Über die mehrfachen Sekanten algebraischer Raumkurven.

Von

A. Beck.

I. Die vorliegende Untersuchung bezieht sich auf die folgenden drei Aufgaben der abzählenden Geometrie: Es soll bestimmt werden 1. die Ordnungszahl der Regelfläche der dreifachen Sekanten einer Raumkurve, 2. die Anzahl der vierfachen Sekanten einer Raumkurve, 3. die Anzahl der gemeinschaftlichen Doppelsekanten zweier Raumkurven.[1] Diese Aufgaben sollen nach einer Methode behandelt werden, die meines Wissens bis jetzt nicht auf dieselben angewandt worden ist. Sie kann bezeichnet werden als die Methode der infinitesimalen zentrischen Kollineation.

Eine zentrische Kollineation zweier Räume ist bestimmt durch das Kollineationszentrum, die Kollineationsebene und ein Paar entsprechender Punkte auf einem Strahl durch das Zentrum. Rücken diese beiden entsprechenden Punkte unendlich nahe zusammen, so wird die Kollineation infinitesimal. Als spezieller Fall ist die infinitesimale Parallelverschiebung hervorzuheben; bei ihr liegen die Kollineationsebene und das Zentrum im Unendlichen. So lange im Folgenden das Zentrum ganz beliebig ist, können wir uns die Transformation als eine Verschiebung vorstellen. Gehen wir von einer Raumkurve $\mathfrak{C}$ zu ihrer entsprechenden $\mathfrak{C}'$ in einer infinitesimalen Kollineation mit dem Zentrum O über, so werden wir sagen, dass die Kurve nach O hin infinitesimal transformiert worden sei. Die Kollineationsebene ist dabei immer willkürlich. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ liegen auf demselben Kegel und schneiden sich in Punkten der Kollineationsebene; andere gemeinschaftliche Punkte haben sie im allgemeinen nicht.

[1] Man vergleiche über den Gegenstand: Cayley, Philos. Transactions Bd. 153 (1863) oder Papers, Bd. 5; Salmon-Fiedler, anal. Geometrie des Raumes, Zeuthen, Annali di Mat. (2) Bd. 3; Picquet, Comptes rendus Bd. 77; Bull. de la soc. math. Bd. 1; Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, 1879; Geiser, in memoriam Chelini, 1881; Berzolari, Palermo Rend. Bd. 9 (1895).

Die zu betrachtenden algebraischen Raumkurven sollen keine besonderen Singularitäten haben, keine stationären Punkte und keine wirklichen Doppelpunkte. Wir haben es also nur mit den folgenden fünf Singularitäten zu tun: Ordnungszahl m, Rang r (Klasse des projizierenden Kegels), Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte, Klasse n (Anzahl der Inflexionstangentialebenen des proj. Kegels), Anzahl y der Doppeltangentialebenen des proj. Kegels. Der Charakter der Kurve ist dann durch zwei dieser Singularitäten bestimmt; wir wählen dazu die Zahlen m und r. Die andern Zahlen werden durch sie ausgedrückt nach den Cayley-Plückerschen Formeln:

(1) $$r = m\,(m-1) - 2\,h$$

(2) $$m = r\,(r-1) - 2\,y - 3\,n$$

(3) $$n = 3\,(r-m).$$

Mit Benützung von 3. kann 2. ersetzt werden durch:

(2a) $$2\,y = 8\,m - 10\,r + r^2.$$

Übrigens werden sich diese Formeln im Folgenden nebenbei ergeben.[1])

Wir benützen zur Bezeichnung von Regelflächen und gleichzeitig ihrer Ordnungszahl den Buchstaben R mit beigefügten Symbolen, ebenso zur Bezeichnung bestimmter Geraden und gleichzeitig ihrer Anzahl den Buchstaben G mit Symbolen. — Indem wir mit der einfachsten Aufgabe über Doppelsekanten beginnen, schreiten wir systematisch weiter zu den komplizierteren Aufgaben.

II. Anzahl $G\,(P, \mathfrak{C}^2)$ oder h der Doppelsekanten einer Raumkurve, welche durch einen beliebigen Punkt P gehen. Wir transformieren $\mathfrak{C}$ infinitesimal nach einem beliebigen Punkt O hin. Dann werden wir die gesuchten Doppelsekanten erhalten, indem wir die Geraden durch P betrachten, welche $\mathfrak{C}$ und die transformierte Kurve $\mathfrak{C}'$ je einmal schneiden. Aber es kommen nur diejenigen dieser gemeinschaftlichen Sekanten in Betracht, für welche der Punkt auf $\mathfrak{C}$ von dem Punkt auf $\mathfrak{C}'$ einen endlichen Abstand hat. Je zwei solche Gerade sind zu einer der gesuchten Doppelsekanten von $\mathfrak{C}$ unendlich benachbart, weil die beiden Schnittpunkte einer solchen Doppelsekante mit $\mathfrak{C}$ auf zwei Arten auf die beiden Kurven $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ verteilt werden können.

