sigma(r_2 - r_1)} (M_1 - M_2)$$

und
$$\frac{W}{w_0} = \frac{M_1}{M_1 - M_2} \cdot \Phi - \frac{M_2}{M_1 - M_2} \cdot \Psi$$

oder nach Sommerfeld:

$$\frac{W}{w_0} = \frac{1}{2} \{\Phi + \Psi\} + \frac{M}{2} \{\Phi - \Psi\}$$

$$M = \frac{(m + (m-1) \sqrt{\frac{r_2}{r_1}})^2 + ((m-1) + (m-2) \sqrt{\frac{r_3}{r_2}})^2 + \dots}{(m - (m-1) \sqrt{\frac{r_2}{r_1}})^2 + ((m-1) - (m-2) \sqrt{\frac{r_3}{r_2}})^2 + \dots}$$

Ein Näherungswert für M ist nach Sommerfeld

$$M = \frac{4}{3} m^2,$$

hiebei muss aber (m) mindestens gleich 5 sein.

Ich habe es im Vorstehenden unternommen, zu untersuchen, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn man zur Untersuchung der Widerstandszunahme freie, gedämpfte Schwingungen heranzieht.

Das Resultat ist: die Sommerfeldschen Formeln geben die Verhältnisse nicht mehr genau wieder (abgesehen davon, dass sie an sich schon Näherungsformeln sind), sondern sie müssen durch die von mir abgeleiteten ersetzt werden. Meine Formeln sind insofern kompliziert, als sie die gesuchte Grösse als Wurzel einer transzendenten Gleichung enthalten.

Die Koeffizienten M'_1 , M'_2 und M entsprechen natürlich nicht genau der Wirklichkeit, da sie auf Grund vereinfachender Voraussetzungen

gewonnen wurden: (Isolationsdicke = 0, Drahtquerschnitt¹⁾ quadratisch u. s. w.) Sie sind experimentell zu korrigieren; ebenso wird α und β zu verbessern sein. Wie man etwa verfahren könnte, um die richtigen Werte experimentell zu finden, will ich später zeigen.

Das Ergebnis meiner theoretischen Untersuchung stellt sich im wesentlichen durch die zwei folgenden Formeln dar:

$$\text{I. } w = \frac{w_0}{2} [\{\Phi + \Psi\} + M \{\Phi - \Psi\}]$$

$$\text{II. } L = L_0 \left[1 + \frac{d}{r_1^2} [M'_1 f - M'_2 F] \right].$$

$$\begin{array}{l} \text{Für } n = 0 \text{ wird } \left\{ \begin{array}{l} L = L_0 \left[1 + \frac{2}{3} \frac{d}{r_1^2} [M'_1 + M'_2] \right] \\ w = w_0 \end{array} \right. \\ \text{„ } n = \infty \text{ „ } \left\{ \begin{array}{l} L = L_0 \\ w = \infty. \end{array} \right. \end{array}$$

Meine Formel für die Selbstinduktion ist ganz allgemein. Sie berücksichtigt nicht nur die Abhängigkeit von den Dimensionen der Normale, sondern auch von der Schwingungszahl.

Wenn man überhaupt den Hilfsbegriff der Selbstinduktion einführt, so kann man logischer Weise nur durch sie diesen Begriff festlegen.

Wie aus der Formel für M zu ersehen ist (besonders leicht aus der Näherungsformel: $M = \frac{4}{3} m^2$), hängt die Widerstandszunahme sehr stark von der Lagenzahl (m) ab. Diese theoretische Erkenntnis wird durch meine Experimente aufs beste bestätigt.

Um die Widerstandszunahme klein zu halten, muss man (m) so klein als möglich wählen.

Für $m = 1$ wird $M = 1$ und $\frac{w}{w_0} = \Phi$ ein Minimum.

Die Unterteilung des Leiters in voneinander isolierte Elementardrähte hat gar keinen grossen Einfluss auf die Widerstandszunahme.

Die Firmen, die Selbstinduktionsnormalien herstellen, glauben bekanntlich durch dieses Mittel die Widerstandserhöhung heruntzudrücken zu können. Aber die Unterteilung verhindert nur die an sich fast unmassgebliche Variation der Stromdichte im Leiter, nicht aber die bedeutende von Schicht zu Schicht.

