Über die zahlentheoretischen Formeln Liouville's.

Von

Ernst Meissner.

Einleitung.

In den Bänden III, IV, V, IX und X der zweiten Serie des Journal de mathématiques pures et appliquées hat J. Liouville unter dem Titel: «Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres» eine Reihe von 18 Artikeln veröffentlicht. Dieselben enthalten etwa 60 Formeln, welche zahlreiche zahlentheoretische Anwendungen gestatten, für welche aber Liouville selbst keine Beweise publiziert hat. Erst über zwanzig Jahre später hat P. Pepin in einer eigenen Abhandlung einen Teil derselben bewiesen (Formules d'analyse utiles dans la théorie des nombres. Journal de math. sér. 4, T. IV, 1888). Es sind dies im wesentlichen vier Formeln, aus denen sich aber alle Gleichungen ableiten lassen, die in den ersten fünf, dem 17. und dem 18. Artikel angegeben sind. Auch die Formel (L) des 6. Artikels ist in ihnen enthalten.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, die sämtlichen in den 10 Artikeln VII bis XVI publizierten Formeln herzuleiten. Unerledigt bleiben wesentlich nur noch die zwei Formeln (N) und (Q) des 6. Artikels, welche sehr spezielle Fälle allgemeinerer Relationen zu sein scheinen. Ausser den erwähnten beweise ich drei weitere von Liouville angegebene Gleichungen, welche mehrere der in den «formules générales» enthaltenen in sich schliessen.

Um die Brauchbarkeit der Formeln zu zeigen, wird zum Schluss in § 10 eine Klassenrelation bewiesen. Zwei Sätze, welche Halphen im Bulletin de la société math. de France (Bd. 6) veröffentlicht hat, lassen sich als Spezialfälle Liouville'scher Formeln (der Gleichungen VIII ε und IX ζ) darstellen, worauf mich Herr Prof. Hurwitz aufmerksam machte.

Um den Umfang dieser Arbeit nicht allzu stark auszudehnen, habe ich aber jene Deduktion, die Herleitung der Jakobi-Eisenstein'schen Sätze über die Zerlegungen einer beliebigen Zahl in vier und 8 Quadrate, sowie weitere auf spezielle quadratische Formen von 3 und 4 Variablen bezügliche Anwendungen Liouville'scher Gleichungen unterdrückt.

Herrn Prof. Dr. Hurwitz, meinem hochverehrten Lehrer, sage ich herzlichen Dank für seine Ratschläge, sowie für das wohlwollende Interesse, mit dem er das Entstehen dieser Arbeit begleitet hat.

---

§ 1.

Der Formel, welche Gegenstand dieses ersten Paragraphen sein soll, liegen zwei verschiedene Zerlegungsarten der positiven Zahl m zu Grunde.

Die erste derselben ist durch die Gleichungen

$$m = m'^2 + m'' \tag{1}$$

$$m'' = 2^{\alpha''} \cdot d'' \cdot \delta'' \tag{1'}$$

gekennzeichnet. Hiebei bedeuten, wie überall im folgenden, alle Buchstaben ganze Zahlen. m'', d'' und δ'' sind positiv, d'' und δ'' ausserdem ungerade, sodass α'' der Exponent der höchsten in m'' enthaltenen Potenz von 2 ist. Die Zahl m' unterliegt keiner weitern Bedingung.

Unter

$$\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$$

verstehen wir eine Funktion von vier Variablen, welche für alle zur Anwendung gelangenden (immer ganzzahligen) Argumentwerte definiert ist, und den Bedingungen

$$\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu) = \mathfrak{F}(-\varkappa, \lambda, \mu, \nu) = \mathfrak{F}(\varkappa, -\lambda, \mu, \nu) = \mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, -\mu, \nu)$$

$$\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, -\nu) = -\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu) \tag{2}$$

genügt.

Nunmehr summieren wir die Ausdrücke

$$(-1)^{m''-1} \cdot \mathfrak{F}(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''} d'' + m' - \delta'', \delta'') \tag{3}$$

bei festem m' über alle Lösungen der Gleichung (1'), und addieren alle auf diese Weise für die verschiedenen, der Gleichung (1) genügenden Wertsysteme (m', m'') gebildeten Summen.

Das Resultat dieser Operation schreiben wir in der Form

$$S_1 = \sum_{m = m'^2 + 2^{\alpha''} \cdot d'' \cdot \delta''} (-1)^{m''-1} \cdot \mathfrak{F}\left(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''} d'' + m' - \delta'', \delta''\right) \quad (4)$$

und behalten eine entsprechende Art der Bezeichnung auch für das weitere bei.

Wir betrachten ferner die durch die Gleichung

$$m = m_1^2 + 2 d_2 \cdot \delta_2 \quad (5)$$

gegebene Zerlegung der Zahl m. Es soll hiebei m_1 irgend eine positive, negative oder verschwindende ganze Zahl sein; d_2 und δ_2 seien positiv, δ_2 ausserdem nur ungerade. Zwei Lösungen (m_1, d_2, δ_2) und (m_1', d_2', δ_2') von (5) sind als verschieden zu betrachten, wenn nicht gleichzeitig die drei Gleichungen

$$m_1 = m_1'; \quad d_2 = d_2'; \quad \delta_2 = \delta_2'$$

erfüllt sind. Die über sämtliche Lösungen der Gleichung (5) erstreckte Summe der Ausdrücke

$$\mathfrak{F}(m_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - m_1 - \delta_2, -2d_2 + 2m_1 + \delta_2)$$

ist nach vorigem mit

$$S_2 = \sum_{m = m_1^2 + 2 d_2 \delta_2} \mathfrak{F}(m_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - m_1 - \delta_2, -2d_2 + 2m_1 + \delta_2) \quad (6)$$

zu bezeichnen.

Endlich definieren wir noch das Symbol $\omega(\varkappa)$ durch die Festsetzungen:

$\omega(\varkappa) = 1$, wenn $\varkappa$ Quadrat einer ganzen Zahl,

$\omega(\varkappa) = 0$, wenn dies nicht der Fall ist.

Diese Definition soll auch für die folgenden Paragraphen Gültigkeit haben.

Die Liouville'sche Formel, die hier abgeleitet werden soll, schreibt sich nunmehr in der Form:

$$S = S_1 + S_2 = \omega(m) \cdot \sum_{i = 1, 3, 5, \ldots (2\sqrt{m} - 1)} \mathfrak{F}\left(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - i, i - \sqrt{m}, i\right) \quad (7)$$

Ihrem Beweis schicken wir zunächst einige Bemerkungen voraus.

Der Anblick der Ausdrücke (4) und (6) lehrt, dass in jedem Gliede der Summe S das erste Argument der Funktion $\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ gleich der Summe der beiden letzten Argumente ist, sodass $\mathfrak{F}$ nur in der Form

$$\pm \mathfrak{F}(\mu + \nu, \lambda, \mu, \nu)$$

auftritt. Aus den über d_2 und δ'' gemachten Voraussetzungen folgt ferner, dass λ und ν nur ungerade Werte annehmen. In S_1 ist ν ausserdem immer positiv. Die Summe S soll nun dadurch ausgewertet werden, dass untersucht wird, wie oft das Glied

$$\mathfrak{F}(y + z, x, y, z) \tag{8}$$

darin auftritt, wenn x, y, z irgend welche feste ganze Zahlen bedeuten. Sind x und z gerade, so tritt ein Term (8) überhaupt nicht auf; wir nehmen daher gleich an, x und z seien ungerade, d. h.

$$x \equiv 1 \pmod 2 \qquad z \equiv 1 \quad (2) \tag{9}$$

In der Summe S_1 tritt das Glied $\mathfrak{F}(y + z, x, y, z)$ so oft auf, als das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \delta'' - 2m' &= x \\ 2^{\alpha''} d'' + m' - \delta'' &= y \\ \delta'' &= z \\ m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \cdot \delta'' & \end{aligned}\right\}$$

Lösungen besitzt, welche den anfangs gestellten Forderungen d'' und δ'' betreffend, genügen. Dieses System ist äquivalent mit

$$\left.\begin{aligned} 2m' &= z - x \\ \delta'' &= z \\ 2 \cdot 2^{\alpha''} d'' &= x + 2y + z \\ 4m &= x^2 + 4yz + 3z^2 \end{aligned}\right\}$$

also mit denjenigen Lösungen der Gleichung

$$4m = x^2 + 4y \cdot z + 3z^2 \tag{A}$$

welche die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} z &> 0 \\ x + 2y + z &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

erfüllen. Umgekehrt entspricht jeder solchen Lösung eine Zerlegung

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \cdot \delta''$$

für welche in S_1 das Summenglied

$$(-1)^{m''-1} \mathfrak{F}(y + z, x, y, z)$$

auftritt, welches wegen

$$m'' \equiv 2^{\alpha''} \cdot d'' \tag{2}$$

die Form

$$(-1)^{y+\frac{x+z}{2}-1} \cdot \mathfrak{F}(y+z, x, y, z) \tag{10}$$

annimmt.

