Auflösung der Gleichung $X^n = A$.

Von

H. Kreis

in Winterthur.

Es handelt sich in dieser Arbeit um algebraische Gleichungen im Gebiete der Matrices. Das Symbol A bedeutet also ein quadratisches Schema aus gewöhnlichen Zahlen, welche als Koeffizienten einer linearen Substitution auftreten. Nachdem man die rationalen Operationen bezüglich dieser neuen, höheren komplexen Zahlen definiert hat, entsteht eine allgemeinere Algebra[1]). Jede Matrix A besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass sie eine gewisse ganze, rationale Funktion $\varphi(x)$ zu 0 macht, wenn man sie an die Stelle der Veränderlichen x setzt.

$$\varphi(A) = c_0 + c_1 A + \cdots + c_\varkappa A^\varkappa = 0$$

$c_0, c_1, \ldots c_\varkappa$ sind gewöhnliche, reelle oder imaginäre, Zahlenwerte. Kann man, wenn die Funktion $\varphi(x)$ und die Matrix A gegeben sind, das System X derart bestimmen, dass

$$\varphi(X) = A$$

wird?

Die Frage lässt sich im allgemeinen beantworten; wie man sie behandelt, habe ich schon gezeigt[2]). Ich werde jetzt die Methode auf den Fall

$$X^n = A \tag{1}$$

---

[1]) Cayley, A Memoir on the Theory of the Matrices, Math. Papers.
Laguerre, Sur le calcul des systèmes linéaires, Journ. de l'école polyt., cahier 42.

[2]) Contribution à la théorie des systèmes linéaires, Thèse, Zürich 1906.

anwenden und für denselben ein leichtes Kriterium betreffend die Möglichkeit geben[1]).

* * *

Ich erwähne zunächst einen bekannten Satz, auf welchen sich die ganze Untersuchung stützt und dessen Beweis hier unterbleiben mag[2]).

Satz: Die charakteristische Determinante

$$| \lambda - \varphi(P) |$$

der Matrix νter Ordnung

$$\varphi(P) = \begin{Bmatrix} \varphi(w), 0, 0 & 0, \ldots 0 \\ \varphi'(w), \varphi(w), 0, & 0, \ldots 0 \\ \frac{\varphi''(w)}{1.2}, \varphi'(w), \varphi(w), & 0, \ldots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\varphi^{(\nu-1)}(w)}{(\nu-1)!}, \ldots & \varphi'(w), \varphi(w) \end{Bmatrix}$$

besitzt zwei Gruppen von Elementarteilern:

$$\begin{aligned} &(\lambda - \varphi(w))^{l+1}, \ h \text{ Mal} \\ &(\lambda - \varphi(w))^{l}, \ \varrho - 1 - h \text{ Mal.} \end{aligned} \tag{2}$$

Es bedeutet $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion von x, w irgend eine Zahl, $\varrho - 1$ die Multiplizitätsordnung der Wurzel $x = w$ der Gleichung $\varphi(x) = \varphi(w)$. Schliesslich sollen die ganzen Zahlen h und l aus den Bedingungen

$$\begin{gathered} \nu = (\varrho - 1)\, l + h \\ l \geqq 0 \\ 1 \leqq h \leqq \varrho - 1 \end{gathered} \tag{3}$$

bestimmt werden, was, bei gegebenen ν und $\varrho - 1$, immer auf eine einzige Art möglich ist.

* * *

Gehen wir nun zu unserer eigentlichen Frage über: „Wann gibt es Matrices X, die n Mal mit sich selbst multipliziert, das

[1]) Vergl. Frobenius, Über die cogredienten Transf. der bilinearen Formen, Sitzb. der Berl. Akademie, Januar 1896.

Vergl. Cayley, l. c.

[2]) Vergl. Bromwich, Theorems on Matrices a. bil. Forms, Proceed. of the Cambr. Phil. Soc. (1900), vol. XI, S. 86 ff.

P. Muth, Über rat. Funktionen bil. Formen, Crelles Journal (1903), Bd. 125, S. 291 f., oder die Arbeit, Contribution, etc. l. c. S. 47.

vorgelegte System A ergeben?" Anders ausgedrückt, wann besitzt die Gleichung

$$X^n = A \tag{1}$$

Wurzeln?