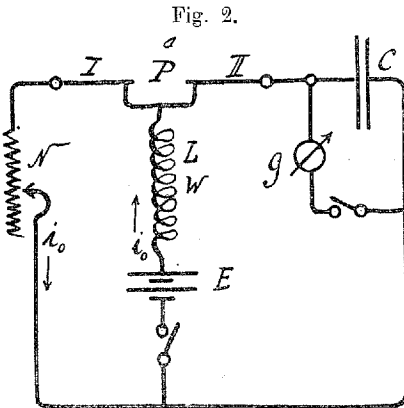
Eine Selbstinduktionsnormalie ohne Widerstandszunahme müsste eine Rolle sein mit einer [einigen] unendlich dünnen Kupferbandbewicklung in einer Lage.

¹⁾ Ich will die Drahtdicke $r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \dots = d$ setzen.

Messungen.

Bei meinen experimentellen Untersuchungen habe ich Schwingungen des elektrischen Zustandes in einem Kondensatorkreis benützt.

Da man es hierbei mit quasi stationärer Strömung zu tun hat, so kann man die Theorie des Schwingungskreises mit Hilfe der alten Anschauung entwickeln.



P Helmholtz'scher Pendelunterbrecher
(nach Prof. Kleiner)

I und *II* sind seine Kontakte

L Selbstinduktionsspule

W ihr Widerstand

E Gleichstromquelle (Akkumulator)

N Regulierwiderstand

C variable Kapazität

G ballist. Galvanometer.

Meine Schaltung war die in Fig. 2 dargestellte.

Solange *I* geschlossen, fließt durch *L* *N* und *E* der Strom:

$$i_0 = \frac{E}{N+W}.$$

Dabei ist der Kondensator (bei geschlossenem *II*) geladen mit der Elektrizitätsmenge

$$Q_0 = EC \cdot \frac{N}{N+W}.$$

In *L* ist die magnetische Energie aufgespeichert:

$$L \frac{i_0^2}{2}.$$

Die Energie der Stromquelle

ist $E i_0$.

Wird nun *I* geöffnet, so gilt für *II* die Energiegleichung

$$E i dt - L i di = w i^2 dt + \frac{1}{C} \cdot Q dQ$$

Q = Ladung des Kondensators

$$dQ = i dt.$$

Man erhält daraus die Differentialgleichung

$$\left(D^2 + \frac{W}{L} D + \frac{1}{CL} \right) \cdot Q = \frac{E}{L}.$$

Die Grenzbedingungen sind:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_0 = E \cdot C \frac{N}{W+N} \\ i &= \frac{dQ}{dt} = i_0 = \frac{E}{W+N} \end{aligned} \right\} \text{für } t = 0.$$

Dann lautet die Lösung:

$$Q = Q_m \left\{ 1 - \frac{T}{2\pi \cdot C(W+N)} \cdot e^{-\frac{W}{2L} \cdot t} \right\} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi \right).$$

$Q_m = E \cdot C$ ist die Endladung nach abgeklungener Schwingung.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{W}{2L}\right)^2}} = \text{Schwingungsdauer.}$$

Der Phasenwinkel φ ist gegeben durch:

$$\sin \varphi = \frac{2\pi W \cdot C}{T}$$

$$\frac{W}{2L} = \delta = \text{Dämpfungskonstante.}$$

Ich will im Anschluss gleich noch eine zweite Schaltung behandeln, die zwar nicht sehr verschieden ist, aber doch bedeutende Vorzüge besitzt. Das Schema ist in Fig. 3 dargestellt.

Der Unterschied gegen das erste Schema ist, dass die Stromquelle aus dem Schwingungskreis ausgeschaltet ist. Die Ladung pendelt nicht mehr um Q_m , sondern um Null.