Wenn keine Lösungen von (A) existieren, für welche $z>0$ würde, so tritt kein Glied (8) in S_1 auf. Im andern Falle gibt es sicher eine Lösung von (A), für die x und z positive ungerade Zahlen X resp. Z sind. Ihr ist eindeutig umkehrbar die Lösung $(-X, y, +Z)$ zugeordnet, und die Bedingungen (B) gehen für zwei solche korrespondierende Lösungen über in

$$X+2y+Z>0 \quad \text{resp.} \quad -X+2y+Z>0.$$

Die entsprechenden Summenglieder in S_1 sind wegen (2) von der Form

$$\pm\mathfrak{F}(y+Z, X, y, Z),$$

und zwar tritt das Plus-Zeichen auf, wenn die Lösung (X, y, Z) von (A) einem der Bedingungssysteme

$$\left.\begin{array}{l} X+2y+Z>0 \\ X+2y+Z\equiv 2\ (4) \end{array}\right\}(\mathrm{B}_1) \qquad \left.\begin{array}{l} -X+2y+Z>0 \\ -X+2y+Z\equiv 2\ (4) \end{array}\right\}(\mathrm{B}_2),$$

das Minuszeichen, wenn sie einer der Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} X+2y+Z>0 \\ X+2y+Z\equiv 0\ (4) \end{array}\right\}(\mathrm{B}_3) \qquad \left.\begin{array}{l} -X+2y+Z>0 \\ -X+2y+Z\equiv 0\ (4) \end{array}\right\}(\mathrm{B}_4)$$

genügt.

Die Forderungen (B_4) resp. (B_2) sind aber in den Forderungen (B_1) resp. (B_3) enthalten, da nach (9)

$$2X\equiv 2\ \ (4),$$

und die Glieder, welche durch zwei solche Systeme gleichzeitig erzeugt werden, heben sich des verschiedenen Vorzeichens wegen fort. Man kann sich also auf diejenigen Lösungen von (A) beschränken, für welche entweder

$$\left.\begin{array}{l} X+2y+Z>0 \\ X+2y+Z\equiv 2\ (4) \\ X-2y-Z\geqq 0 \end{array}\right\}(\mathrm{B}_1') \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} X+2y+Z>0 \\ X+2y+Z\equiv 0\ (4) \\ X-2y-Z>0 \end{array}\right\}(\mathrm{B}_3')$$

erfüllt ist. In der letzten Ungleichung von (B_3') ist das Gleichheitszeichen weggelassen worden, da es wegen der darüber stehenden Kongruenz nicht auftreten kann. Im Falle (B_1') tritt in S_1 das Glied

$$\mathfrak{F}(y+Z, X, y, Z)$$

mit dem positiven, im Fall (B_3') mit dem negativen Zeichen auf.

Dieselbe Untersuchung wie für S_1 führen wir nun auch für die Summe (6) aus.

In S_2 tritt $\mathfrak{F}(y+z, x, y, z)$ so oft auf, als mit den Voraussetzungen verträgliche Lösungen des Systems

$$\left.\begin{aligned} 2\,d_2 + \delta_2 &= x \\ 2\,d_2 - m_1 - \delta_2 &= y \\ -2\,d_2 + 2\,m_1 + \delta_2 &= z \end{aligned}\right\}$$

vorhanden sind. Dieses ist aber äquivalent mit

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= y+z \\ 2\,\delta_2 &= x - 2\,y - z \\ 4\,d_2 &= x + 2\,y + z \\ 4\,m &= x^2 + 4\,y\,z + 3\,z^2 \end{aligned}\right\}$$

d. h. mit dem Inbegriff der Lösungen der Gleichung (A), für welche

$$\left.\begin{aligned} x - 2\,y - z &> 0 \\ x + 2\,y + z &> 0 \\ x + 2\,y + z &\equiv 0\ (4) \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{C}).$$

Sind X und Z wieder positive, ungerade Zahlen, so entspricht der Lösung (X, y, Z) von (A) ein-eindeutig die Lösung $(X, -y, -Z)$. Aus (C) ergibt sich, dass x überhaupt nur positive Werte X annehmen kann. Für die Lösungen

$$(X, y, Z) \qquad \text{resp.} \qquad (X, -y, -Z)$$

werden die Bedingungen (C) zu

$$\left.\begin{aligned} X - 2\,y - Z &> 0 \\ X + 2\,y + Z &> 0 \\ X + 2\,y + Z &\equiv 0\ (4) \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{C}_1) \qquad \text{resp.} \qquad \left.\begin{aligned} X + 2\,y + Z &> 0 \\ X - 2\,y - Z &> 0 \\ X + 2\,y + Z &\equiv 2\ (4) \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{C}_2)$$

und jeder Lösung (C_1) von (A) entspricht in S_2 der Term

$$\mathfrak{F}(y+Z, X, y, Z),$$

jeder Lösung (C_2) aber das Glied

$$\mathfrak{F}(-y-Z, X, -y, -Z) = -\mathfrak{F}(y+Z, X, y, Z).$$

Vergleicht man nun die Bedingungen (C_1) und (C_2) mit den bei der Betrachtung von S_1 erhaltenen Systemen (B_1') und (B_3'), so erkennt man, dass (B_3') mit (C_1) identisch ist, und dass auch (C_2) mit (B_1') übereinstimmt, wenn man nur in (B_1') vom Gleichheitszeichen der letzten Ungleichung absieht. Jede Lösung (X, y, Z) von (A), für die

$$X - 2\,y - Z \neq 0$$

genügt also keinem oder zweien der Systeme (B_1'), (C_2); (B_3'), (C_1), und erzeugt im letztern Falle in S denselben Term zweimal, aber mit verschiedenen Vorzeichen. Ihr Beitrag an die Summe S ist daher in allen Fällen gleich null, und sie braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden.

In S bleiben nur noch diejenigen Glieder übrig, die durch die Lösungen (B_1') von (A) erzeugt werden, für welche

$$X - 2y - Z = 0. \tag{11}$$

(A) geht dann aber über in

$$m = (y + Z)^2 \tag{A'}$$

woraus ersichtlich ist, dass derartige Lösungen nur dann existieren, wenn m eine Quadratzahl ist. Wenn dies nicht der Fall ist $\big(\omega(m) = 0\big)$, so zerstören sich sämtliche Glieder in S, und die Formel (7) ist bewiesen.

Ist aber m eine Quadratzahl, also $\omega(m) = 1$, so geht wegen (11) das Bedingungssystem (B_1') über in

$$\left.\begin{array}{l} X + 2y + Z > 0 \\ X - 2y - Z > 0 \end{array}\right\} (B_1'')$$

und wegen (A′) wird

$$\left.\begin{array}{r} X = 2\sqrt{m} - Z \\ y = \sqrt{m} - Z \\ y + Z = \sqrt{m} \end{array}\right\}. \tag{12}$$

Man erhält aber alle Lösungen von (A′), die (B_1'') erfüllen und jede nur einmal, wenn Z alle ungeraden Zahlen i von 1 bis $(2\sqrt{m} - 1)$ durchläuft. Sie Summe S wird daher

$$S = \sum \mathfrak{F}(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - Z, \sqrt{m} - Z, Z) \quad \text{oder}$$
$$S = \omega(m) \cdot \sum_{i = 1, 3, \ldots (2\sqrt{m} - 1)} \mathfrak{F}(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - i, \sqrt{m} - i, i)$$

womit der Beweis der Formel (7) auch für diesen Fall geleistet ist. Mit Benützung der Gleichungen (2) kann sie leicht in die Form gebracht werden:

$$\sum (-1)^{m''-1} \mathfrak{F}(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''} d'' + m' - \delta'', \delta'') -$$
$$\sum \mathfrak{F}(m_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - m_1 - \delta_2, 2d_2 - 2m_1 - \delta_2) =$$
$$= \omega(m) \cdot \Big\{\mathfrak{F}(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1, \sqrt{m} - 1, 1) +$$
$$+ \mathfrak{F}(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 3, \sqrt{m} - 3, 3) + \cdots + \mathfrak{F}(\sqrt{m}, 1, 1 - \sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\Big\}. \tag{X(ν)}$$

Dies ist die Hauptformel des 10. der Liouville'schen Artikel.[1])

[1]) Liouville: Sur quelques formules ... Journal de mat. T. IV, sér. 2, pg. 195.

Durch Spezialisieren der Funktion $\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ entstehen aus ihr beliebig viele neue Formeln, von denen hier jedoch nur die in den „formules générales" auftretenden behandelt werden sollen.