Nehmen wir an, die Elementarteiler von $| \lambda - A |$ seien alle bestimmt und je nach den verschiedenen Wurzeln $a_1, a_2, \ldots a_p$ der Gleichung $| \lambda - A | = 0$ in Klassen verteilt. Irgend eine der Lösungen X wird eine Normalform N besitzen, die aus p Normalsystemen $N_1, N_2, \ldots N_p$ besteht, so dass z. B.:

$$N = N_1 \dotplus N_2 \dotplus \cdots \dotplus N_p$$

unter der Bedingung, dass die Determinante

$$| \lambda - N_i | \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

alle Elementarteiler aufweist, die in der Klasse (a_i) vorkommen und nur diese. Die Möglichkeit der Lösung hängt zuerst von derjenigen der Bestimmung der Normalsysteme $N_1, N_2, \ldots N_p$ ab.

* * *

Sei also a irgend einer der p verschiedenen Werte der Wurzeln der Gleichung $| \lambda - A | = 0$ und

$$(\lambda - a)^f, \ \beta \text{ Mal}; \ (\lambda - a)^g, \ \gamma \text{ Mal}; \ldots \qquad (a) \tag{5}$$

die Gesamtheit der Elementarteiler der Klasse (a). Wir setzen dabei die Multiplizitätszahlen $\beta, \gamma, \ldots$ ausdrücklich von 0 verschieden voraus und setzen

$$f > g > \cdots \qquad \text{fest.}$$

Wir sagen, dass zwei aufeinander folgende Elementarteiler der Reihe (5) durch eine Lücke getrennt sind, wenn die Differenz $f - g$ der Exponenten grösser als 1 ist. Es treten im allgemeinen mehrere Lücken auf, welche die Reihe (5) in einer Anzahl von lückenlosen Klassen von Elementarteilern zerlegen wie die folgende:

$$\left.\begin{array}{c}(\lambda - a)^{e+1}, \alpha_1; \ (\lambda - a)^e, \alpha_2; \ldots \quad (\lambda - a)^{e-i}, \alpha_{i+2} \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i+2} > 0; \ e - i \geqq 1.\end{array}\right\} \tag{6}$$

Die Exponenten der Elementarteiler der Reihe (5), die in (6) nicht vorkommen, unterscheiden sich von $e + 1$ und $e - i$ um mindestens 2 Einheiten.

Die Elementarteiler (2) der Determinante $| \lambda - \varphi(P) |$ bilden in diesem Sinne eine lückenlose Klasse.

Diejenige der Normalformen $N_1, N_2, \ldots N_p$, welche dem Werte a entspricht, wird sich im allgemeinen auf weitere, irreducibele Normalformen $P_1(w_1)$, $P_2(w_2)$, ... $P_r(w_r)$ zurückführen lassen, so dass etwa:

$$P_1(w_1) \dot{+} P_2(w_2) \dot{+} \cdots \dot{+} P_r(w_r)$$

diese betrachtete Normalform darstellt.

Die Systeme

$$P_1(w_1), P_2(w_2), \ldots P_r(w_r),$$

die wir Elementarsysteme nennen wollen, werden mit Wurzeln der Gleichung

$$w^n = a$$

konstruiert. $P_1(w_1)$ z. B. besitzt folgende Struktur:

$$P_1(w_1) = \left\{\begin{array}{l} w_1 \\ 1, w_1 \\ 0, 1, w_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0, 0, \ldots 1, w_1 \end{array}\right\}.$$

Die Diagonale enthält nur w_1; unterhalb der Diagonalglieder kommen die Elemente 1 vor; alle andern Elemente sind 0. Die Ordnungen der Elementarsysteme bleiben vorläufig noch beliebig.

* * *

Wir werden durch das vorhergehende auf die folgende Grundaufgabe zurückgeführt, mit welcher wir uns jetzt beschäftigen wollen:

Unter welchen Umständen gibt es Elementarsysteme $P(w)$, die so beschaffen sind, dass die Gesamtheit der Elementarteiler der charakteristischen Determinanten $|\lambda - P^n(w)|$ eine vorgeschriebene lückenlose Klasse von Elementarteilern (6) erschöpfen?