Bei Schluss von I und II fließt durch LN der Strom i_0 und C ist geladen auf

$$Q_0 = E \cdot C \frac{W}{W + N}.$$

Im Kondensator steckt dabei die Energie:

$$\frac{Q_0^2}{2C} = \frac{E^2 \cdot C}{2} \frac{W^2}{(W + N)^2}.$$

In L steckt die Energie:

$$L \frac{i_0^2}{2}.$$

Wird I durch das Pendel geöffnet, dann gilt für ICL die Energiegleichung

$$-L i di = w i^2 dt + \frac{1}{C} Q dQ,$$

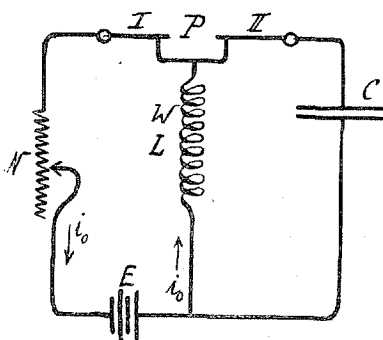
daraus resultiert die Differentialgleichung

$$\left(D^2 + \frac{W}{L} D + \frac{1}{CL}\right) Q = 0.$$

Die Lösung wird nach einigen unbedeutenden Vernachlässigungen:

$$Q = i_0 \frac{T_0}{2\pi} \cdot e^{-\delta t} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right).$$

Fig. 3.



Dabei ist

$$T_0 = 2 \pi \sqrt{CL}$$

$$T = \frac{2 \pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{W}{2L}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \delta \cdot \sqrt{CL}.$$

Die Vorteile dieser Schaltung bestehen darin, dass die allenfallsige Polarisationskapazität und die Variabilität des inneren Widerstandes von E die Messresultate nicht trüben können. Ich werde sie in einer späteren Untersuchung erproben.

Nimmt man nun die Schwingungskurve auf, so kann man aus ihr folgende drei Grössen bestimmen:

$$1) \quad T$$

$$2) \quad e^{-\delta T}$$

$$3) \quad a = i_0 \frac{T_0}{2\pi} \cdot e^{-\delta T} \cdot \sin \varphi.$$

Man nennt $\delta T = \frac{\ln a_m - \ln a_n}{n - m} = \lambda$ das logarithmische Dekrement.

Es wird erhalten, indem man aus der Kurve die m te Amplitude abmisst, von ihrer Masszahl den natürlichen Logarithmus nimmt und davon den natürlichen Logarithmus der Masszahl der n ten Amplitude subtrahiert und die Differenz durch $n - m$ dividiert.

Um aus T und λ W und L zu berechnen, benützt man die Gleichungen

$$\text{I.} \quad T = \frac{2 \pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{\lambda}{T}\right)^2}}$$

$$\text{II.} \quad \lambda = \frac{W}{2L} \cdot T,$$

woraus man erhält:

$$L = \frac{T^2}{(4 \pi^2 + \lambda^2) \cdot C}$$

$$W = \frac{2 T \lambda}{(4 \pi^2 + \lambda^2) \cdot C}.$$

Aus der dritten Gleichung könnte man C bestimmen. Es ist nämlich

$$a = e^{-\lambda} \cdot i_0 \cdot W_0 \cdot C,$$

also

$$C = \frac{a}{e^{-\lambda} \cdot i_0 \cdot W_0} = \frac{a \cdot e^\lambda}{i_0 \cdot W_0}.$$

Am unsichersten ist die Bestimmung von L , wie man aus der Fehlergleichung für L sofort sehen kann. Es ist nämlich:

$$\Delta L = \frac{2T}{(4\pi^2 + \lambda^2)C} \left[\Delta T - \frac{T \cdot \lambda}{(4\pi^2 + \lambda^2)} \cdot \Delta \lambda \right].$$

Den durch $\Delta \lambda$ verursachten Fehler kann man zwar zunächst vernachlässigen, aber der Fehler ΔT wird mit einem sehr grossen Faktor multipliziert, so dass für gewöhnlich der Fehler ΔL grösser werden wird, als die durch Skinwirkung bedingte Variation von L .

Die Instrumente.

