Zur Theorie der Tettarionenideale.

Von

L. Gustav du Pasquier.

In vorliegender Arbeit wird die Allgemeingültigkeit des folgenden zahlentheoretisch wichtigen Satzes nachgewiesen:

Jedes aus rationalen ganzen μ-Tettarionen gebildete rechtsseitige Ideal ist Hauptideal [1]).

Unter „ganzen Tettarionen" werden solche verstanden, deren sämtliche Komponenten rationale ganze Zahlen sind. Da in diesen Zeilen ausschliesslich von ganzen Tettarionen die Rede sein wird, wollen wir diesen Zusatz unterdrücken, und „Tettarion" schlechtweg soll hier immer ein solches bezeichnen, dessen Komponenten rationale ganze Zahlen sind. — Nachdem diese Vereinbarung getroffen, schreiten wir zunächst zum Beweise folgenden Hilfssatzes: *Jedes rechtsseitige Tettarionenideal besitzt eine endliche Basis.*

Um dies einzusehen, genügt es bekanntlich, die linksseitig reduzierten Tettarionen des Ideals zu betrachten, d. h. diejenigen, bei welchen sämtliche Komponenten unterhalb der Hauptdiagonale verschwinden. Es bedeute nun $\mathfrak{a}$ das vorgelegte Ideal und

$$a = \left\{ \begin{array}{lllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} & \cdots & a_{1,\mu} \\ 0, & a_{22}, & a_{23} & \cdots & a_{2,\mu} \\ 0, & 0, & a_{33} & \cdots & a_{3,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0, & 0 & \cdots & a_{\mu,\mu} \end{array} \right\}$$

ein aus $\mathfrak{a}$ beliebig herausgegriffenes linksseitig reduziertes μ-Tettarion. Existieren unter diesen linksseitig reduzierten μ-Tettarionen aus $\mathfrak{a}$ solche, bei welchen die erste Komponente $a_{11} \neq 0$, so bedeute α eines derjenigen unter ihnen, für welches diese erste Komponente α_{11} positiv

[1]) Für diesbezügliche Definitionen und Sätze vergl. meine „Zahlentheorie der Tettarionen" in der „Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. Zürich". Jahrg. 51. 1906.

und möglichst klein, aber doch nicht Null ist. Nach dieser Annahme kann dann niemals $0 < | a_{11} | < \alpha_{11}$ sein, sondern es ist entweder $a_{11} = 0$, oder $| a_{11} | \geqq \alpha_{11}$. — Man erkennt jetzt, dass alle ersten Komponenten a_{11} der linksseitig reduzierten μ-Tettarionen aus $\mathfrak{a}$ Vielfache von α_{11} sind. Die Zahlen $0, 1, 2, \ldots \alpha_{11} - 1$ bilden nämlich ein vollständiges Restsystem mod α_{11}; folglich existiert eine rationale ganze Zahl k der Art, dass

$$0 \leqq a_{11} - k \cdot \alpha_{11} < \alpha_{11}.$$

Da aber zugleich mit a und α auch $a - k \cdot \alpha$ im Ideale $\mathfrak{a}$ auftritt, muss, wegen der über α getroffenen Annahme, $a_{11} = k \cdot \alpha_{11}$ sein. — Jedem linksseitig reduzierten μ-Tettarion a aus $\mathfrak{a}$ lässt sich demnach eine ganze Zahl k der Art zuordnen, dass die *erste* Komponente von $r = a - k \cdot \alpha$ verschwindet. — Ein beliebig aus $\mathfrak{a}$ herausgegriffenes μ-Tettarion z kann somit in die Gestalt

$$z = \varepsilon \cdot a = \varepsilon \cdot r + \varepsilon \cdot k \cdot \alpha = r^{(1)} + k^{(1)} \cdot \alpha = k^{(1)} \cdot \alpha + r^{(1)}$$

gebracht werden, wobei ε ein geeignet gewähltes Einheitstettarion vorstellt, und $r^{(1)}$ höchstens $(\mu - 1)$-kolonnig ist. $k^{(1)}$ und $r^{(1)}$ sind von z abhängig, variieren zugleich mit z, während α als konstant, als durch das vorgelegte Ideal $\mathfrak{a}$ gegeben, betrachtet werden kann.