Nach dem Fundamentalsatze, den wir anfangs erwähnt haben, sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem a von null verschieden ist oder nicht.

1. Fall: $a \neq 0$. Die Wurzeln der Gleichung

$$w^n = a$$

sind alle einfach, so dass $\varrho - 1 = 1$. Die Determinanten $|\lambda - P^n(w)|$ aller gesuchten Elementarsysteme besitzen je nur einen Elementarteiler $(\lambda - w)^\nu$, (ν, Ordnung von P). Um die Aufgabe zu lösen, braucht man z. B. nur eine der Wurzeln w herauszugreifen und ν

der Reihe nach die Werte $e+1, e, \ldots e-i$ die in (6) vorkommen, α_1 Mal, α_2 Mal, ... α_{i+2} Mal zu geben. Man erhält eine Gruppe von Elementarsystemen $P(w)$, die unsere spezielle Aufgabe lösen.

Diese letztere ist unter allen Umständen lösbar, wenn die Wurzel a nicht null ist.

2. Fall: $a = 0$. Das Problem gestaltet sich anders bei dieser Annahme. Die Gleichung

$$w^n = 0$$

hat eine einzige n-fache Wurzel, so dass

$$\varrho - 1 = n.$$

Die Determinante $|\lambda - P^n(0)|$ besitzt die Elementarteiler

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^{l+1};\ h \text{ Mal} \\ \lambda^l,\ n-h \text{ Mal} \end{array}\right\} \tag{7}$$

wo

$$\left.\begin{array}{c} \nu = nl + h \\ l \geqq 0,\ 1 \leqq h \leqq n, \end{array}\right\} \tag{8}$$

wenn wir ν als bekannt annehmen.

Umgekehrt, indem wir l und h gemäss (8) wählen, können wir ein Elementarsystem $P(0)$ von der Ordnung $\nu = nl + h$ definieren, so beschaffen, dass $|\lambda - P^n(0)|$ uns die Elementarteiler (7) liefert. Um die Aufgabe aufzulösen, hat man l der Reihe nach die Werte $e, e-1, e-2, \ldots e-i$ zu erteilen und zu suchen, welche Werte von h zulässig sind, damit die Elementarteiler der verschiedenen Determinanten $|\lambda - P^n(0)|$ die Klasse (6) erschöpfen. Es bleibt diese nur noch zahlentheoretische Frage in Bezug auf die Möglichkeit zu prüfen.

* * *

Zu diesem Zwecke wollen wir folgende Vereinbarungen treffen: Den $i+2$ Zahlen

$$e+1,\ e,\ e-1,\ \ldots e-i+1,\ e-i$$

sollen in derselben Anordnung die $i+2$ Variabeln

$$x,\ y,\ z,\ \ldots v,\ w$$

entsprechen. Ferner soll ein Produkt wie

$$x^h\, y^{n-h}$$

ein Elementarsystem $P(0)$ von der Ordnung

$$\nu = nl + h$$

vertreten. h bedeutet den Exponenten des ersten Buchstabens x und l die der zweiten Variabeln y entsprechende Zahl, also $l = e$. Hat man x^n allein, dann schreibt man ausführlicher zur Bildung von $P(0)$:

$$x^n = x^n y^0$$

und dementsprechend nimmt man

$$v = ne + e.$$

In beiden Fällen, $h < n$ oder $h = n$, besitzt $|\lambda - P^n(0)|$ die Elementarteiler:

$$\begin{aligned}&\lambda^{e+1},\ h \text{ Mal (entsprechend dem Faktor } x^h),\\ &\lambda^e,\ n-h \text{ Mal (entsprechend dem Faktor } y^{n-h}).\end{aligned}$$

Der Potenz

$$(x^h y^{n-h})^{\varepsilon_h}$$

soll das durch $x^h y^{n-h}$ gekennzeichnete System $P(0)$, ε_h Mal genommen, entsprechen.