1. Der Helmholtzsche Pendelunterbrecher nach den Angaben von Prof. Kleiner. Seine Wirkungsweise und Theorie setze ich als bekannt voraus. Seine Konstante, d. h. der Faktor, mit dem die Trommelablesung zu multiplizieren ist, um sie in Zeitsekunden zu verwandeln, wurde mit Hilfe einer bekannten Selbstinduktion und Kapazität bestimmt zu

$$A = 1.71966 \times 10^{-6} \text{ sec.}$$

2. Die variable Kapazität. Als solche wurde ein Kondensator von Carpentier benützt, der ein Mikrofarad umfasste und in vier Abteilungen bis zu ein Zehntel Mikrofarad herab unterteilt war. Sein Verhalten befriedigte. Dagegen war weniger zuverlässig ein Kondensator von Siemens, ebenfalls maximal ein Mikrofarad umfassend und in zwölf Abteilungen bis zu ein Tausendstel herunter unterteilt. Die vielen engen Spalten zwischen den Stöpseln machen eine gründliche Reinigung von leitendem Staub fast unmöglich.

3. Die Selbstinduktionsspulen waren Rollen gruppenweise (zwei Gruppen) von annähernd gleicher Selbstinduktivität, aber verschiedener Lagenzahl m .

4. Das ballist. Galvanometer. Der jeweilige Ladungszustand des Kondensators wurde mit Hilfe eines ballist. Galvanometers (Dreispuleninstrument) von Siemens & Halske festgestellt.

Seine Funktion war vortrefflich. Seine Empfindlichkeit konnte mit Hilfe eines Shunts in weiten Grenzen variiert werden.

Dimensionen der Rollen.

Gruppe I: L ca. 4500×10^3 cm.

	l cm	r cm	d cm	m	N	W_0	$L \times 10^{-3}$ cm
S_1	1	4	0.1	24	8.55	2.89	4600
S_3	3	4	0.1	7	8.55	2.30	3950
S_{24}	24	4	0.1	2	8.55	3.40	4500
S_{94}	94	4	0.1	1	8.55	5.57	4400

Gruppe II: L ca. 1100×10^3 cm.

	l cm	r cm	d cm	m	N	W_0	$L \times 10^{-3}$ cm
S_B	3.6	5.7	0.0065	99	1	1.34	1442
S_r	5.0	18.6	0.08	1	10	2.00	1100
S_F	Normale von Franke					1.38	1010

Rolle S_B bestand aus einem 36 mm breiten und 0.065 mm dicken Kupferband, das in einer Spirale von 99 Windungen aufgewickelt war.

In Gruppe I, die aus Rollen besteht mit einem L um 4500×10^3 cm herum, hat m die Werte 1, 2, 7, 24.

Gruppe II hat eine Rolle mit einer Drahtlage, eine Rolle mit unterteiltem Leiter, aber unbekanntem (m) und eine Rolle mit Bandbewicklung (S_B).

Die Messung.

Es wurde im Schwingungskreis eine bestimmte Kapazität eingestellt und für eine bestimmte Rolle in bekannter Weise die Schwingungskurve punktweise aufgenommen. Dann wurde diese Rolle durch alle Rollen ihrer Gruppe nach und nach ersetzt, wobei immer für jede einzelne Rolle auch die Schwingungskurve aufgenommen wurde. Mit dieser Arbeitsweise ersparte ich viel Zeit, da für eine Reihe von Aufnahmen mit derselben Einstellung der Instrumente gearbeitet werden konnte. (Dieselbe Empfindlichkeit des Galvanometers, derselbe Widerstand N u. s. w.) Hierauf wurde die Kapazität geändert und derselbe Rollensatz wieder durchgeprüft u. s. f.

Aus einer Schwingungskurve wurde T bestimmt

$$T = \frac{x_n - x_m}{n - m} \cdot A \text{ sec.}$$

Dabei sind x_m bzw. x_n die Abszissen des m ten bzw. n ten Schwingungsmaximums.

A = Pendelkonstante = Zeitwert eines Trommelteiles.

λ wurde gefunden mit

$$\lambda = \frac{\ln a_m - \ln a_n}{n - m}.$$

λ wurde abhängig von T in ein Kurvenblatt eingetragen.

Wenn W sich nicht mit T änderte, dann würde λ sich als eine Gerade durch den Koordinatenanfang darstellen, nämlich:

$$\lambda_0 = \left(\frac{W_0}{2L_0} \right) T = \text{Konst. } T.$$

Die λ -Kurven könnte man die Charakteristiken der Rollen nennen.

Den Charakter der λ -Kurven erkennt man aus den graphischen Darstellungen. Zunächst sieht man, dass die Gerade $\lambda_0 = \text{Konst. } T$ die eine und die Gerade $T = 0$ (also die Y -Achse) die andere Asymptote der hyperbelähnlichen Kurven ist.