Durch jede der gesuchten Doppelsekanten gehen zwei Mäntel des Kegels $P\mathfrak{C}$ und der eine Schnittpunkt der Doppelsekante mit $\mathfrak{C}$ ist unendlich benachbart zu einem Schnittpunkt von $\mathfrak{C}'$ mit dem

[1]) Vergl. meine Aufsätze in Math. Annalen Bd. 14 und Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich, Bd. 38 und 51.

einen Mantel, der andere zu einem Schnittpunkt von $\mathfrak{C}'$ mit dem andern Mantel. Von den m^2 Schnittpunkten der Kurve $\mathfrak{C}'$ mit dem Kegel $P\mathfrak{C}$ sind also die folgenden zwei Arten abzurechnen, da sie gemeinschaftliche Sekanten liefern, für welche die beiden Punkte auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ nicht getrennt sind:

1. Die m auf der Kollineationsebene liegenden Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, einfach zu rechnen, weil $\mathfrak{C}'$ in diesen Punkten den Kegel $P\mathfrak{C}$ nicht berührt.

2. Diejenigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden des Kegels $P\mathfrak{C}$ unendlich benachbart sind zu dem Punkt von $\mathfrak{C}$, durch welchen die Erzeugende geht. Diese Erzeugenden sind also, da $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ auf dem Kegel $O\mathfrak{C}$ liegen, Tangenten dieses Kegels $O\mathfrak{C}$. Die Anzahl der Geraden durch P, welche den Kegel $O\mathfrak{C}$ in einem Punkt von $\mathfrak{C}$ berühren, ist aber offenbar $= r$. Somit haben wir:

$$(4) \qquad 2\,G\,(P, \mathfrak{C}^2) = 2\,h = m\,(m-1) - r,$$

wodurch die Formel (1) bestätigt ist.

Hätte $\mathfrak{C}$ noch einen wirklichen Doppelpunkt, so wären von den Schnittpunkten von $\mathfrak{C}'$ mit dem Kegel $P\mathfrak{C}$ noch zwei weitere unendlich benachbarte Punkte abzurechnen, und wenn der Doppelpunkt zur Spitze würde, indem die Schleife sich bis zum Verschwinden verkleinerte, so würde noch ein dritter Punkt zu jenen beiden unendlich benachbart werden und abzurechnen sein. Man würde also, wenn die Kurve β stationäre Punkte, aber keine wirklichen Doppelpunkte hätte, die Formel erhalten:

$$(5) \qquad 2\,h = m\,(m-1) - r - 3\,\beta,$$

und aus dieser würde sich durch dualistische Übersetzung die Formel (2) ergeben.

Es ist noch zu untersuchen, wie sich die Anzahl $G\,(P, \mathfrak{C}^2)$ modifiziert, wenn P auf $\mathfrak{C}$ liegt. Wie viele Gerade h^* gehen durch einen Punkt von $\mathfrak{C}$, welche $\mathfrak{C}$ ausserdem noch zweimal schneiden? — Die Modifikation der obigen Ableitung durch infinitesimale Transformation von $\mathfrak{C}$ nach einem beliebigen Punkt O hin ergibt folgendes: der Kegel $P\mathfrak{C}$ ist jetzt von der Ordnung $m-1$ und wird also von $\mathfrak{C}'$ in $m\cdot(m-1)$ Punkten geschnitten. Von diesen sind aber die folgenden abzurechnen:

1. Die m Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ auf der Kollineationsebene.

2. Diejenigen Schnittpunkte, welche zu P unendlich benachbart sind. Sei C' ein solcher Schnittpunkt von $\mathfrak{C}'$ mit dem Kegel $P\mathfrak{C}$, dann liegt C' auf einer Erzeugenden des Kegels $P\mathfrak{C}$, die nach irgend einem Punkt A von $\mathfrak{C}$ geht. Da P und C' auf dem Kegel $O\mathfrak{C}$ liegen, so ist die Gerade PA eine Tangente des Kegels $O\mathfrak{C}$ im Punkte P und

liegt also auf der Tangentialebene dieses Kegels längs OP. Es gibt also so viele Punkte A, als es Schnittpunkte dieser Tangentialebene mit $\mathfrak{C}$ gibt, die von P verschieden sind. Die abzuziehende Zahl ist also $= m - 2$.

3. Diejenigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden des Kegels $P\mathfrak{C}$ unendlich benachbart sind zu dem Punkt auf $\mathfrak{C}$, durch welchen die Erzeugende ausser dem Punkt P geht. Da $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ auf dem Kegel $O\mathfrak{C}$ liegen, so ist jene Erzeugende eine Tangente dieses Kegels, deren Berührungspunkt nicht in P liegt. Die Anzahl solcher Tangenten ist offenbar $= r - 2$. Wir haben also:

$$\begin{aligned} 2\,h^* &= m\,(m-1) - m - (m-2) - (r-2) \\ &= (m-1)\,(m-2) - r + 2. \end{aligned} \tag{4a}$$

Natürlich hätte sich diese Formel aus (4) ableiten lassen, indem man m und r durch $m - 1$ und $r - 2$ ersetzte.