Diesen Festsetzungen zufolge kann man jedem Gliede der folgenden unendlichen Summe:

$$\begin{aligned}\Sigma T = \Sigma\, &(x^n)^{\varepsilon_0} (x^{n-1} y)^{\varepsilon_1} \ldots (x y^{n-1})^{\varepsilon_{n-1}}\\ &(y^n)^{\delta_0} (y^{n-1} z)^{\delta_1} \ldots (y z^{n-1})^{\delta_{n-1}}\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &(v^n)^{\gamma_0} (v^{n-1} w)^{\gamma_1} \ldots (v w^{n-1})^{\gamma_{n-1}}\\ &(w^n)^{\beta_0}\end{aligned} \tag{9}$$

eine Gruppe von Elementarsystemen $P(0)$ zuordnen. Das Summenzeichen Σ erstreckt sich über alle ganzzahligen nicht negativen Werte der Exponenten

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots\ \varepsilon_{n-1};\ \delta_0,\ \delta_1,\ \ldots\ \delta_{n-1};\ \ldots;\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots\ \gamma_{n-1};\ \beta_0.$$

* * *

Existieren Lösungen unserer Aufgabe, so enthält die Reihe ΣT mindestens ein Mal ein Glied T, das zusammengefasst die Gestalt annimmt:

$$T = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \ldots v^{\alpha_i + d} w^{\alpha_i + 2}. \tag{10}$$

Aus dieser Bemerkung lässt sich nun leicht eine notwendige und hinreichende Bedingung aufstellen für die Möglichkeit der Bestimmung der Elementarsysteme $P(0)$. Nehmen wir an, das Glied

$T(10)$ befinde sich in der Reihe (9) und sei aus dem Ausdrucke $T(9)$, bei bestimmten Werten von

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-1}; \delta_0, \delta_1, \ldots \delta_{n-1}; \ldots \gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n-1}; \beta_0$$

durch Zusammenziehen entstanden.

Die erste Zeile des betreffenden Gliedes aus $T(9)$:

$$(x^n)^{\varepsilon_0} (x^{n-1} y)^{\varepsilon_1} \ldots (x y^{n-1})^{\varepsilon_{n-1}}$$

enthält sicher einen Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-1}$, der von 0 verschieden ist, weil die Variable x tatsächlich im Produkte (10) vorkommen muss. Es lässt sich also immer die Zahl d_1 eindeutig so bestimmen, dass

$$\alpha_1 = n\,\varepsilon_0 + (n-1)\,\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1} = \varepsilon n + d_1$$

ist, wo

$$0 < d_1 \leqq n$$

ist und wo ε eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet. Anders ausgedrückt:

$$d_1 \equiv \alpha_1 \ (n)$$
$$0 < d_1 \leqq n.$$

Die erste Zeile kann einfacher geschrieben werden:

$$(x^n)^{\varepsilon} (x^{d_1} y^{n-d_1}) (y^n)^{\varepsilon'}$$

ε' bedeutet, sowie alle jetzt vorkommenden Exponenten, eine ganze, nicht negative Zahl.

Ist $n - d_1 < \alpha_2$, dann bestimmt man die Zahlen d_2 und δ aus der Gleichung:

$$\alpha_2 = \varepsilon' n + n - d_1 + n\,\delta_0 + (n-1)\,\delta_1 + \cdots + \delta_{n-1} = \delta n + d_2 + n - d_1$$

$$0 < d_2 \leqq n; \ 0 \leqq \delta$$

d. h. es soll d_2 die Kongruenz befriedigen:

$$d_2 + n - d_1 \equiv \alpha_2 \ (n)$$
$$0 < d_2 \leqq n.$$

Die zweite Zeile kann man zusammenfassen zu

$$(y^n)^{\delta} (y^{d_2} z^{n-d_2}) (z^n)^{\delta'}.$$

Wir setzen das Verfahren ähnlich fort zur Bestimmung von $d_3, d_4, \ldots$, bis man zu einer Zahl d_{s-1} gelangt, welche die Bedingung

$$n - d_{s-1} < \alpha_s$$

nicht mehr erfüllt. Nehmen wir z. B. an, es sei

$$n - d_1 = \alpha_2.$$

Man hätte für die erste Zeile:

$$(x^n)^\varepsilon \, (x^{d_1} \, y^{n-d_1}) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2},$$

somit kann y in der zweiten Zeile von (9) nicht vorkommen, also fällt diese weg. Dass die dritte Zeile mindestens einen Faktor enthält, dessen Exponent von 0 verschieden ist, folgt notwendig, weil die Variable z im Produkt (10) zur Potenz $\alpha_3 \neq 0$ erscheint. Man hat also