Man erfüllt die Gleichungen (2), d. h. die einzigen Beschränkungen, denen die Funktion $\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ unterliegt, wenn man

$$\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu) = F(\nu)$$

setzt, wo $F(\nu)$ eine für alle auftretenden Argumentwerte definierte, ungerade Funktion bedeutet. Dann aber geht die Formel (X ν) über in die Formel ($\varkappa$) desselben Artikels:

$$\sum_{m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta''} (-1)^{m''-1} F(\delta'') - \sum_{m = m_1^2 + 2 d_2 \delta_2} F(2 d_2 - 2 m_1 - \delta_2) =$$
$$= \omega(m) \left\{F(1) + F(3) + \cdots + F(2\sqrt{m} - 1)\right\}. \qquad (\mathrm{X}\,\varkappa)$$

Ist $f(\varkappa, \lambda)$ eine für alle zur Anwendung gelangenden Argumente definierte gerade Funktion bezüglich jeder ihrer Veränderlichen, so befriedigt der Ansatz:

$$\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu) = \nu f(\varkappa, \lambda)$$

die Bedingungen (2). Die Formel (X ν) verwandelt sich dabei in die speziellere Beziehung:

$$\sum_{m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta''} (-1)^{m''-1} \cdot \delta'' \cdot f(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2 m') - \sum_{m = m_1^2 + 2 d_2 \delta_2} (2 d_2 - \delta_2) f(m_1, 2 d_2 + \delta_2) =$$
$$= \omega(m) \left\{f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1) + 3 f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 3) + \cdots + (2\sqrt{m} - 1) f(\sqrt{m}, 1)\right\} \quad (\mathrm{X}\,\eta)$$

welche unter (η) ebenfalls im 10. Artikel angegeben ist. Hiebei ist die Summe

$$\sum (-2 m_1) f(m_1, 2 d_2 + \delta_2),$$

welche zunächst auf der linken Seite der Gleichung auftritt, unterdrückt worden. Ihr Wert ist null, da sich ihre Glieder des doppelten Vorzeichens von m_1 wegen gegenseitig zerstören.

Wenn die gerade Funktion $f(\varkappa, \lambda)$ in Bezug auf das erste Argument $\varkappa$ konstant ist, so geht (η) in die ebenfalls dem 10. Artikel angehörende Formel (θ) über:

$$\sum (-1)^{m''-1} \cdot \delta'' \cdot f(\delta'' - 2 m') - \sum (2 d_2 - \delta_2) f(2 d_2 + \delta_2) =$$
$$= \omega(m) \left\{f(2\sqrt{m} - 1) + 3 f(2\sqrt{m} - 3) + \cdots + (2\sqrt{m} - 1) f(1)\right\}. \quad (\mathrm{X}\,\theta)$$

Unterdrückt man dagegen in (η) das zweite Argument von $f(\varkappa, \lambda)$, so erhält man zunächst:

$$\sum(-1)^{m''-1}\cdot\delta''\cdot f(2^{\alpha''}d''+m')-\sum(2\,d_2-\delta_2)f(m_1)=\omega(m)\cdot m\cdot f(\sqrt{m}).$$

Nun ist aber

$$\sum d_2\, f(m_1)=\sum \delta_2\, f(m_1)$$

und wenn

$$\zeta_1\,(m_2)=\sum_{m_2=d_2\cdot\delta_2} d_2$$

gesetzt wird, so ergibt sich

$$\sum_{m=m_1^2+2d_2\delta_2}(2\,d_2-\delta_2)f(m_1)=\sum_{m=m_1^2+2m_2}\zeta_1\,(m_2)f(m_1)$$

und durch Einsetzen in die vorige Gleichung

$$\sum_{m=m'^2+2^{\alpha''}d''\cdot\delta''}(-1)^{m''-1}\cdot\delta''\cdot f(2^{\alpha''}d''+m')-\sum_{m=m_1^2+2m_2}\zeta_1\,(m_2)f(m_1)=$$

$$=\omega(m)\cdot m\cdot f(\sqrt{m}). \qquad \text{(IX}\,\zeta)$$

Diese Formel findet sich im 9. Artikel von Liouville unter (ζ) angegeben.

Durch die Spezialisierung

$$\mathfrak{F}\,(\varkappa,\lambda,\mu,\nu)=\nu\cdot f(\mu)$$

wo $f(\mu)$ wie vorhin eine gerade Funktion sein soll, erhält man aus der Hauptformel (ν) die Formel (i) des 10. Artikels in der Form:

$$\sum(-1)^{m''-1}\cdot\delta''\cdot f(2^{\alpha''}\cdot d''+m'-\delta'')-$$

$$-\sum(2\,d_2-2\,m_1-\delta_2)f(2\,d_2-m_1-\delta_2)=$$

$$=\omega(m)\left\{f(1-\sqrt{m})+3f(3-\sqrt{m})+\cdots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m}-1)\right\}. \qquad (\text{X}\,\iota)$$

Weniger einfach ergibt sich aus der Formel (ν) ein Spezialfall, in welchem die Darstellungen der Zahl m als Summe dreier Quadrate eine Rolle spielt, und den wir nunmehr ableiten wollen.

Da in (ν) das vierte Argument ν der Funktion $\mathfrak{F}\,(\varkappa,\lambda,\mu,\nu)$ nur ungerade Werte annimmt, so ist der Ausdruck

$$(-1)^{\mu+\frac{\nu-1}{2}}f(\varkappa)$$

worin $f(\varkappa)$ wieder eine gerade Funktion ist, eine gerade Funktion von $\varkappa$ und μ, dagegen eine ungerade Funktion von ν. Er erfüllt somit die Bedingungen (2), und kann in $(\text{X}\,\nu)$ eingesetzt werden. Dann wird die erste Summe S_1 der linken Seite unter Beachtung der Kongruenzen

$$2^{\alpha''}d''\equiv m''\,(2)$$
$$\delta''\equiv 1\,(2)$$

zu

$$S_1' = \sum (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''} d'' + m'). \tag{13}$$

Die 2. Summe S_2 geht nach einer leichten Reduktion über in

$$S_2' = \sum (-1)^{d_2 + \frac{\delta_2 - 1}{2}} \cdot f(m_1), \tag{14}$$

wo bei festem m_1 zunächst über alle Lösungen der Gleichung

$$m_2 = d_2 \cdot \delta_2 \tag{15}$$

zu addieren, und sodann die Summe aller so erhaltenen Ausdrücke über die Lösungen von

$$m = m_1^2 + 2\,m_2 \tag{15'}$$

zu bilden ist. Wegen

$$d_2 \equiv m_2 \ (2)$$

wird daher

$$S_2' = \sum_{m = m_1^2 + 2\,m_2} \left[f(m_1)\,(-1)^{m_2} \cdot \sum_{m_2 = d_2 \cdot \delta_2} (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} \right]. \tag{16}$$

Mit Liouville setzen wir abkürzend:

$$\varrho\,(m_2) = \sum_{m_2 = d_2 \cdot \delta_2} (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}}.$$

Nach einem bekannten zahlentheoretischen Satze (der sich übrigens auch aus Liouville'schen Formeln herleiten lässt) bedeutet dann $4 \cdot \varrho\,(m_2)$ die Anzahl der Darstellungen der Zahl $2\,m_2$ durch die quadratische Form

$$x^2 + y^2.$$

Mit dieser Bezeichnung ergibt sich aus (16):

$$4 \cdot S_2' = \sum_{m = m_1^2 + 2\,m_2} f\,(m_1) \cdot (-1)^{m_2} \cdot 4\,\varrho\,(m_2).$$

Es ist aber

$$\varrho\,(m_2) = 0,$$

wenn die Gleichung

$$2\,m_2 = s^2 + s''^2$$

keine ganzzahligen Lösungen hat. Es wird daher

$$4\,S_2' = \sum_{m = m_1^2 + s^2 + s''^2} (-1)^{\frac{s^2 + s''^2}{2}} \cdot f\,(m_1)$$

und hierin ist die Summe über alle Lösungen der angegebenen Gleichung zu erstrecken, für welche

$$s^2 + s''^2 > 0 \qquad s \equiv s'' \quad (2). \tag{17}$$

Aus

$$s \equiv s'' \quad (2)$$

folgt aber

$$2\,s^2 \equiv s^2 + s''^2 \quad (4)$$

oder

$$s^2 \equiv \frac{s^2 + s''^2}{2} \equiv s \quad (2)$$

und es wird daher

$$4\,S_2' = \sum_{m = m_1^2 + s^2 + s''^2} (-1)^s \cdot f(m_1). \tag{18}$$

Nunmehr lässt sich leicht zeigen, dass die in (17) auftretende Bedingung

$$s \equiv s'' \quad (2)$$

unterdrückt werden darf. Ist nämlich

$$s + s'' \equiv 1 \quad (2),$$

so liefert die Zerlegung

$$m = m_1^2 + s^2 + s''^2$$

in (18) viermal den Term $(-1)^s \cdot f(m_1)$. Ihr ist, weil s und s'' verschieden sind, ein-eindeutig die Zerlegung

$$m = m_1^2 + s''^2 + s^2$$

zugeordnet, welche in (18) den entgegengesetzt gleichen Term $(-1)^{s''} f(m_1)$ ebenso oft erzeugt. Die Summe aller dieser Glieder hat den Wert null und darf somit der Summe (18) beigefügt werden.