Alle Tettarionen $r^{(1)}$ sind in $\mathfrak{a}$ enthalten, und man überzeugt sich leicht, dass ihre Gesamtheit wieder ein rechtsseitiges Ideal $\mathfrak{r}$ bildet, welches höchstens $(\mu - 1)$-kolonnig ist. — Auf dieses lässt sich dieselbe Schlussweise anwenden: jedes Tettarion $r^{(1)}$ aus $\mathfrak{r}$ hat die Gestalt: $r^{(1)} = \varepsilon^{(1)} \cdot b$, wo $\varepsilon^{(1)}$ ein geeignetes Einheits-μtettarion vorstellt und b ein linksseitig reduziertes von der Form:

$$b = \left\{ \begin{array}{llllll} 0, & b_{12}, & b_{13}, & b_{14} & \ldots & b_{1,\mu} \\ 0, & 0, & b_{23}, & b_{24} & \ldots & b_{2,\mu} \\ 0, & 0, & 0, & b_{34} & \ldots & b_{3,\mu} \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0, & 0, & 0, & 0 & \ldots & b_{\mu-1,\mu} \\ 0, & 0, & 0, & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\}.$$

Enthält nun $\mathfrak{r}$ solche linksseitig reduzierten Tettarionen b, bei welchen $b_{12} \neq 0$, so existiert unter ihnen, aus ähnlichen Gründen wie oben, ein gewisses Tettarion β und rationale ganze Zahlen l, so beschaffen, dass $b_{12} - l \cdot \beta_{12} = 0$ wird, dass somit in $b - l \cdot \beta = s$, also auch in $\varepsilon^{(1)} \cdot b = \varepsilon^{(1)} \cdot l \cdot \beta + \varepsilon^{(1)} \cdot s = l^{(1)} \cdot \beta + s^{(1)}$ die *zwei* ersten Kolonnen aus lauter Nullen bestehen, d. h. dass $s^{(1)} = r^{(1)} - l^{(1)} \cdot \beta$ höchstens $(\mu - 2)$-kolonnig wird. Die Gesamtheit der Tettarionen $s^{(1)}$ bildet wieder ein rechtsseitiges Ideal $\mathfrak{s}$, das höchstens $(\mu - 2)$-kolonnig ist, und auf welches man dieselbe Schlussweise anwenden kann, u. s. w. Durch diese Kette von Schlüssen gelangt man nacheinander zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} z &= k^{(1)} \cdot \alpha + r^{(1)} \\ r^{(1)} &= l^{(1)} \cdot \beta + s^{(1)} \\ s^{(1)} &= m^{(1)} \cdot \gamma + t^{(1)} \\ &\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ v^{(1)} &= p^{(1)} \cdot \zeta \end{aligned}$$

Die Tettarionen $k^{(1)}, l^{(1)}, m^{(1)} \ldots . p^{(1)}$ variieren mit z, während $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \zeta$ nur von der Natur des vorgelegten Ideals $\mathfrak{a}$, aber nicht vom speziellen, aus $\mathfrak{a}$ herausgehobenen z abhängig sind. — Da ferner α höchstens μkolonnig ist, β höchstens $(\mu - 1)$-kolonnig, γ höchstens $(\mu - 2)$-kolonnig, u. s. f., so kommt man, nach einer endlichen Anzahl von Operationen, auf ein einkolonniges Tettarion ζ und damit auf eine letzte Gleichung. Jedes Tettarion z des vorgelegten Ideals $\mathfrak{a}$ ist somit in der Form

$$z = k^{(1)} \cdot \alpha + l^{(1)} \cdot \beta + m^{(1)} \cdot \gamma + \cdots + p^{(1)} \cdot \zeta$$

darstellbar, mit andern Worten: Aus dem Ideale $\mathfrak{a}$ kann man Tettarionen $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \zeta$ in *endlicher* Anzahl so auswählen, dass jedes Tettarion z aus $\mathfrak{a}$ sich als lineare homogene Funktion derselben darstellen lässt. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Aussage: das Ideal $\mathfrak{a}$ besitzt die endliche Basis $[\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta]$.