III. Ordnungszahl $R\,(g, \mathfrak{C}_k)$ der Regelfläche, deren Erzeugende eine Gerade g und eine Kurve $\mathfrak{C}$ schneiden und in dem letztern Punkt einen projizierenden Kegel von $\mathfrak{C}$ berühren. Eine beliebige Ebene durch g enthält offenbar m Erzeugende der Regelfläche und die Gerade g selbst ist auf der Fläche von der Vielfachheit r, weil durch einen beliebigen Punkt von g r Erzeugende der Regelfläche gelegt werden können. Also ist:

$$R\,(g, \mathfrak{C}_k) = m + r. \tag{6}$$

Weil alle Erzeugenden der Regelfläche den Kegel in Punkten von $\mathfrak{C}$ berühren, so berühren sich die beiden Flächen längs der Kurve $\mathfrak{C}$. Der Kegel und die Regelfläche haben gemeinschaftliche Erzeugende, nämlich diejenigen Erzeugenden des Kegels, welche durch die m Schnittpunkte von g mit dem Kegel gehen, und zwar berühren sich die beiden Flächen längs jeder dieser Erzeugenden. Dies erkennt man, indem man einen Punkt G die Gerade g durchlaufen lässt. Von den r Erzeugenden der Regelfläche, die durch jeden Punkt G gehen, werden zwei unendlich benachbart, wenn G unendlich nahe an die Kegelfläche rückt. Die Ebene dieser beiden Erzeugenden ist Tangentialebene der Regelfläche in jedem Punkt der Erzeugenden und gleichzeitig Tangentialebene des Kegels. Wenn auf dem Kegel irgend eine Kurve liegt, so berührt dieselbe also die Regelfläche in allen den Punkten, in denen sie die Kurve $\mathfrak{C}$ oder eine jener m Erzeugenden schneidet, die dem Kegel und der Regelfläche gemeinsam sind.

IV. Ordnungszahl $R\,(g, \mathfrak{C}^2)$ der Regelfläche, deren Erzeugende eine Gerade g treffen und eine Raumkurve zweimal schneiden. In jeder Ebene durch g liegen $\frac{1}{2}\,m\,(m-1)$ Erzeugende und g ist auf der Fläche von der Vielfachheit h, weil durch jeden Punkt von g h Doppelsekanten von $\mathfrak{C}$ gehen. Also haben wir:

$$R(g, \mathfrak{C}^2) = \tfrac{1}{2} m (m-1) + h. \tag{7}$$

Wir können aber eine zweite Bestimmung dieser Ordnungszahl erhalten, indem wir $\mathfrak{C}$ infinitesimal transformieren nach einem beliebigen Punkt O hin. Die Regelfläche mit den drei Leitlinien g, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ hat die Ordnungszahl

$$R(g, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}') = 2m^2 - m.$$

Indem die Kollineation infinitesimal wird, löst sich aber von dieser Regelfläche ein Teil ab, dessen Erzeugende $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in zwei unendlich benachbarten Punkten treffen. Der übrig bleibende Teil ist die gesuchte Regelfläche $R(g, \mathfrak{C}^2)$ und zwar zweimal, weil jede Erzeugende von $R(g, \mathfrak{C}^2)$ zu zwei Erzeugenden von $R(g, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ unendlich benachbart ist. — Der abgelöste Teil von $R(g, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ ist die in III. betrachtete Regelfläche $R(g, \mathfrak{C}_k)$, einfach gerechnet. Wir erhalten also:

$$2R(g, \mathfrak{C}^2) = 2m^2 - m - (m + r),$$

$$R(g, \mathfrak{C}^2) = m(m-1) - \tfrac{1}{2} r. \tag{8}$$

Durch Vergleichung von (7) und (8) ergibt sich noch einmal die Formel (1). — Auf der Fläche $R(g, \mathfrak{C}^2)$ ist $\mathfrak{C}$ von der Vielfachheit $m-1$.

V. Ordnungszahl $R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$ der Regelfläche, deren Erzeugende die Kurve $\mathfrak{C}$ zweimal treffen und in einem der beiden Punkte einen projizierenden Kegel von $\mathfrak{C}$ berühren. Wir gehen aus von der Regelfläche $R(g, \mathfrak{C}_k)$ [III.] und suchen die Erzeugenden derselben, welche $\mathfrak{C}$ zweimal schneiden. Dazu machen wir eine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{C}$ nach dem Punkt P hin, der die Spitze jenes projizierenden Kegels ist. $\mathfrak{C}'$ schneidet die Regelfläche in $m(m+r)$ Punkten. Von diesen kommen aber nur diejenigen in Betracht, welche auf der betreffenden Erzeugenden der Regelfläche endlich getrennt sind von dem Punkt von $\mathfrak{C}$, in welchem die Erzeugende den Kegel berührt. Von den Schnittpunkten von $\mathfrak{C}'$ mit der Regelfläche sind also nach III. abzurechnen:

1. Die m Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ auf der Kollineationsebene und zwar jeder doppelt, weil $\mathfrak{C}'$ die Regelfläche in diesen Punkten berührt (III.).