Aber auch die Bedingung

$$s^2 + s''^2 > 0$$

darf bei Seite gelassen werden, wenn m keine Quadratzahl ist, da in diesem Falle die Gleichung

$$m = m_1^2 + 0$$

keine Lösung besitzt. Ist aber m ein Quadrat, so entsteht für die Zerlegung $s = s' = 0$; $m_1 = \pm \sqrt{m}$ in (18) der Ausdruck

$$f(m_1) + f(-m_1) = 2\,f(\sqrt{m}).$$

Man kann somit die Bedingungen (17) aufheben, wenn man auf der linken Seite von (18) noch den Ausdruck

$$\omega(m) \cdot 2 \cdot f(\sqrt{m})$$

addiert. Es wird dann

$$2\,\omega(m) \cdot f(\sqrt{m}) + 4\,S_2' = \sum (-1)^s f(m_1), \tag{19}$$

wo nun die Summe der rechten Seite über sämtliche Lösungen der Gleichung

$$m = m_1^2 + s^2 + s''^2$$

auszudehnen ist.

Die rechte Seite unserer Hauptformel (X ν) geht durch den Ansatz:

$$\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu) = (-1)^{\mu + \frac{\nu - 1}{2}} f(\varkappa)$$

über in

$$R = \left\{ f(\sqrt{m})\,(-1)^{\sqrt{m} - 1}\left[1 - 1 + 1 \cdots + (-1)^{\sqrt{m} - 1}\right]\right\} \omega(m)$$

und wegen

$$\sqrt{m} \equiv m \quad (2)$$

wird

$$4\,R = \left\{2 \cdot f(\sqrt{m})\,(-1)^{m-1} + 2\,f(\sqrt{m})\right\} \cdot \omega(m). \tag{20}$$

Die Liouville'sche Formel (X ν):

$$S_1' + S_2' = R$$

geht beim Einsetzen der Ausdrücke (18), (19) und (20) endlich über in die Beziehung:

$$4 \sum_{m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta''} (-1)^{m' + \frac{\delta'' - 1}{2}} \cdot f(2^{\alpha''} d'' + m') - \sum_{m = s^2 + s'^2 + s''^2} (-1)^s \cdot f(s') =$$

$$= \omega(m) \cdot 2 \cdot (-1)^{m-1} \cdot f(\sqrt{m}). \tag{XI ϱ}$$

Dies ist die Formel (ϱ) des 11. Artikels, aus welcher sich durch Spezialisierung der Funktion $f(\varkappa)$ weitere interessante Resultate mit Leichtigkeit ergeben, wie dies von Liouville im 11. Artikel teilweise gezeigt wird.

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einigen weiterhin auch gültigen Bemerkungen über die in den Formeln auftretenden Funktionen. Dieselben sind im hohen Grade willkürlich. Sie brauchen durchwegs höchstens für das Gebiet der ganzen Zahlen definiert zu sein. Über ihr Verhalten für nicht ganzzahlige Argumente ist keine Voraussetzung gemacht worden. Natürlich können alle stetigen Funktionen angewendet werden, die sich bei Vorzeichenwechsel ihrer Argumente ändern, wie die Formel jeweilen vorschreibt. Man kann aber mit Vorteil auch unstetige Funktionen gebrauchen. So ergeben sich bemerkenswerte Resultate, wenn man die gerade Funktion $f(\varkappa) = 1$ oder 0 setzt, je nachdem $|\varkappa|$ grösser oder kleiner ist, als eine gegebene positive Zahl a. Oder man setzt $f(\varkappa) = 1$ oder 0, je nachdem $\varkappa$ durch eine vorgeschriebene Zahl p teilbar ist oder nicht. Eine weitere Klasse von Spezialformeln resultiert auch, wenn man geeignete Kombinationen trigonometrischer Funktionen einführt; mit Hülfe der Additionstheoreme können dann die Funktionen zusammengesetzter Argumente durch solche mit einfachen Argumenten ersetzt werden, wodurch die Formeln an Übersichtlichkeit gewinnen.

§ 2.

Die Hauptformel, welche in diesem Paragraphen abgeleitet werden soll, enthält wieder eine Funktion

$$\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$$

von vier Veränderlichen, die aber nunmehr für alle zur Anwendung kommenden Argumentwerte die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu) = -\mathfrak{F}(-\varkappa, \lambda, \mu, \nu) = -\mathfrak{F}(\varkappa, -\lambda, \mu, \nu) = -\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, -\mu, -\nu) \\ \mathfrak{F}(\varkappa, 0, \mu, \nu) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

erfüllt. Sie bezieht sich ferner auf die Zerlegungen einer positiven geraden oder ungeraden Zahl m nach der Gleichung

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_2 \cdot \delta_3 \qquad (2)$$

worin d_3 und δ_3 positive, m_1 und m_2 irgendwelche ganze Zahlen bedeuten. δ_3 soll nur ungerade Werte annehmen.

Die über sämtliche Lösungen von (2) erstreckte Summe

$$S = \sum_{(2)} \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2, d_3 + m_2 - m_1, d_3 + m_2 + m_1, \delta_3 + 2m_1) \quad (3)$$

kann, wenn sie überhaupt einen von null verschiedenen Wert hat, in eine viel einfachere umgeformt werden.

Man sieht zunächst, dass $\varkappa$ und ν immer ungerade Zahlen sind, insbesondere also nie verschwinden. Wegen (1) darf auch λ als von null verschieden angenommen werden, während μ sehr wohl den Wert null haben kann.

Seien nun x, y, t feste, von null verschiedene Zahlen; z sei positiv, negativ oder null. Wenn die Zahlen x und t nicht beide ungerade sind, so tritt der Ausdruck

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

in der Summe (3) niemals auf. Wir setzen daher x und t als ungerade voraus.

Dann erscheint in S das Glied $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ so oft, als das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x &= \delta_3 - 2m_2 \\ y &= d_3 + m_2 - m_1 \\ z &= d_3 + m_2 + m_1 \\ t &= \delta_3 + 2m_1 \end{aligned}\right\}$$

oder das damit äquivalente

$$\left.\begin{aligned} 2m_1 &= z - y \\ \delta_3 &= y - z + t \\ 2m_2 &= y - x - z + t \\ 2d_3 &= x + 2z - t \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Lösungen besitzt, die den gestellten Bedingungen entsprechen, und der Gleichung (2) genügen. Diese geht vermöge der Gleichungen (4) über in

$$4m = 2(y^2 - z^2) + x^2 + 4z \cdot t - t^2 \tag{5}$$

und die Voraussetzungen

$$d_3 > 0 \qquad \delta_3 > 0 \qquad \delta_3 \equiv 1 \quad (2)$$

sind erfüllt, wenn die Lösungen der Gleichung (5) den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} & x + 2z - t > 0 \\ & y - z + t > 0 \\ & y - z + t \equiv 1 \quad (2) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

genügen. Jeder solchen Lösung entspricht vermöge (4) eine Zerlegung (2) der Zahl m, welche in S den Term

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

erzeugt.

Wenn die Gleichung (5) überhaupt eine Lösung hat, so besitzt sie auch immer eine solche, in welcher x, y und t positive Werte

$$X, Y \text{ resp. } T$$

besitzen. Durch Ändern der Vorzeichen ergibt sich aus einer solchen das System der acht Lösungen

1) X, Y, z, T; 2) $-X, Y, -z, -T$; 3) $X, -Y, -z, -T$; 4) $-X, -Y, z, T$
5) $X, Y, -z, -T$; 6) $-X, Y, z, T$; 7) $X, -Y, z, T$; 8) $-X, -Y, -z, -T$.