Aus obigem Beweise geht hervor, dass die Glieder $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ der Basis so gewählt werden können, dass ihre Anzahl höchstens μ beträgt. Wir wollen jetzt weiter zeigen, dass diese Anzahl sich immer auf 1 reduzieren lässt:

Angenommen, es sei dies für jede n-gliedrige Basis bereits festgestellt $(n > 1)$; dann würde es auch für jede $(n + 1)$ -gliedrige Basis gelten; denn das aus irgend einer n-gliedrigen Basis $[\alpha, \beta, \ldots \zeta]$ erzeugte rechtsseitige Tettarionenideal enthält den Inbegriff der Tettarionen

$$g^{(1)} \cdot \alpha + g^{(2)} \cdot \beta + \cdots + g^{(n)} \cdot \zeta,$$

welche entstehen, wenn $g^{(1)}, g^{(2)} \ldots . g^{(n)}$ unabhängig von einander die Gesamtheit der ganzen Tettarionen durchlaufen. Nach Voraussetzung wäre dieses Ideal mit einem rechtsseitigen Hauptideale $[g \cdot x]$ identisch, d. h. die n-gliedrige Basis $[\alpha, \beta \ldots \zeta]$ liesse sich durch eine eingliedrige Basis $[x]$ ersetzen. Jede $(n + 1)$ -gliedrige Basis

$[\alpha, \beta \ldots \zeta, \eta]$ könnte man also durch eine zweigliedrige $[x, \eta]$, und diese wieder durch eine eingliedrige $[y]$ ersetzen. Es genügt somit, nachzuweisen, dass jedes aus *irgend zwei* ganzen μ-Tettarionen a und b erzeugte rechtsseitige Ideal immer Hauptideal ist. — Dieser Nachweis ist für den Fall, dass mindestens eines der beiden μ-Tettarionen a und b eine nicht verschwindende Norm hat, bereits geliefert [1]). Es bleibt nur noch der Fall zu erledigen übrig, in welchem a und b beide Nullteiler sind.

Bekanntlich ist immer $a = \varepsilon^{(1)} \cdot \alpha \cdot \varepsilon^{(2)}$, $b = \varepsilon^{(3)} \cdot \beta \cdot \varepsilon^{(4)}$, wobei die vier $\varepsilon^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, 3, 4)$ passend gewählte Einheits-μtettarionen vorstellen, während α und β Diagonal-μtettarionen sind. Die Basis $[a, b]$ darf man dann durch $[\alpha \cdot \varepsilon^{(2)}, \beta \cdot \varepsilon^{(4)}]$ ersetzen, denn linksseitig assoziierte Tettarionen erzeugen dasselbe rechtsseitige Ideal. Da es sich ferner nur darum handelt, zu entscheiden, ob das Ideal

$$[g^{(1)} \cdot \alpha \cdot \varepsilon^{(2)} + g^{(2)} \cdot \beta \cdot \varepsilon^{(4)}] = [g^{(1)} \cdot \alpha \cdot \varepsilon^{(2)} \cdot (\varepsilon^{(4)})^{-1} + g^{(2)} \cdot \beta]\, \varepsilon^{(4)} =$$
$$= [g^{(1)} \cdot \alpha^{(1)} + g^{(2)} \cdot \beta]\, \varepsilon^{(4)}$$

Hauptideal ist oder nicht, hat man nur nötig, das Ideal $[g^{(1)} \cdot \alpha^{(1)} + g^{(2)} \cdot \beta]$ zu untersuchen. Aus dieser Überlegung geht hervor, dass es nicht eine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn man voraussetzt, eines der beiden erzeugenden Tettarionen ist Diagonaltettarion. — Demnach sei $[a, b]$ die Basis unseres Ideals, wobei b ein Diagonaltettarion vorstellt. Bedeutet σ seinen Rang (vergl. „Zahlentheorie der Tettarionen" § 8), so besitzt es genau σ nicht verschwindende Komponenten, und von diesen dürfen wir voraussetzen, dass sie die σ letzten Stellen der Hauptdiagonale einnehmen, da wir eventuell β durch $\gamma^r \cdot \beta \cdot \gamma^s$ ersetzen können, wo r und s passend gewählte Exponenten sind, während γ das früher definierte Einheitstettarion vorstellt, welches, als Faktor gesetzt, eine cyklische Vertauschung der Kolonnen, bezw. der Zeilen, hervorbringt (v. l. c. § 8, 1). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf somit gesetzt werden:

$$b = \left\{\begin{matrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & b_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & b_2 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & b_\sigma \end{matrix}\right\} \text{ wo } b_\lambda > 0 \ (\lambda = 1, 2, \ldots . \sigma).$$

[1]) Vergl. meine „Zahlentheorie der Tettarionen" § 11, 6. Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft Zürich. Jahrgang 51. 1906.