Für die Rollen mit nur einer Lage ist die Abweichung der Charakteristik von λ_0 verhältnismässig klein, also auch die Widerstandszunahme, der rapide Anstieg längs der Y -Achse erfolgt erst bei so hohen Schwingungszahlen, dass er mit der gegebenen Messgenauigkeit nicht mehr zu erreichen war.

Das λ der Rollen mit zwei und mehr Lagen zeigt schon von Anfang an eine starke Abweichung von λ_0 . Der Anstieg längs der Y -Achse liegt noch innerhalb des Messbereichs.

Vom tiefsten Punkt der λ -Kurven an beginnt ein sehr rasches Zunehmen des Widerstandes.

Wir können L konstant annehmen. Dann wird

$$W = \frac{2\lambda \cdot L}{T} = \text{Konst. } \frac{\lambda}{T}.$$

In den Kurvenblättern wurde nicht W , sondern $\frac{\Delta W}{W_0} = \frac{W - W_0}{W_0}$ eingetragen.

Übereinstimmend mit der Theorie geht also W mit zunehmender Lagenzahl (m) rapid in die Höhe.

Wenn also die Firmen Selbstinduktionsnormalien (wenn man von solchen überhaupt sprechen darf) von geringer Widerstandszunahme konstruieren wollen, so müssen sie mit der Lagenzahl (Wicklungstiefe) zurückgehen. Eine Unterteilung des Leiters nützt fast gar nichts, wie aus der λ und $\frac{\Delta W}{W_0}$ Kurve der Selbstinduktionsrolle von

Franke (S_F), die einen unterteilten Leiter besitzt, ersichtlich ist. Die Rolle S_1 mit nur einer Lage eines massiven Drahtes (mit fast gleicher Selbstinduktion) verhält sich wesentlich besser als sie.

Ein Selbstinduktionskoeffizient, der weder Widerstandszunahme noch veränderliche Selbstinduktivität zeigte, müsste aus einer Lage eines unendlich dünnen Kupferbandes bestehen.

Dies zeigt auch die Theorie. Denn für $m = 1$ und $r_2 - r_1 = 0$ wird $\alpha = \beta = 0$ und $\Phi = 1$, also

$$\begin{aligned} W &= W_0 \\ L &= L_0. \end{aligned}$$

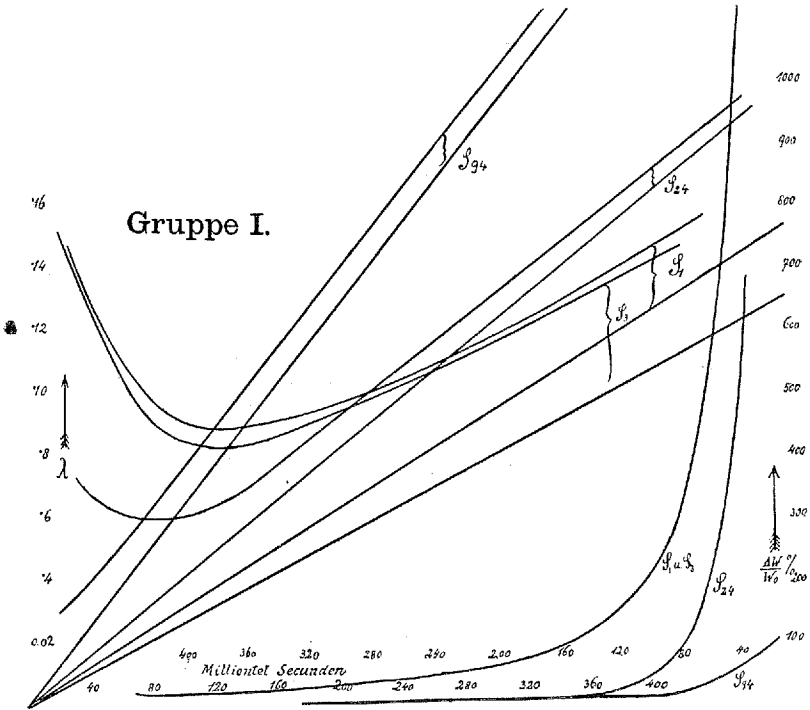
Die von Mayer und mir angewandte Untersuchungsmethode, nämlich: Bestimmung des Widerstandes aus dem Dekrement, der Selbstinduktion aus der Schwingungsdauer einer freien Schwingung, scheint mir, wenn auch die mühevollste und zeitraubendste, doch die beste, da sie gestattet, in das Gebiet der sehr hohen Schwingungszahlen vorzudringen.