Sie sind alle von einander verschieden, und das Bedingungssystem (6) nimmt für sie der Reihe nach die Form an:

$$\left.\begin{array}{r} X+2z-T>0 \\ Y-z+T>0 \\ Y-z+T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{+}{(\alpha_1)} \qquad \left.\begin{array}{r} -X-2z+T>0 \\ Y+z-T>0 \\ Y+z-T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{+}{(\alpha_2)}$$

$$\left.\begin{array}{r} X-2z+T>0 \\ -Y+z-T>0 \\ -Y+z-T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{+}{(\alpha_3)} \qquad \left.\begin{array}{r} -X+2z-T>0 \\ -Y-z+T>0 \\ -Y-z+T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{+}{(\alpha_4)}$$

$$\left.\begin{array}{r} X-2z+T>0 \\ Y+z-T>0 \\ Y+z-T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{-}{(\alpha_5)} \qquad \left.\begin{array}{r} -X+2z-T>0 \\ Y-z+T>0 \\ Y-z+T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{-}{(\alpha_6)}$$

$$\left.\begin{array}{r} X+2z-T>0 \\ -Y-z+T>0 \\ -Y-z+T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{-}{(\alpha_7)} \qquad \left.\begin{array}{r} -X-2z+T>0 \\ -Y+z-T>0 \\ -Y+z-T\equiv 1\ (2) \end{array}\right\}\underset{-}{(\alpha_8)}.$$

Jeder Lösung (α_1) bis (α_8) korrespondiert wegen (1) in S das Glied

$$\pm\,\mathfrak{F}\,(X, Y, z, T),$$

und zwar tritt für die Systeme $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ das Pluszeichen, für (α_5) bis (α_8) das Minuszeichen auf, was jeweilen am Fuss der Klammer angedeutet worden ist. Wenn aber die Bedingungen (α_3), (α_4), (α_7) resp. (α_8) erfüllt sind, sind es auch die Bedingungen (α_5), (α_6), (α_1) resp. (α_2). Eine Lösung, die gleichzeitig 2 solchen Systemen genügt, erzeugt aber in der Summe S den Term $\mathfrak{F}\,(X, Y, z, T)$ zwei mal und mit verschiedenen Vorzeichen, und darf sonach unberücksichtigt bleiben. Entfernt man sämtliche derartige Lösungen aus den obenstehenden Systemen, so gehen sie über in die folgenden:

$$\left.\begin{array}{r} X+2z-T>0 \\ Y-z+T>0 \\ Y-z+T\equiv 1\ (2) \\ Y+z-T>0 \end{array}\right\}\underset{+}{(\alpha_1')} \qquad \left.\begin{array}{r} -X-2z+T>0 \\ Y+z-T>0 \\ Y+z-T\equiv 1\ (2) \\ Y-z+T>0 \end{array}\right\}\underset{+}{(\alpha_2')}$$

$$\left.\begin{array}{r} X-2z+T>0 \\ Y+z-T>0 \\ Y+z-T\equiv 1\ (2) \\ Y-z+T>0 \end{array}\right\}\underset{-}{(\alpha_5')} \qquad \left.\begin{array}{r} -X+2z-T>0 \\ Y-z+T>0 \\ Y-z+T\equiv 1\ (2) \\ Y+z-T>0 \end{array}\right\}\underset{-}{(\alpha_6')}.$$

Die beiden ersten erzeugen den Term

$$\mathfrak{F}\,(X, Y, z, T)$$

mit dem positiven, die beiden letzten mit dem negativen Vorzeichen. Da die linken Seiten der letzten Ungleichungen in allen 4 Systemen ungerade Zahlen sind, so darf dort das Gleichheitszeichen weggelassen werden.

Nunmehr tritt eine weitere Reduktion in Evidenz. Wenn die Bedingungen (α_2') resp. (α_6') erfüllt sind, so sind es um so mehr die Bedingungen (α_5') resp. (α_1'). Wie vorhin zerstören sich die solchen Lösungen der Gleichung (5) entsprechenden Glieder in S des verschiedenen Vorzeichens wegen paarweise, und es bleiben von (5) nur noch diejenigen Lösungen zu betrachten, für welche eines der Bedingungssysteme

$$\left.\begin{array}{l} X + 2z - T > 0 \\ Y - z + T > 0 \\ Y - z + T \equiv 1\ (2) \\ Y + z - T > 0 \\ X - 2z + T \geqq 0 \end{array}\right\}(\alpha_1'')_+ \qquad \left.\begin{array}{l} +X - 2z + T > 0 \\ Y + z - T > 0 \\ Y + z - T \equiv 1\ (2) \\ Y - z + T > 0 \\ X + 2z - T \geqq 0 \end{array}\right\}(\alpha_5'')_-$$

befriedigt wird. Wenn aber in der letzten Ungleichung nicht das Gleichheitszeichen gilt, so sind diese beiden Systeme immer gleichzeitig erfüllt, und jede solche Lösung liefert an S keinen von null verschiedenen Beitrag. Man braucht also nur die Lösungen von (5) zu berücksichtigen, für welche entweder

$$X - 2z + T = 0$$

oder $$X + 2z - T = 0 \qquad \text{ist.}$$

In beiden Fällen nimmt jene dann die Form an:

$$2m = y^2 + z^2. \tag{5'}$$

Wenn die Zahl $2m$ keine Darstellung als Summe von 2 Quadratzahlen gestattet, so hat (5') keine Lösung, und der Wert der Summe S ist gleich null. Im andern Falle geht die Gleichung (5') vermöge der Beziehungen

$$\begin{aligned} y &= d_3 + m_2 - m_1 \\ z &= d_3 + m_2 + m_1 \end{aligned}$$

und der Gleichung (2) über in

$$d_3(d_3 - \delta_3 + 2m_2) = 0$$

woraus, da $d_3 > 0$, die Relation

$$d_3 = \delta_3 - 2m_2 = x \qquad \text{hervorgeht.} \tag{7}$$

Hieraus folgt, dass x nur positive Werte annimmt. Setzen wir daher

$$\left.\begin{aligned} d_3 + \delta_3 &= 2a \\ \delta_3 &= 2s + 1 \\ m_1 &= b \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

so sind a, b und s ganze Zahlen, für die die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 < 2s + 1 < 2a \\ a > 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

gelten. Aus den Gleichungen (7), (7') folgt aber:

$$\left.\begin{aligned} x &= d_3 = 2a - 2s - 1 \\ y &= d_3 + m_2 - m_1 = a - b \\ z &= d_3 + m_2 + m_1 = a + b \\ t &= \delta_3 + 2m_1 = 2b + 2s + 1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und dann geht (5') über in

$$m = a^2 + b^2. \tag{5''}$$

Die Summe S endlich erscheint nun in der Gestalt

$$S = \sum_{m = a^2 + b^2} \mathfrak{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1)$$

wo über alle mit (8) verträglichen Lösungen der Gleichung (5'') zu addieren ist.

Hat letztere gar keine Lösung, was z. B. immer der Fall ist, wenn

$$m \equiv 3 \pmod{4},$$

so ist der Summe der Wert null beizulegen. Unter dieser Festsetzung erhält man die für jedes m gültige Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sum_{m = m_1^2 + m_2^2 + d_3\delta_3} \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1,\ \delta_3 + 2m_1) = \\ &\qquad = \sum_{\substack{s=0 \\ m = a^2 + b^2}}^{a-1} \mathfrak{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1). \end{aligned} \tag{XVI 3}$$

Sie bildet das Hauptresultat des 16. Artikels der «formules générales».

Wenn man an Stelle der Funktion $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ die bezüglich jeder Variablen ungerade Funktion

$$F(x, y, z)$$

einführt, was mit den Forderungen (1) verträglich ist, so geht aus der Hauptformel die Formel (1) desselben Artikels hervor:

[1]) Journ. de math. 2e sér., T. 9, p. 389.

$$\sum_{m=m_1^2+m_2^2+d_3\delta_3} F(\delta_3 - 2m_2, d_3 + m_2 - m_1, d_3 + m_2 + m_1) =$$

$$= \sum_{\substack{s=0 \\ m=a^2+b^2}}^{a-1} F(2a - 2s - 1, a - b, a + b). \qquad \text{(XVI 1)}$$

Da hier das 1. Argument nur ungerade Werte annimmt, so ist die weitere Spezialisierung

$$F(x, y, z) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} F(y, z)$$

gestattet. Die rechte Seite der Formel (1) wird dann

$$\sum_{s=0}^{a-1} (-1)^{a-s-1} F(a-b, a+b) =$$

$$= \sum_{m=a^2+b^2} F(a-b, a+b) \left[(-1)^{a-1} + (-1)^{a-2} + \cdot + (-1)^0\right]$$

und es verschwindet somit jedes Glied, welches für gerade Werte von a auftritt. Man erhält also die Gleichung

$$\sum_{m=m_1^2+m_2^2+d_3\delta_3} (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_2} \cdot F(d_3 + m_2 - m_1, d_3 + m_2 + m_1) =$$

$$= \sum_{m=a^2+b^2} F(a-b, a+b) \qquad \text{(XVI 4)}$$

wobei rechts nur über diejenigen Lösungen der Gleichung

$$m = a^2 + b^2$$

zu summieren ist, in denen a eine positive ungerade Zahl bedeutet. Dies ist die Formel (4) des Artikels (16).