Bedeutet ϱ den Rang von a, so ist a einem linksseitig reduzierten μ-Tettarion äquivalent, bei welchem die ϱ ersten Hauptdiagonalkomponenten positiv sind, während alle andern Diagonalkomponenten verschwinden. Wir dürfen also setzen:

$$a = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} & \dots & a_{1,\varrho} & \dots\dots & a_{1,\mu} \\ 0, & a_{22}, & a_{23} & \dots & a_{2,\varrho} & \dots\dots & a_{2,\mu} \\ 0, & 0, & a_{33} & \dots & a_{3,\varrho} & \dots\dots & a_{3,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0, & 0, & 0 & \dots & a_{\varrho,\varrho} & \dots\dots & a_{\varrho,\mu} \\ 0, & 0, & 0 & \dots & 0, & 0 \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0, & 0, & 0 & \dots & 0, & 0 \dots\dots & 0 \end{Bmatrix},$$

wobei die $(\mu - \varrho)$ letzten Zeilen lauter Nullen enthalten, $a_{\lambda,\lambda} > 0$ ist $(\lambda = 1, 2, \dots \varrho)$, unterhalb der Hauptdiagonale nur Nullen stehen, oberhalb derselben, in den ϱ ersten Zeilen, beliebige ganze Zahlen.

Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Fall: $\varrho + \sigma \geqq \mu$. Unser Ideal enthält, zugleich mit a und b, auch die Summe $a + b = s$. Dieses s hat aber, wegen der getroffenen Annahmen, eine von Null verschiedene Norm (dieselbe ist nämlich gleich dem Produkte der μ Diagonalkomponenten von s); infolgedessen ist das betreffende Ideal sicher Hauptideal, denn es besteht dann nicht ausschliesslich aus Nullteilern.

II. Fall: $\varrho + \sigma < \mu$. Damit das aus a und b erzeugte rechtsseitige Ideal Hauptideal sei, ist notwendig und hinreichend, dass 5 Tettarionen: x, α, β, f, g, von solcher Beschaffenheit existieren, dass gleichzeitig

$$\alpha \cdot x = a \tag{1}$$
$$\beta \cdot x = b \tag{2}$$
$$f \cdot a + g \cdot b = x. \tag{3}$$

Dann enthalten nämlich die beiden rechtsseitigen Ideale: $[g^{(1)} \cdot a + g^{(2)} \cdot b]$ einerseits, $[g \cdot x]$ andererseits, genau dieselben Tettarionen, sind also identisch. — In unserm Falle setze man:

$$x = a + b;\ f = g = 1;\ \text{ferner}$$

$$\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varrho} e^{(\lambda,\lambda)} = \begin{Bmatrix} 1, 0 & . & \dots\dots & 0 \\ 0, 1, 0 & & \dots\dots & 0 \\ 0, 0, 1, 0 & & \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0 & \dots & 1 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots\dots & 0 \end{Bmatrix} \beta = \sum_{\lambda=\mu-\sigma+1}^{\lambda=\mu} e^{(\lambda,\lambda)} = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & \dots\dots & 0 \\ 0, 0 & \dots & \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0 & \dots 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots 1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots\dots & 1 \end{Bmatrix}$$

In α sind nur die ϱ ersten, in β nur die σ letzten Diagonalkomponenten jeweilen gleich 1, während alle übrigen Komponenten sämtlich verschwinden. Man übersieht, dass dann tatsächlich die obigen Gleichungen (1), (2) und (3) bestehen.

Mithin ist jedes rechtsseitige Ideal mit zweigliedriger Basis Hauptideal, also auch ein solches mit endlicher Basis, somit überhaupt jedes rechtsseitige Ideal, infolge des oben bewiesenen Hilfssatzes.

Der entsprechende Fundamentalsatz gilt für linksseitige Tettarionenideale.