2. Die m Schnittpunkte von $\mathfrak{C}'$ mit den m Erzeugenden, die dem Kegel und der Regelfläche gemeinsam sind, und zwar jeder doppelt aus demselben Grunde.

3. Die übrigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden unendlich benachbart sind zu dem Punkt auf $\mathfrak{C}$, in welchem

die Erzeugende den Kegel berührt. Diese Erzeugenden liegen offenbar in den n Inflexionstangentialebenen des Kegels, eine in jeder Ebene.

Auf diese Weise erhalten wir die Anzahl G $(g, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$, welche identisch ist mit R $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$. Es wird:

$$R\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k) = m\,(m + r - 4) - n. \tag{9}$$

Nun kann man aber diese Ordnungszahl noch auf anderem, kürzerem Wege bestimmen, nämlich dadurch, dass man durch den Scheitel P des Kegels eine beliebige Gerade p legt und abzählt, wie viele Erzeugende der gesuchten Regelfläche diese Gerade schneiden. Zunächst gehen durch die Gerade r Tangentialebenen an den Kegel und jede derselben enthält $m - 2$ Erzeugende der Regelfläche. Ausserdem aber gehen durch den Kegelscheitel P selbst Erzeugende der Regelfläche von besonderer Art, nämlich die h Doppelsekanten von $\mathfrak{C}$, und zwar ist jede zweimal zu rechnen, denn jede ist auf zwei Arten als eine Gerade zu betrachten, welche p trifft, $\mathfrak{C}$ zweimal schneidet und in der Kegeltangentialebene des einen Schnittpunktes liegt. Man hat also:

$$R\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k) = r\,(m - 2) + 2\,\mathrm{h},$$

oder, wenn man für h seinen Wert aus (4) einsetzt:

$$R\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k) = m\,(m - 1) + r\,(m - 3). \tag{10}$$

Durch Vergleichung von (9) und (10) erhält man:

$$n = 3\,(r - m),$$

wodurch Formel (3) bewiesen ist.

In bezug auf die Regelfläche R $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$ sind noch die folgenden Bemerkungen zu machen: Durch jeden Punkt C von $\mathfrak{C}$ gehen zweierlei Erzeugende: a) solche, welche in C den Kegel berühren, b) solche, welche ihn nicht in C, sondern in dem andern Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}$ berühren. Die Anzahl der Erzeugenden a) ist offenbar $= m - 2$, diejenige der Erzeugenden b) $= r - 2$. Die Erzeugenden a) liegen alle in derselben Ebene, nämlich in der Tangentialebene des Kegels. Lassen wir den Punkt C die ganze Kurve $\mathfrak{C}$ durchlaufen, so sehen wir, dass $m - 2$ Mäntel der Regelfläche den Kegel längs $\mathfrak{C}$ berühren, während andere $r - 2$ Mäntel ihn längs $\mathfrak{C}$ schneiden. Ferner ist schon bemerkt worden, dass die Doppelerzeugenden des Kegels auch Doppelerzeugende der Regelfläche sind. Für jede solche Doppelerzeugende sind die beiden Tangentialebenen des Kegels auch Tangentialebenen der Regelfläche längs der ganzen Erzeugenden. Man erkennt dies wieder, wenn man einen Punkt C die Kurve $\mathfrak{C}$ durchlaufen lässt und die $r - 2$ Erzeugenden der Regelfläche betrachtet, welche durch ihn gehen und den Kegel anderswo berühren. Rückt C unendlich nahe an eine Doppelerzeugende des Kegels, so werden von den $r - 2$ Erzeugenden zwei unendlich benachbart, wobei ihre Ebene mit einer der beiden Tangentialebenen des Kegels zusammenfällt. — Wenn also auf dem Kegel eine Kurve liegt, so berührt sie die $m-2$ Mäntel der Regelfläche, welche den Kegel längs $\mathfrak{C}$ berühren, in jedem Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}$ und ausserdem berührt sie einen Mantel der Regelfläche, wenn sie durch eine Doppelerzeugende des Kegels hindurchgeht.

VI. Ordnungszahl $R(\mathfrak{C}^3)$ der Regelfläche der dreifachen Sekanten einer Raumkurve. Wir gehen aus von der Regelfläche $R(g, \mathfrak{C}^2)$ [IV.] und transformieren $\mathfrak{C}$ infinitesimal nach einem beliebigen Punkt O hin. Jede dreifache Sekante von $\mathfrak{C}$ ist in dreifacher Weise als eine Gerade aufzufassen, welche $\mathfrak{C}$ zweimal und $\mathfrak{C}'$ einmal schneidet. Diejenigen Erzeugenden von $R(g, \mathfrak{C}^2)$, welche dreifache Sekanten von $\mathfrak{C}$ sind, ergeben sich also aus den Schnittpunkten von $\mathfrak{C}'$ mit der Regelfläche. Aber von diesen Schnittpunkten sind abzurechnen:

1. Die m Schnittpunkte von $\mathfrak{C}'$ mit $\mathfrak{C}$, von denen nach IV. jeder $m-1$ mal zu zählen ist.

2. Diejenigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden unendlich benachbart sind zu einem der beiden Punkte von $\mathfrak{C}$ auf ihr. Die Anzahl dieser Schnittpunkte ist offenbar die in (10) bestimmte Ordnungszahl $R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$.