Setzt man in der Hauptformel (3)

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = F(x, y, t),$$

wo wieder F eine bezgl. aller Argumente ungerade Funktion sein muss, so ergibt sich die Relation (2) desselben Artikels:

$$\sum_{m=m_1^2+m_2^2+d_3\delta_3} \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2, d_3 + m_2 - m_1, \delta_3 + 2m_1) =$$

$$= \sum_{\substack{s=0 \\ m=a^2+b^2}}^{a-1} F(2a - 2s - 1, a - b, 2s + 2b + 1) \qquad \text{(XVI 2)}$$

Da hier die beiden äussern Argumente ungerade sind, darf die Funktion $F(x, y, t)$ weiter spezialisiert werden nach der Gleichung

$$F(x, y, t) = (-1)^{\frac{t-x}{2}} \cdot F(y),$$

worin $F(y)$ wieder ungerade Funktion ist. Die Formel (2) geht dann nach einigen Reduktionen über in die am Schluss des 16. Artikels von Liouville angegebene Gleichung (5):

$$\sum_{m=m_1^2+m_2^2+d_3\delta_3} (-1)^{m_1+m_2}\cdot F(d_3+m_2-m_1) = (-1)^m\cdot \sum_{m=a^2+b^2} a F(b-a), \quad \text{(XVI 5)}$$

womit sämtliche Formeln des genannten Artikels erschöpft sind.

§ 3.

Die in diesem Abschnitt herzuleitende Formel steht mit der vorigen im engen Zusammenhang, und die Beweisführung geht derjenigen des § 2 genau parallel.

Es tritt in ihr eine für alle zur Anwendung kommende Argumentwerte definierte Funktion auf, welche den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}(\varkappa,\lambda,\mu,\nu) = -\mathfrak{F}(-\varkappa,\lambda,\mu,\nu) = -\mathfrak{F}(\varkappa,-\lambda,\mu,\nu) = -\mathfrak{F}(\varkappa,\lambda,-\mu,-\nu) \\ \mathfrak{F}(0,\lambda,\mu,\nu) = \mathfrak{F}(\varkappa,0,\mu,\nu) = \mathfrak{F}(\varkappa,\lambda,0,0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

genügt.

Die Formel bezieht sich auf die Zerlegungen einer positiven ungeraden Zahl m nach der Gleichung

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1}\cdot d_3\cdot \delta_3. \quad (2)$$

m_2 ist hiebei eine beliebige, m_1 eine ungerade Zahl. d_3 und δ_3 sind positiv und ungerade, und der Exponent α_3 ist grösser oder gleich null.

Die über alle Lösungen von (2) erstreckte Summe

$$S = \sum_{(2)} \mathfrak{F}(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\, d_3+2m_2-m_1,\, d_3+2m_2+m_1,\, 2^{\alpha_3}\delta_3+m_1) \quad (3)$$

soll ausgewertet werden.

Wegen (1) darf man voraussetzen, dass in der Summe S nur solche Glieder auftreten, in denen die beiden ersten Argumente, und von den zwei übrigen wenigstens das eine von null verschieden sind. Ferner sind die beiden innern Argumente immer gerade Zahlen, sodass $\mathfrak{F}$ in S nur in der Form

$$\mathfrak{F}(\varkappa, 2\lambda', 2\mu', \nu)$$

auftritt.

Sind x und y zwei von null verschiedene, z und t zwei nicht gleichzeitig verschwindende ganze Zahlen, so tritt

$$\mathfrak{F}(x, 2y, 2z, t)$$

in der Summe (3) so oft auf, als das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2 &= x \\ d_3 + 2m_2 - m_1 &= 2y \\ d_3 + 2m_2 + m_1 &= 2z \\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1 &= t \end{aligned}\right\}$$

oder das damit gleichwertige:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= z - y \\ 2^{\alpha_3}\delta_3 &= y - z + t \\ 2m_2 &= y - x - z + t \\ d_3 &= x + 2z - t \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Lösungen besitzt, welche die gestellten Anforderungen befriedigen. Diese Lösungen entsprechen aber eindeutig umkehrbar den Lösungen der Gleichung

$$m = x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4zt - t^2, \tag{5}$$

für welche die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} y + z &\equiv 1 \pmod 2 \\ x + y &\equiv 1 \pmod 2 \\ y - z + t &> 0 \\ x + 2z - t &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

erfüllt sind. Wie im vorigen § gezeigt wurde, zerfallen aber alle Wertesysteme (x, y, z, t), die (5) erfüllen, in Gruppen von je 8 verschiedenen, die wir, wenn X und Y die absoluten Werte von x und y bedeuten, in der Form angeben können:

1) X, Y, z, t 2) $-X, Y, -z, -t$ 3) $X, -Y, -z, -t$ 4) $-X, -Y, z, t$
5) $X, Y, -z, -t$ 6) $-X, Y, z, t$ 7) $X, -Y, z, t$ 8) $-X, -Y, -z, -t$.

Die 2 ersten Bedingungen (6) gehen für alle Lösungen über in

$$\left.\begin{aligned} X + t &\equiv 1\ (2) \\ Y + z &\equiv 1\ (2) \end{aligned}\right\}, \tag{α}$$

die übrigen werden der Reihe nach zu:

$$\left.\begin{aligned} Y - z + t &> 0 \\ X + 2z - t &> 0 \end{aligned}\right\}_+ (\alpha_1) \qquad \left.\begin{aligned} Y + z - t &> 0 \\ -X - 2z + t &> 0 \end{aligned}\right\}_+ (\alpha_2)$$

$$\left.\begin{aligned} -Y + z - t &> 0 \\ X - 2z + t &> 0 \end{aligned}\right\}_+ (\alpha_3) \qquad \left.\begin{aligned} -Y - z + t &> 0 \\ -X + 2z - t &> 0 \end{aligned}\right\}_+ (\alpha_4)$$

$$\left.\begin{aligned} Y + z - t &> 0 \\ X - 2z + t &> 0 \end{aligned}\right\}_- (\alpha_5) \qquad \left.\begin{aligned} Y - z + t &> 0 \\ -X + 2z - t &> 0 \end{aligned}\right\}_- (\alpha_6)$$

$$\left.\begin{aligned} -Y - z + t &> 0 \\ X + 2z - t &> 0 \end{aligned}\right\}_- (\alpha_7) \qquad \left.\begin{aligned} -Y + z - t &> 0 \\ -X - 2z + t &> 0 \end{aligned}\right\}_- (\alpha_8)$$

Alle 8 Lösungen erzeugen in der Summe S den Term

$$\pm \mathfrak{F}(X, 2Y, 2z, t),$$

die ersten vier mit dem Plus-, die letzten vier mit dem Minuszeichen. Die Bedingungen (α_1), (α_2), (α_5), (α_6) sind gleichzeitig mit den resp. Bedingungen (α_7), (α_8), (α_3) und (α_4) erfüllt. Die 2 Systemen gleichzeitig korrespondierenden Glieder in S zerstören sich wie im vorigen Paragraphen. Die acht Bedingungssysteme reduzieren sich auf die vier folgenden:

$$\left.\begin{array}{r}Y - z + t > 0\\ X + 2z - t > 0\\ Y + z - t \geqq 0\end{array}\right\}(\alpha_1')_+ \qquad \left.\begin{array}{r}Y + z - t > 0\\ -X - 2z + t > 0\\ Y - z + t \geqq 0\end{array}\right\}(\alpha_2')_+$$

$$\left.\begin{array}{r}Y + z - t > 0\\ X - 2z + t > 0\\ Y - z + t \geqq 0\end{array}\right\}(\alpha_5')_- \qquad \left.\begin{array}{r}Y - z + t > 0\\ -X + 2z - t > 0\\ Y + z - t \geqq 0\end{array}\right\}(\alpha_6')_-$$

wozu in allen Fällen noch die Bedingungen (α) treten. Die Bedingungen (α_2') sind in (α_5'), die Bedingungen (α_6') in (α_1') enthalten, und es tritt in genauer Analogie zum § 2 die weitere Reduktion auf die 2 Systeme ein:

$$\left.\begin{array}{r}Y - z + t > 0\\ X + 2z - t > 0\\ Y + z - t \geqq 0\\ X + t - 2z > 0\end{array}\right\}(\alpha_1'')_+ \qquad \left.\begin{array}{r}Y + z - t > 0\\ X - 2z + t > 0\\ Y - z + t \geqq 0\\ X + 2z - t > 0\end{array}\right\}(\alpha_5'')_-.$$

Wegen der 1. Bedingung von (α) ist die linke Seite der letzten Ungleichung bei beiden Systemen eine ungerade Zahl, also sicher von null verschieden. Mit Ausnahme der Fälle, wo in den dritten Ungleichungen der Systeme (α_1'') und (α_5'') die Gleichheitszeichen auftreten, sind beide Bedingungssysteme identisch, und erzeugen daher Summen, die sich entgegengesetzt gleich sind, und deren Gesamtbeitrag an S daher null ist. Ist aber

$$z = t \pm Y,$$

so geht die Gleichung (5) über in

$$m = X^2 + t^2 = x^2 + t^2. \tag{5'}$$

Vermöge der Gleichungen (2) und (4) wird hieraus

$$2^{\alpha_3}\delta_3\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - d_3 - 2m_2 + m_1\right) = 0$$

oder

$$2^{\alpha_3}\delta_3 - d_3 = 2m_2 - m_1$$

$$x = 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2 = d_3 - m_1. \tag{7}$$

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned} 2^{\alpha_3}\delta_3 + d_3 &= \alpha \\ d_3 &= 2s+1 \\ 2m_2 + m_1 &= \beta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ 2y &= \alpha - 2s - 1 \\ 2z &= \beta + 2s + 1 \\ t &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

α und β sind dann ungerade Zahlen, die wegen $(5')$ der Gleichung

$$2m = \alpha^2 + \beta^2 \tag{5''}$$

genügen. Die Gleichungen (7) und (8) zeigen, dass s, α und β den Beschränkungen

$$\left.\begin{aligned} &0 < 2s+1 < \alpha \\ &\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \equiv 1 \quad (2) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unterworfen sind. Durch die zweite dieser Bedingungen wird das Vorzeichen, das man der Zahl β in $(5'')$ beizulegen hat, eindeutig bestimmt.