Gerade in diesem Bereich zeigt sich ja das merkwürdigste Verhalten der λ -Kurven. Hier beginnen sie nämlich, nachdem sie vorher längs der λ_0 -Geraden fielen, plötzlich umzubiegen und sehr rasch längs der Y -Achse anzusteigen.

Einen Vergleich der Theorie mit dem Experimente will ich aus folgenden Gründen noch nicht ins Detail durchführen [dass Theorie und Experiment sich in den Umrissen decken, habe ich gezeigt]: Mit Sommerfeld habe ich unendliche Länge der Rollen vorausgesetzt. Die Skinwirkung¹⁾ wird nun um so kleiner, wie leicht einzusehen, je mehr wir von dieser Bedingung abweichen. Oder mit andern Worten: wenn ich auf meine Rollen von so grundverschiedenen Längen die Theorie anwendete, würde ich Resultate erhalten, die sich nicht in Einklang bringen liessen, der Koeffizient M würde scheinbar variieren. Dass meine Behauptung richtig ist, kann man daraus sehen, dass die Rolle S_1 mit nur 1 cm Länge trotz ihrer 23 Lagen keine wesentlich höhere Skinwirkung zeigt, als die Rolle S_3 mit ihren 7 Lagen und einer Länge von 3 cm.

Will man die Theorie mit dem Experiment vergleichen, so muss man für Rollen von gleicher Länge, aber verschiedener Lagenzahl die λ -Kurven aufnehmen.

¹⁾ Unter Skinwirkung bei Rollen hat man die Erscheinung zu verstehen, dass die elektrische Strömung sich immer mehr in die inneren Drahtschichten der Rollen zurückzieht, während die äusseren fast stromlos bleiben.



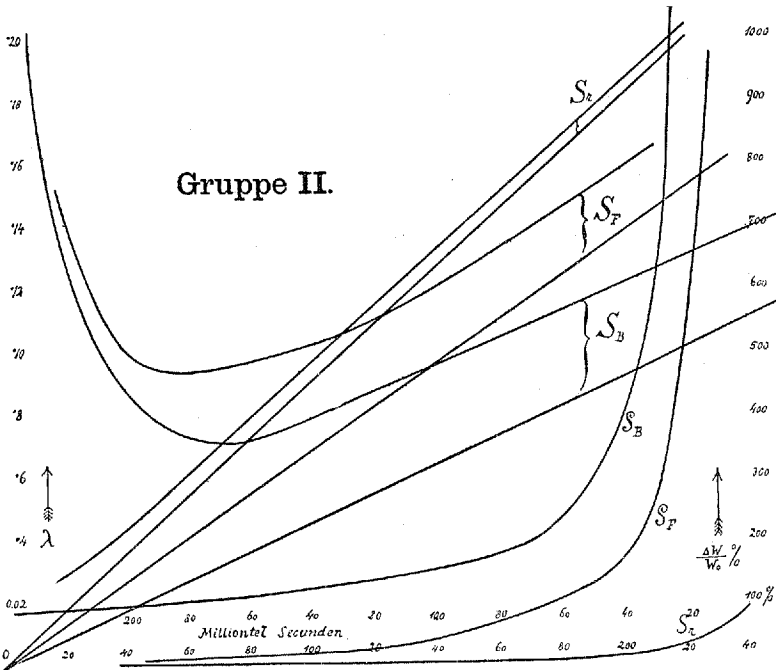
Tabellen.

Gruppe I.