Wir erhalten also, da $G(g, \mathfrak{C}^3) = R(\mathfrak{C}^3)$ ist:

$$3\,R(\mathfrak{C}^3) = m\left[m(m-1) - \tfrac{1}{2}r\right] - m(m-1) - m(m-1) - r(m-3),$$

$$R(\mathfrak{C}^3) = \tfrac{1}{3}m(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}r(m-2). \tag{11}$$

Auf $R(\mathfrak{C}^3)$ ist $\mathfrak{C}$ von der Vielfachheit $\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}r + 1$. Dies ist nämlich die in (4a) bestimmte Anzahl h^* der dreifachen Sekanten, welche durch einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{C}$ gehen.

VII. Zur Bestimmung von $R(\mathfrak{C}^3)$ kann man auch auf folgende Weise verfahren:

Wenn drei Raumkurven $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$, die sich paarweise in p, p', p'' Punkten schneiden, die Leitkurven einer Regelfläche sind, so ist die Ordnungszahl der letzteren bekanntlich:

$$R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'') = 2\,m\,m'\,m'' - pm - p'm' - p''m''.$$

Wir nehmen nun an, $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ seien die entsprechenden Kurven zu $\mathfrak{C}$ in zwei zentrischen Kollineationen, die dasselbe Zentrum O haben, im übrigen aber ganz beliebig sind. Wie modifiziert sich dann die Ordnung der Regelfläche? $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ schneiden sich in m Punkten auf der ersten Kollineationsebene, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ in m Punkten auf der zweiten. Bekanntlich besteht aber zwischen dem zweiten und dritten System ebenfalls eine zentrische Kollineation mit dem Zentrum O, deren

Kollineationsebene durch die Schnittlinie der beiden gegebenen Kollineationsebenen geht. Folglich schneiden sich auch $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ in m Punkten.

Ferner liegen alle drei Kurven auf demselben Kegel mit dem Scheitel O; dieser Kegel ist also ein Teil der Regelfläche, den wir abrechnen wollen. Er ist hierbei aber doppelt zu zählen. Denn wenn wir die Erzeugenden der Regelfläche konstruieren wollen, welche durch einen Punkt C von $\mathfrak{C}$ gehen, so haben wir die beiden Kegel $C\mathfrak{C}'$ und $C\mathfrak{C}''$ zu bilden, und da diese sich längs der Erzeugenden CO berühren, so zählt diese im Schnitt beider Kegel für zwei. Wir erhalten also für die reduzierte Ordnungszahl:

$$R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'') = 2m^3 - 3m^2 - 2m. \tag{12}$$

Nun können wir zu den dreifachen Sekanten von $\mathfrak{C}$ gelangen, wenn wir die beiden angenommenen Kollineationen infinitesimal werden lassen. Jede dreifache Sekante wird dann durch sechs ihr unendlich benachbarte Erzeugende von $R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$ repräsentiert, auf welchen die drei Punkte von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{C}''$ endliche Abstände voneinander haben. Da aber auch Erzeugende vorkommen, für welche diese Abstände nicht alle drei endlich sind, so lösen sich von der vorigen Fläche Teile ab, welche abzurechnen sind, und zwar die folgenden zwei:

1. Von den drei Punkten auf $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{C}''$ fallen zwei unendlich nahe zusammen. Diese Erzeugenden sind als zweifache Sekanten von $\mathfrak{C}$ zu betrachten, welche in dem einen der beiden Punkte den Kegel $O\mathfrak{C}$ berühren, und zwar ist jede solche Erzeugende dreifach zu rechnen, weil der Berührungspunkt zu $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ oder zu $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ oder zu $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ gerechnet werden kann. Die von diesen Erzeugenden gebildete Fläche ist die Fläche $R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$ von V., dreifach gerechnet (10).

2. Alle drei Punkte fallen unendlich nahe zusammen. Die Erzeugende liegt dann in einer Inflexionstangentialebene des Kegels. Es lösen sich also ab die Strahlbüschel, die in den $n = 3(r - m)$ Inflexionstangentialebenen liegen und deren Scheitel Punkte von $\mathfrak{C}$ sind. Wir erhalten somit:

$$6R(\mathfrak{C}^3) = 2m^3 - 3m^2 - 2m - 3m(m-1) - 3r(m-3) - 3(r-m).$$

Hieraus folgt für $R(\mathfrak{C}^3)$ derselbe Wert wie in VI. (11).

VIII. Anzahl $G(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$ der Geraden, welche die Kurve $\mathfrak{C}$ dreimal treffen und in einem der drei Punkte einen durch $\mathfrak{C}$ gelegten Kegel berühren. Wir gehen aus von der Fläche $R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$ (V.) und transformieren $\mathfrak{C}$ infinitesimal nach dem Scheitel P des Kegels hin. Jede der gesuchten Geraden kann auf doppelte Weise als eine solche Erzeugende der Regelfläche betrachtet werden, welche durch einen Schnittpunkt von $\mathfrak{C}'$ mit der Regelfläche geht, weil die beiden

Punkte, in denen jene Gerade $\mathfrak{C}$ schneidet, aber den Kegel nicht berührt, auf zwei Arten auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ verteilt werden können. — Von den Schnittpunkten von $\mathfrak{C}'$ mit $R(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$ sind aber die folgenden abzurechnen, welche nicht der Aufgabe genügen:

1. Die m Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ auf der Kollineationsebene, deren jeder nach V. die Vielfachheit $2(m-2)+r-2$ hat.