Die Summe S geht bei dieser Transformation über in die über alle Lösungen von $(5'')$ zu erstreckende Summe

$$S = \sum \mathfrak{F}\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

wobei α, β und s den Bedingungen (10) genügen müssen. Setzt man noch fest, dass der Summe der Wert null beizulegen ist, wenn gar keine Lösung $(5'')$ möglich ist, so erhält man die Relation:

$$\sum_{m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3} d_3 \delta_3} \mathfrak{F}\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ 2^{d_3}\delta_3 + m_1\right) =$$

$$= \sum_{\substack{s=0 \\ 2m = \alpha^2 + \beta^2}}^{s < \frac{\alpha-1}{2}} \mathfrak{F}\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{XV 3}$$

Dies ist die Formel (3) des Artikels 15 [1]).

Ist F wieder eine bezüglich aller Argumente ungerade Funktion, so liefern die Ansätze

[1]) Journal de mat., sér. 2, T. 9, pg. 321.

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = F(x, y, z)$$

resp.

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = F(x, y, t)$$

die zwei speziellen Beziehungen:

$$\sum_{(2)} F\left(2^{d_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1\right) = \tag{XV 1}$$
$$= \sum_{s=0}^{s<\frac{\alpha-1}{2}} F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1\right)$$

$$\sum F\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1\right) = \tag{XV 2}$$
$$= \sum_{s=0}^{s<\frac{\alpha-1}{2}} F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

welche im 15. Artikel unter (1) und (2) angegeben sind[1].

Wenn die der Formel (3) zu Grunde liegende Zahl m von der Form $4\mu + 3$ ist, so hat die Gleichung (5″) keine Lösung, und da in diesem Fall der Exponent α_3 der Gleichung

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} \cdot d_3 \cdot \delta_3$$

den Wert null hat, nimmt die Gleichung (XV 3) die folgende Gestalt an:

$$\sum_{m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3} \mathfrak{F}\left(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ \delta_3 + m_1\right) = 0. \tag{XIV C}$$

Dies ist die Formel (C) des 14. Artikels[2].

Der spezielle Ansatz

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = F(x, y, z),$$

wo F bezüglich aller Variablen ungerade Funktion ist, liefert die Formel (A) des Artikels 13:

$$\sum_{m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3} F\left(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1\right) = 0. \tag{XIII A}$$

Setzt man hier, da das erste Argument ungerade ist

$$F(x, y, z) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} \cdot F(y, z),$$

so ergibt sich die Formel (A_1) des Artikels 13[3]:

$$\sum_{m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3} (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2} + m_2} \cdot F\left(d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1\right) = 0. \tag{XIII A_1}$$

[1]) Journ. de math., sér. 2, T. 9, pg. 321.
[2]) Journ. de math., sér. 2, T. 9, pg. 281.
[3]) Journ. de math., sér. 2, T. 9, pg. 249.

Die zwei letzten Argumente der Funktion $F(x, y, z)$ in (A) sind gerade. Bedeutet $\Phi(x, u)$ eine für alle zur Anwendung kommenden Argumente definierte und den Gleichungen

$$\Phi(x, u) = -\Phi(-x, u) = \Phi(x, -u)$$

genügende Funktion, so hat der Ausdruck

$$\Phi\left(x, \frac{y+z}{2}\right) - \Phi\left(x, \frac{y-z}{2}\right)$$

ganzzahlige Argumente, und ist sowohl bezüglich x, als bezüglich y und z eine ungerade Funktion. Setzt man ihn für $F(x, y, z)$ in die Formel (A) ein, so ergibt sich die unter (A_2) im XIII. Artikel gegebene Beziehung

$$\sum_{m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3} \left[\Phi(\delta_3 - 2m_2, d_3 + 2m_2) - \Phi(\delta_3 - 2m_2, m_1)\right] = 0. \tag{XIII A_2}$$

Setzt man hier endlich noch

$$\Phi(x, u) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} \cdot f(u),$$

wo $f(u)$ eine gerade Funktion sein muss, so erhält man die Relation (A_3) desselben Artikels:

$$\sum_{m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3} (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2} + m_1} \cdot \left[f(d_3 + 2m_1) - f(m_1)\right] = 0. \tag{XIII A_3}$$

Endlich resultiert aus der Formel XIV (C) durch die Spezialisierung

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = F(x, y, t),$$

wo F bezüglich x, y und t ungerade sein muss, die Formel (B) desselben Artikels:

$$\sum_{m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3} F(\delta_3 - 2m_2, d_3 + 2m_2 - m_1, \delta_3 + m_1) = 0. \tag{XIV B}$$

Hiemit sind alle im 13., 14. und 15. Artikel angegebenen Beziehungen abgeleitet.

§ 4.

Die Hauptgleichung dieses Abschnittes enthält eine für alle verwendeten Argumente definierte Funktion

$$F(\lambda, \mu, \nu),$$

welche den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} F(\lambda, \mu, \nu) = -F(-\lambda, \mu, \nu) = -F(\lambda, -\mu, \nu) = -F(\lambda, \mu, -\nu \\ F(0, \mu, \nu) = F(\lambda, 0, \nu) = F(\lambda, \mu, 0) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

genügt. Sie bezieht sich ferner auf die Zerlegungen einer positiven, geraden oder ungeraden Zahl m nach der Gleichung

$$m = m'^2 + d'' \cdot \delta''. \quad (2)$$

m' ist irgend eine ganze Zahl; d'' und δ'' sind ausschliesslich positiv. Die über sämtliche Lösungen von (2) erstreckte Summe

$$S = \sum_{m = m'^2 + d''\delta''} F(d'' + m', \delta'' - 2m', 2d'' + 2m' - \delta'') \quad (3)$$

soll ausgewertet werden.

Nach (1) dürfen alle Argumente als von null verschieden vorausgesetzt werden. Sind aber x, y, z drei nicht verschwindende Zahlen, so tritt

$$F(x, y, z)$$

in (3) jedesmal dann auf, wenn die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} d'' + m' = x \\ \delta'' - 2m' = y \\ 2d'' + 2m' - \delta'' = z \\ m = m'^2 + d''\delta'' \end{array}\right\} \quad (4)$$

eine Lösung haben. Aus ihnen folgt

$$\left.\begin{array}{r} 2d'' = y + z \\ \delta'' = 2x - z \\ 2m' = 2x - y - z \\ 4m = 4x^2 + y^2 - z^2 \end{array}\right\} \quad (5)$$

und es entsprechen daher die Lösungen (4) eindeutig und umkehrbar denjenigen der Gleichung

$$4m = 4x^2 + y^2 - z^2, \quad (5')$$

für welche

$$\left.\begin{array}{r} y + z > 0 \\ 2x - z > 0 \end{array}\right\} \text{ ist.} \quad (\alpha)$$

Wenn (X, Y, Z) eine Lösung von (5′) ist, so ist auch $(\varepsilon_1 X, \varepsilon_2 Y, \varepsilon_3 Z)$ eine solche, sobald die ε den Wert ± 1 haben. Von diesen acht Lösungen erfüllen höchstens vier die Bedingungen (α), und wenn wir die Zahlen X, Y, Z als positiv voraus setzen, sind es die vier Lösungen

1) X, Y, Z; 2) $-X, Y, -Z$; 3) $X, -Y, Z$; 4) $X, Y, -Z$.