$$d_2 = 0$$

zu setzen und d_3 ähnlich wie d_1 zu bestimmen aus der Kongruenz:

$$d_3 \equiv \alpha_3 \; (n)$$
$$0 < d_3 \leqq n.$$

Im allgemeinen, wenn

$$n - d_{s-1} = \alpha_s$$

ist, so setzt man

$$d_s = 0$$

und berechnet d_{s+1} aus der Kongruenz:

$$d_{s+1} \equiv \alpha_{s+1} \; (n)$$
$$0 < d_{s+1} \leqq n,$$

dann d_{s+2} aus

$$n - d_{s+1} + d_{s+2} \equiv \alpha_{s+2} \; (n)$$
$$0 < d_{s+2} \leqq n,$$

falls $n - d_{s+1} < \alpha_{s+2}$ ist; sonst setzt man wiederum

$$d_{s+2} = 0$$

u. s. w. Dieses Verfahren führt schliesslich zu der Gleichung:

$$n - d_{i+1} + \gamma' n + \beta_0 \, n = \alpha_{i+2}. \tag{11}$$

Wenn wir also die Zahl d_{i+2} nach derselben Vorschrift bestimmen, wie die vorhergehenden $d_1, d_2, \ldots d_{i+2}$, dann hat man entweder

$$d_{i+2} = 0, \tag{12}$$

wenn $n - d_{i+1} = \alpha_{i+2}$ ist, oder

$$d_{i+2} = n, \tag{12'}$$

wie aus der Kongruenz

$$n - d_{i+1} + d_{i+2} \equiv \alpha_{i+2}\,(n),$$

verbunden mit der Gleichung (11) folgt.

Was diese Bedingung

$$d_{i+2} = 0 \text{ oder } n$$

anbetrifft, wollen wir bemerken, dass sie nur im Falle $e - i > 1$ gilt. Wäre nämlich $e - i = 1$, dann dürfte l in der Formel

$$\nu = n\,l + h$$

den Wert 0 annehmen und h alle Werte von 1 bis n. Dem Elementarsystem $P(0)$ von der Ordnung

$$\nu = h \leqq n$$

würde eine n-*te* Potenz entsprechen, die sich auf die Zahlenmatrix 0 reduzieren würde. Die Determinante $|\,\lambda - P^n(0)\,|$ hätte nur den Elementarteiler λ, ν Mal. Die letzte Zeile von (9) könnte man dann schreiben:

$$(w^n)^{\beta_0}\,(w^{n-1})^{\beta_1} \ldots (w)^{\beta_{n-1}},$$

Der Exponent von w vertritt die Ordnung ν des Elementarsystems $P(0)$. An Stelle der Gleichung (11) tritt nun:

$$n - d_{i+1} + n\gamma' + \beta_0\,n + \beta_1\,(n-1) + \ldots + \beta_{n-1} = \alpha_{i+2}, \quad (11')$$

die der Zahl d_{i+2} keine spezielle Einschränkung auferlegt.

Die abgeleiteten Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_{i+2}$ erfüllen alle die Ungleichheit:

$$d_s \leqq \alpha_s \quad (s = 1, 2, \ldots i+2). \qquad (13)$$

Denn entweder hat man

$$n - d_{s+1} = \alpha_s,$$

und aus

$$n - d_{s-1} + d_s \equiv \alpha_s\,(n)$$

$$0 < d_s \leqq n$$

folgt

$$n - d_{s-1} + d_s \leqq d_s,$$

d. h.

$$\alpha_s - d_s \geqq n - d_{s-1} \geqq 0,$$

oder es ist

$$n - d_{s-1} = \alpha_s,$$

was zur Folge hat

$$d_s = 0 < \alpha_s,$$

oder endlich

$$n - d_{s-1} > \alpha_s.$$

Diese letzte Annahme führt uns zu einem Widerspruch. Sei etwa $n - d_1 > \alpha_2$. Die erste Zeile von $T(9)$ würde y mindestens zum

Exponenten $n - d_1$ enthalten und der Exponent von y in T (10) müsste grösser sein als α_2. Das ist unmöglich. Man hat also in der Tat die Ungleichheit (13).