2. Die Schnittpunkte, welche auf den gemeinschaftlichen Doppelerzeugenden des Kegels und der Regelfläche liegen. $\mathfrak{C}'$ schneidet jede dieser Doppelerzeugenden in zwei getrennten Punkten, deren jeder dreifach zu rechnen ist, weil $\mathfrak{C}'$ in dem einen dieser Punkte den einen, in dem andern den andern der beiden Mäntel der Regelfläche berührt, welche durch diese Doppelerzeugenden gehen (V.). Die abzuziehende Zahl beträgt also $6h$ oder $3m(m-1)-3r$ (1.).

3. Diejenigen übrigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden der Regelfläche unendlich benachbart sind zu dem Punkte, in welchem die Erzeugende den Kegel berührt. Dies führt offenbar auf die n Inflexionstangentialebenen des Kegels, welche Schmiegungsebenen von $\mathfrak{C}$ sind. In jeder derselben liegen $m-3$ Erzeugenden der fraglichen Art. Die abzuziehende Zahl beträgt also $(m-3)n$ oder $3(m-3)(r-m)$.

4. Diejenigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden der Regelfläche unendlich benachbart sind zu dem Punkt, in welchem die Erzeugende die Kurve $\mathfrak{C}$ schneidet, ohne den Kegel zu berühren. Dies führt auf die y Doppeltangentialebenen des Kegels. In jeder derselben liegt eine Erzeugende, welche doppelt zu rechnen ist, da der eine oder der andere der beiden Berührungspunkte zu $\mathfrak{C}'$ gerechnet werden kann. Die abzuziehende Zahl beträgt also $2y$ oder $8m-10r+r^2$. (2a.)

Auf Grund dieser Abzählung ergibt sich das Resultat:

$$2G(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k) = m^2(m-1)+mr(m-3)-2m(m-2)-m(r-2)$$
$$-3m(m-1)+3r-3(m-3)(r-m)-8m+10r-r^2.$$

$$(13)\quad G(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k) = \tfrac{1}{2}m(m^2-3m-8)+\tfrac{1}{2}r(m^2-7m+22-r).$$

IX. Anzahl $G(\mathfrak{C}^4)$ der vierfachen Sekanten einer Raumkurve. Wir gehen aus von der Fläche $R(\mathfrak{C}^3)$ (VI.) und transformieren $\mathfrak{C}$ infinitesimal nach einem beliebigen Zentrum hin. Dann sind die gesuchten vierfachen Sekanten unter denjenigen Erzeugenden enthalten, welche $\mathfrak{C}'$ schneiden und zwar erscheint jede vierfache Sekante viermal, da jeder ihrer vier Punkte auf $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{C}'$ gerechnet werden kann. Von den Schnittpunkten von $\mathfrak{C}'$ mit $R(\mathfrak{C}^3)$ sind die folgenden abzurechnen:

1. Die m Schnittpunkte von $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}$ und zwar jeder mit der Vielfachheit $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-\frac{1}{2}r+1$ (VI.).

2. Diejenigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden unendlich benachbart sind zu einem der drei Punkte auf $\mathfrak{C}$. Die Anzahl dieser Punkte ist aber die in VIII. gefundene Anzahl $G(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$. Somit haben wir das Resultat:

$$4\,G(\mathfrak{C}^4)=\frac{1}{3}m^2(m-1)(m-2)-\frac{1}{2}mr(m-2)-\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$$
$$+\frac{1}{2}mr-m-\frac{1}{2}m(m^2-3m-8)-\frac{1}{2}r(m^2-7m+22-r),$$

$$G(\mathfrak{C}^4)=\frac{1}{12}m(m-1)(m-2)(m-3)+m-\frac{1}{4}r(m^2-5m+11)+\frac{1}{8}r^2. \tag{14}$$

X. **Anzahl $G(\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_{2,k})$ der Geraden, welche eine Kurve $\mathfrak{C}_1$ zweimal und eine Kurve $\mathfrak{C}_2$ einmal schneiden und im letztern Punkt einen durch $\mathfrak{C}_2$ gelegten Kegel berühren.** Wir gehen aus von der Fläche $R(g, \mathfrak{C}_k)$ von III., für welche gefunden wurde:

$$R(g, \mathfrak{C}_k)=m+r.$$

Bezeichnen wir jetzt die Kurve mit $\mathfrak{C}_2$ und ersetzen wir g durch eine Kurve $\mathfrak{C}_1$, so ist offenbar

$$R(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_{2,k})=m_1\cdot R(g, \mathfrak{C}_{2,k})=m_1(m_2+r_2).$$

Auf dieser neuen Regelfläche ist $\mathfrak{C}_1$ von der Vielfachheit r_2, $\mathfrak{C}_2$ von der Vielfachheit m_1, wobei die m_1 Erzeugenden, welche durch einen Punkt von $\mathfrak{C}_2$ gehen, alle in der zu diesem Punkt gehörenden Tangentialebene des Kegels liegen. Letzterer wird also längs $\mathfrak{C}_2$ von m_1 Mänteln der Regelfläche berührt.