$T \times 10^6 \text{ sec.}$	λ	W_A	$\frac{\Delta W}{W_0} \%$	$L \times 10^{-3} \text{ cm}$
$S_1 \quad W_0 = 2.89 \quad m = 24$				
429.22	0.15462	3.316	14.70	4601.8
334.64	0.12566	3.502	21.22	4662.9
235.11	0.10273	4.415	89.50	4603.7
135.26	0.08265	5.587	135.20	4572.0
95.26	0.08578	8.167	241.80	4534.8
74.04	0.09686	11.408	377.00	4565.6
42.96	0.12725	27.313	1042.00	4610.1
30.15	0.14443	43.505	1715.00	4540.1

Gruppe I.

$T \times 10^6 \text{ sec.}$	λ	W_A	$\frac{\Delta W}{W_0} \%$	$L \times 10^{-3} \text{ cm}$
$S_3 \quad W_0 = 2.30 \quad m = 7$				
398.56	0.13773	2.745	19.33	3970.4
309.06	0.11780	3.032	31.80	3977.5
217.90	0.09990	3.626	57.70	3954.6
125.51	0.08875	5.567	142.00	3936.6
88.34	0.092907	8.204	258.20	3900.4
68.69	0.10409	11.926	463.00	3940.1
39.89	0.13220	26.349	1030.00	3974.8
28.25	0.14413	40.690	1690.00	3988.3
$T \times 10^6 \text{ sec.}$	λ	W	$\frac{\Delta W}{W_0} \%$	$L \times 10^{-3} \text{ cm}$
$S_{24} \quad W_0 = 3.40 \quad m = 2$				
404.80	0.17224	3.483	2.43	4092.6
315.18	0.13730	3.592	5.65	4109.9
219.60	0.10129	3.705	5.86	4016.6
130.04	0.06608	4.295	22.70	4225.7
92.58	0.06075	5.753	58.80	4283.5
73.84	0.05985	7.363	118.70	4541.4
47.32	0.06657	18.343	407.00	4594.9
37.20	0.06941	25.808	654.00	4915.3
$S_{94} \quad W_0 = 5.57 \quad m = 1$				
420.63	0.27871	5.848	4.93	4413.4
325.45	0.21845	5.916	6.16	4406.7
230.58	0.15950	6.124	7.63	4426.8
132.20	0.09863	6.516	14.30	4367.0
93.08	0.06958	6.673	19.71	4329.9
72.27	0.05778	6.957	24.90	4350.6
42.04	0.04257	8.945	60.50	4416.4
29.84	0.03403	10.150	82.30	4449.7



Tabellen.

Gruppe II.

$T \times 10^6 \text{ sec.}$	λ	W	$\frac{\Delta W}{W_0} \%$	$L \times 10^{-3} \text{ cm}$
$S_B \quad W_0 = 1.34 \quad m = 99$				
238.34	0.13570	1.617	83.00	1420.0
169.90	0.11098	1.911	117.00	1443.1
107.27	0.08169	2.492	183.00	1478.4
75.03	0.07150	2.683	205.00	1407.7
53.09	0.07710	4.190	376.00	1410.4
40.93	0.08980	5.600	537.00	1430.0
24.39	0.12180	14.854	1587.00	1486.9
10.06	0.19960	53.970	6030.00	1443.1

Gruppe II.

$T \times 10^6$ sec.	λ	W	$\frac{\Delta W}{W_0}$ ‰	$L \times 10^{-3}$ cm
S_F $W_0 = 1.38$				
201.02	0.15942	1.601	16.00	1010.00
142.34	0.12378	1.761	27.60	1012.7
110.08	0.10703	1.963	45.30	1009.2
63.60	0.09527	3.028	124.10	1010.9
44.63	0.09843	4.391	208.00	995.6
34.94	0.11080	6.448	386.20	1016.6
20.46	0.14765	15.096	968.00	1046.1
S_T $W_0 = 2.00$ $m = 1$				
210.66	0.19410	2.042	2.09	1109.2
148.41	0.14124	2.094	3.18	1100.9
115.51	0.11056	2.127	5.82	1111.3
94.75	0.09420	2.213	10.65	112.20
48.06	0.05026	2.415	18.96	1087.0
36.39	0.04177	2.533	22.95	1103.2
21.50	0.03010	3.235	57.00	1075.3

Zum Schlusse erfülle ich noch die angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. A. Kleiner für die meiner Arbeit entgegengebrachte Anteilnahme und seine fördernden Ratschläge herzlich zu danken.