Wir können jetzt die vorgelegte Frage bezüglich der Lösung der Grundaufgabe beantworten. Gegeben sei die lückenlose Klasse von Elementarteilern:

$$\lambda^{e+1}, \alpha_1 \text{ Mal}; \ \lambda^e, \ \alpha_2 \text{ Mal}, \ \ldots \ \lambda^{e-i}, \ \alpha_{i+2} \text{ Mal}. \tag{6}$$

Aus den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i+2}$ leite man die Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_{i+2}$ ab durch Auflösung folgender Kongruenzen:

$$\begin{array}{rl} d_1 \equiv \alpha_1 \, (n), & 0 < d_1 \leqq n \\ n - d_1 + d_2 \equiv \alpha_2 \, (n), & 0 < d_2 \leqq n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ n - d_{s-1} + d_s \equiv \alpha_s \, (n), & 0 < d_s \leqq n. \end{array}$$

Ist aber $n - d_{s-1} = \alpha_s$, dann soll

$$d_s = 0$$

genommen werden und d_{s+1} aus α_{s+1} bestimmt werden, wie d_1 aus α_1, u. s. w.

Damit es eine Gruppe von Elementarsystemen $P(0)$ gibt, die so beschaffen ist, dass die Gesamtheit der Elementarteiler der Determinanten $| \lambda - P^n(0) |$ die lückenlose Klasse (6) erschöpft, ist es notwendig, dass die Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_{i+2}$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$d_1 \leqq \alpha_1; \ d_2 \leqq \alpha_2; \ \ldots \ d_{i+2} \leqq \alpha_{i+2}$$

und wenn $e - i > 1$ ist, muss ausserdem

$$d_{i+2} = 0 \text{ oder } n \text{ sein.}$$

Dass das Kriterium auch hinreichend ist, sieht man leicht ein.

* * *

Die binomische Gleichung

$$X^n = A$$

im Gebiete der Matrices ist lösbar, wenn die charakteristische Gleichung

$$| \lambda - A | = 0$$

die Wurzel $\lambda = 0$ nicht besitzt. Hat sie die Wurzel $\lambda = 0$, dann hat man die Elementarteiler der Determinante $| \lambda - A |$ aufzusuchen, die derselben entsprechen. Sie bilden verschiedene lückenlose Klassen von Elementarteilern, wie z. B.

$$\lambda^{e+1},\ \alpha_1;\ \lambda^e,\ \alpha_2;\ \ldots\ \lambda^{e-i},\ \alpha_{i+2}.$$

Für jede solche Klasse bildet man aus den Zahlen $\alpha_1. \alpha_2, \ldots \alpha_{i+2}$ die Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_{i+2}$, indem man die Kongruenzen auflöst:

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv \alpha_1\,(n), & 0 < d_1 \leqq n \\ n - d_1 + d_2 &\equiv \alpha_2\,(n), & 0 < d_2 \leqq n \\ &\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ n - d_{s-1} + d_s &\equiv \alpha_s\,(n), & 0 < d_s \leqq n. \end{aligned}$$

Sollte

$$n - d_{s-1} = \alpha_s$$

sein, dann nimmt man

$$d_s = 0$$

und bestimmt d_{s+1} aus der Kongruenz

$$d_{s+1} \equiv \alpha_{s+1}\,(n)$$
$$0 < d_{s+1} \leqq n$$

usw. Wir gelangen nun zum folgenden Kriterium: Die binomische Gleichung

$$X^n = A, \text{ wo } |A| = 0,$$

ist dann und nur dann möglich, wenn für jede lückenlose Klasse von Elementarteilern

$$\lambda^{e+1},\ \alpha_1;\ \lambda^e,\ \alpha_2;\ \ldots\ \lambda^{e-i},\ \alpha_{i+2}$$

die aus den Multiplizitätszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i+2}$ abgeleiteten Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_{i+2}$ die Ungleichheiten

$$d_1 \leqq \alpha_1;\ d_2 \leqq \alpha_2;\ \ldots\ d_{i+2} \leqq \alpha_{i+2}$$

erfüllen und wenn ausserdem

$$d_{i+2} = 0 \text{ oder } n,$$

falls $e - i > 1$ ist.