Ferner hat die Regelfläche mit dem Kegel diejenigen $m_1 m_2$ Erzeugenden des letztern gemein, welche durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_1$ mit dem Kegel gehen, und zwar findet längs dieser Erzeugenden Berührung zwischen beiden Flächen statt. Letzteres erkennt man auf dieselbe Weise wie in III., indem man einen Punkt, der $\mathfrak{C}_1$ durchläuft, unendlich nahe an die Kegelfläche rücken lässt.

Nun transformieren wir $\mathfrak{C}_1$ infinitesimal, indem wir das Kollineationszentrum im Scheitel P des Kegels über $\mathfrak{C}_2$ wählen, und betrachten die Erzeugenden der Regelfläche, welche die transformierte Kurve $\mathfrak{C}_1'$ schneiden. Unter diesen Erzeugenden erscheint zweimal jede Gerade, welche $\mathfrak{C}_1$ zweimal und $\mathfrak{C}_2$ einmal schneidet und im letztern Punkt den Kegel berührt; denn man kann den einen oder andern der beiden Schnittpunkte auf $\mathfrak{C}_1$ als Punkt von $\mathfrak{C}_1'$ betrachten. Von den $m_1^2(m_2+r_2)$ Schnittpunkten von $\mathfrak{C}_1'$ mit der Regelfläche sind abzurechnen:

1. Die m_1 Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_1'$ und zwar jeder r_2 mal.

2. Die Schnittpunkte auf den $m_1\, m_2$ gemeinschaftlichen Erzeugenden, einfach gerechnet, da $\mathfrak{C}_1'$ nicht auf dem Kegel $P\mathfrak{C}_2$, wohl aber auf dem Kegel $P\mathfrak{C}_1$ liegt.

3. Diejenigen übrigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden der Regelfläche unendlich benachbart sind zu dem auf ihr liegenden Punkt von $\mathfrak{C}_1$. Diese Erzeugenden werden gefunden, indem man an die beiden konzentrischen Kegel $P\mathfrak{C}_1$ und $P\mathfrak{C}_2$ die gemeinschaftlichen Tangentialebenen legt. Da in jeder dieser Ebenen eine einfach zu rechnende Erzeugende dieser Art liegt, so ist die abzurechnende Zahl $= r_1\, r_2$. Man findet also:

$$2\, G\, (\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_{2,k}) = m_1^2\, (m_2 + r_2) - m_1\, r_2 - m_1 m_2 - r_1 r_2.$$

$$(15) \qquad G\, (\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_{2,k}) = \tfrac{1}{2} m_1\, (m_1 - 1)\, (m_2 + r_2) - \tfrac{1}{2} r_1\, r_2.$$

XI. Anzahl $G\, (\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2)$ der gemeinschaftlichen Doppelsekanten zweier Raumkurven. Wir gehen aus von der Fläche $R\, (g, \mathfrak{C}^2)$ in IV. und ersetzen g durch $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}_1$. Dann erhalten wir aus IV. sofort:

$$R\, (\mathfrak{C}_1^2\, \mathfrak{C}_2) = m_2 \cdot R\, (g, \mathfrak{C}_1^2) = m_2 \left[m_1\, (m_1 - 1) - \tfrac{1}{2} r_1\right].$$

Auf dieser neuen Fläche hat $\mathfrak{C}_2$ die Vielfachheit h_1. Nun transformieren wir $\mathfrak{C}_2$ infinitesimal nach einem beliebigen Zentrum hin und betrachten die Erzeugenden der Regelfläche, welche $\mathfrak{C}_2'$ schneiden. Je zwei derselben sind zu einer Geraden $G\, (\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2)$ unendlich benachbart. Von der Anzahl $m_2 \cdot R\, (\mathfrak{C}_1^2\, \mathfrak{C}_2)$ der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_2'$ mit der Regelfläche sind abzurechnen:

1. Die m_2 Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_2'$, jeder h_1 mal (4).

2. Diejenigen Schnittpunkte, welche auf der betreffenden Erzeugenden unendlich benachbart sind zu dem auf ihr liegenden Punkt von $\mathfrak{C}_2$. Ihre Anzahl ist $G\, (\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_{2,k})$ in X. Daher wird:

$$\begin{aligned} 2\, G\, (\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2) = {} & m_2^2 m_1\, (m_1 - 1) - \tfrac{1}{2} m_2^2 r_1 - \tfrac{1}{2} m_1\, m_2\, (m_1 - 1) + \tfrac{1}{2} m_2 r_1 \\ & - \tfrac{1}{2} m_1 m_2\, (m_1 - 1) - \tfrac{1}{2} r_2 m_1\, (m_1 - 1) + \tfrac{1}{2} r_1\, r_2, \end{aligned}$$

$$(16) \qquad \begin{aligned} G\, (\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2) = {} & \tfrac{1}{2} m_1 m_2\, (m_1 - 1)\, (m_2 - 1) - \tfrac{1}{4} r_1\, m_2\, (m_2 - 1) \\ & - \tfrac{1}{4} r_2 m_1\, (m_1 - 1) + \tfrac{1}{4} r_1 r_2. \end{aligned}$$

XII. Wir betrachten noch besonders den Fall, wo die beiden Kurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ zueinander in beliebiger zentrischer Kollineation stehen. Beide Kurven haben dann dieselben Charaktere m, r, und weil sie gemeinschaftliche Punkte haben, so treten gemeinschaftliche Doppelsekanten auf, welche abzurechnen sind, weil sie nicht vier getrennte Punkte der Kurven enthalten.

1. Die beiden Kurven schneiden sich in m Punkten auf der Kollineationsebene. Jede der $\frac{1}{2}m(m-1)$ Verbindungslinien dieser Punkte ist abzurechnen.

2. Durch jeden dieser gemeinschaftlichen Punkte gehen ausserdem $(m-1)^2-(m-1)$ andere Gerade, welche diesen Punkt mit zwei andern, getrennten Punkten der beiden Kurven verbinden.

Bezeichnen wir die Anzahl der gemeinschaftlichen Doppelsekanten, welche nach Abzug dieser uneigentlichen übrig bleiben, mit $G^*(\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2)$, so haben wir (16):

$$
\begin{aligned}
G^*(\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2) &= \tfrac{1}{2}m^2(m-1)^2 - \tfrac{1}{2}rm(m-1) + \tfrac{1}{4}r^2 \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}m(m-1) - m(m-1)^2 + m(m-1) \\
&= \tfrac{1}{2}m(m-1)(m^2-3m+3) - \tfrac{1}{2}rm(m-1) + \tfrac{1}{4}r^2. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Es ist aber zu beachten, dass unter diesen gemeinschaftlichen Doppelsekanten auch die h durch das Kollineationszentrum gehenden Geraden enthalten sind, welche jede der beiden Kurven zweimal schneiden.

Das zuletzt gewonnene Resultat kann dazu benützt werden, die Anzahl $G(\mathfrak{C}^4)$ der vierfachen Sekanten einer Raumkurve noch auf eine zweite Art abzuleiten. Lassen wir nämlich die soeben betrachtete zentrische Kollineation von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ infinitesimal werden, so sind unter den gemeinschaftlichen Doppelsekanten G^* die vierfachen Sekanten von $\mathfrak{C}$ jedenfalls enthalten und zwar jede sechsmal, weil die vier Schnittpunkte einer vierfachen Sekante auf sechs Arten paarweise auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ verteilt werden können. Aber von der Gesamtheit G^* der gemeinschaftlichen Doppelsekanten sind die folgenden abzurechnen:

1. Diejenigen, bei welchen einer und nur einer der beiden Punkte auf $\mathfrak{C}$ mit einem der beiden Punkte auf $\mathfrak{C}'$ unendlich benachbart ist. Dies sind dreifache Sekanten von $\mathfrak{C}$, welche in einem der drei Schnittpunkte den projizierenden Kegel von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ berühren, dessen Scheitel das Kollineationszentrum ist, und zwar wird jede dieser dreifachen Sekanten auf zwei Arten erzeugt, da die beiden Schnittpunkte, in denen der Kegel nicht berührt wird, auf zwei Arten auf die beiden Kurven verteilt werden können. Die abzuziehende Zahl ist also $= 2\,G(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k)$ [VIII].

2. Diejenigen, für welche die beiden Punkte auf $\mathfrak{C}$ unendlich benachbart sind zu den beiden Punkten auf $\mathfrak{C}'$. Solcher Geraden gibt es aber zwei Arten:

a) Die h Doppelsekanten durch das Kollineationszentrum (4).

b) Die Geraden, welche in den Doppeltangentialebenen des Kegels liegen und die zwei Berührungspunkte auf $\mathfrak{C}$ miteinander verbinden. Die abzurechnende Zahl beträgt also $y = 4m - 5r + \frac{1}{2}r^2$, (2a). So erhalten wir schliesslich das Resultat:

$$6\,G(\mathfrak{C}^4) = \tfrac{1}{2}m(m-1)(m^2-3m+3) - \tfrac{1}{2}rm(m-1) + \tfrac{1}{4}r^2$$
$$- m(m^2-3m-8) - r(m^2-7m+22-r) - \tfrac{1}{2}m(m-1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}r - 4m + 5r - \tfrac{1}{2}r^2,$$

$$G(\mathfrak{C}^4) = \tfrac{1}{12}m(m-1)(m-2)(m-3) + m - \tfrac{1}{4}r(m^2-5m+11) + \tfrac{1}{8}r^2.$$

Dieser Wert stimmt mit dem in IX. gefundenen überein.

Zürich, Juli 1907.