Die Bedingungen (α) werden der Reihe nach zu:

$$\left.\begin{array}{r} Y+Z>0 \\ 2X-Z>0 \end{array}\right\}_{+}(\alpha_1) \qquad \left.\begin{array}{r} Y-Z>0 \\ -2X+Z>0 \end{array}\right\}_{+}(\alpha_2) \qquad \left.\begin{array}{r} -Y+Z>0 \\ 2X-Z>0 \end{array}\right\}_{-}(\alpha_3)$$

$$\left.\begin{array}{r} Y-Z>0 \\ 2X+Z>0 \end{array}\right\}_{-}(\alpha_4)$$

und alle Lösungen $(\alpha_1) \ldots (\alpha_4)$ erzeugen in der Summe S den Term

$$\pm F(X, Y, Z).$$

Es ist leicht zu sehen, dass in den Fällen (α_1) und (α_2) das positive, in den Fällen (α_3) und (α_4) das negative Zeichen zu wählen ist.

Wenn die Systeme (α_3) resp. (α_2) erfüllt sind, sind es um so mehr die Ungleichungen (α_1) resp. (α_4); eine zwei solchen Systemen gleichzeitig angehörende Lösung erzeugt aber in S zwei sich zerstörende Glieder, und kann weggelassen werden. Die Bedingungen (α_1) bis (α_4) reduzieren sich daher auf die folgenden:

$$\left.\begin{array}{r} 2X-Z>0 \\ Y-Z\geqq 0 \end{array}\right\}_{+}(\alpha_1') \qquad \left.\begin{array}{r} Y-Z>0 \\ 2X-Z\geqq 0 \end{array}\right\}_{-}(\alpha_4').$$

Wenn kein Gleichheitszeichen auftritt, so sind aber auch diese zwei Bedingungssysteme gleichzeitig erfüllt oder nicht, und alle derartigen Lösungen von $(5')$ liefern an S den Beitrag null.

Wenn dagegen in (α_1')

$$Y = Z$$

ist, so geht $(5')$ über in

$$m = x^2 = X^2. \tag{5''}$$

Dieser Fall tritt nur ein, wenn m eine Quadratzahl, also $\omega(m) = 1$ ist. Die korrespondierenden Lösungen liefern wegen der Bedingung

$$2X - Z > 0$$

die Summe

$$S_1 = +\sum_{s=1}^{2\sqrt{m}-1} F\left(\sqrt{m}, s, s\right) \cdot \omega(m). \tag{6}$$

Ist endlich in (α_4')

$$2X = Z,$$

so wird die Gleichung $(5')$ zu:

$$4m = y^2 = Y^2 \tag{5'''}$$

und wegen der Einschränkung

$$Y - Z > 0$$

tritt nun die Summe

$$S_2 = -\omega(m) \sum_{t=1}^{\sqrt{m}-1} F(t, 2\sqrt{m}, 2t) \tag{7}$$

in S auf. Da hiemit alle von null verschiedenen Glieder von S aufgezählt sind, ergibt sich die Gleichung

$$S = S_1 + S_2$$

oder

$$\sum_{m = m'^2 + d''\delta''} F(d'' + m', \delta'' - 2m', 2d'' + 2m' - \delta'') =$$

$$= \omega(m) \left\{ \sum_{s=1}^{2\sqrt{m}-1} F(\sqrt{m}, s, s) - \sum_{t=1}^{\sqrt{m}-1} F(t, 2\sqrt{m}, 2t) \right\}. \tag{XII φ}$$

Dies ist die Formel (φ) des 12. Artikels.

Man erhält daraus eine weitere Beziehung, wenn man die Funktion

$$F(x, y, z)$$

gleich null definiert, sobald z eine gerade Zahl ist, d. h. wenn man aus beiden Seiten der Gleichung (φ) nur die Glieder mit ungeradem letztem Argument heraushebt. Dann hat δ'' für alle nicht verschwindenden Glieder nur ungerade Werte. Setzt man ferner statt d'' den Ausdruck $2^{\alpha''} d''$, indem man die höchste Potenz von 2 extrahiert, und unter dem neuen d'' nur ungerade Zahlen versteht, so tritt an Stelle der Gleichung (2) die neue Zerlegung

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \cdot \delta'' = m'^2 + m''$$

der Exponent α'' ist irgend eine nicht negative ganze Zahl. Die neue Formel, die sich auf die Lösungen dieser Gleichung bezieht, lautet dann:

$$\sum_{m = m'^2 + 2^{\alpha''} d''\delta''} \cdot F(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''+1} d'' + 2m' - \delta'') =$$

$$= \omega(m) \cdot \sum_{s=1,3,..}^{2\sqrt{m}-1} F(\sqrt{m}, s, s). \tag{XII ν}$$

Die Zahl s ist auf ungerade Werte beschränkt; die in (φ) auftretende zweite Summe rechter Hand verschwindet.

Dies ist die Gleichung (ν) des 12. Artikels. Weil hierin die beiden letzten Argumente der Funktion $F(x, y, z)$ ungerade Zahlen sind, so ist die Spezialisierung

$$F(x, y, z) = (-1)^{\frac{y-1}{2} + \frac{z+1}{2}} \cdot \Phi(x, z) = (-1)^{\frac{y+z}{2}} \Phi(x, z)$$

erlaubt, sobald $\Phi(x, z)$ für alle zur Anwendung kommenden Argumentwerte den Gleichungen

$$\Phi(x, y) = -\Phi(-x, y) = +\Phi(x, -y); \quad \Phi(0, y) = 0$$

genügt. Unter dieser Voraussetzung, und mit Beachtung der Kongruenz

$$\frac{1}{2}(y+z) = 2^{\alpha''} d'' \equiv m'' \pmod 2$$

geht dann die Formel (ν) über in die im 8. Artikel von Liouville notierte Gleichung (γ):

$$\sum_{m=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''} (-1)^{m''-1} \cdot \Phi(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m') = \\ = \omega(m) \cdot \sum_{s=1,3,..}^{2\sqrt{m}-1} \Phi(\sqrt{m}, s). \tag{VIII γ}$$

Reduziert man noch die Funktion $\Phi(x, y)$ auf eine ungerade Funktion $F(x)$ ihres ersten Arguments, so ergibt sich die Formel (β) des 7. Artikels in der Form:

$$\sum_{m=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''} (-1)^{m''-1} \cdot F(2^{\alpha''}d'' + m') = \omega(m) \cdot \sqrt{m} \cdot F(\sqrt{m}). \tag{VII β}$$

Wenn in der Formel (γ)

$$\Phi(x, y) = x \cdot f(x, y)$$

gesetzt wird, wo $f(x, y)$ wie gewöhnlich eine gerade Funktion beider Variablen bedeutet, so erhält man die Relation (δ) des 8. Artikels:

$$\sum_{m=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''} (-1)^{m''-1} \cdot (2^{\alpha''} \cdot d'' + m') f(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m') = \\ = \omega(m) \cdot \sum_{s=1,3,..}^{2\sqrt{m}-1} \sqrt{m} \cdot f(\sqrt{m}, s). \tag{VIII δ}$$

Endlich liefert noch der Ansatz

$$\Phi(x, y) = (-1)^{\frac{y-1}{2}} \cdot F(x, y)$$

in dem $F(x, y)$ eine bezügliche beider Argumente ungerade Funktion ist, aus der Formel (γ) die Gleichung (ε) desselben Artikels:

$$\sum_{m=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot F(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m') = \\ = \omega(m)(-1)^{m-1} \cdot \sum_{s=1,3,..}^{2\sqrt{m}-1} (-1)^{\frac{s-1}{2}} F(\sqrt{m}, s). \tag{VIII ε}$$

Hiebei ist noch von der Kongruenz

$$m'' - m' \equiv m \quad (2)$$

Gebrauch gemacht worden.

Alle angegebenen Formeln gestatten eine Reihe von mehr oder weniger interessanten Spezialisierungen.

Setzt man beispielsweise in (φ)

$$F(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

und bezeichnet man mit $\zeta_1(\varkappa)$ die Summe aller Teiler von $\varkappa$, so ergibt sich nach einigen Umformungen die ebenfalls von Liouville herrührende Formel[1])

$$m\,\zeta_1(m) + 2\sum_{s=1}^{\omega}(m - 5\,s^2)\,\zeta_1(m - s^2) = \omega(m) \cdot \frac{m\,(4\,m - 1)}{3}.$$

Die Summation ist über alle positiven ganzen Zahlen s auszudehnen, für welche das Argument von ζ_1 nicht null oder negativ wird.

§ 5.

In diesem Abschnitt treten zwei verschiedene Zerlegungsgleichungen auf. Die erste lautet

$$m = 2\,m'^2 + d'' \cdot \delta''. \tag{1}$$

m, d'' und δ'' sind positive ungerade Zahlen, m hat einen festen Wert. Die Zahl m' ist positiv, null oder negativ. Über alle Lösungen von (1) ist die Summe

$$2\,S_1 = 2\sum_{(1)}\mathfrak{F}(d'' + 2\,m',\ \delta'' - 2\,m',\ 2\,m' + d'' - \delta'') \tag{2}$$

zu erstrecken. Es bedeutet hier $\mathfrak{F}(\varkappa, \lambda, \mu)$ eine für alle auftretenden Argumentwerte definierte, und den Gleichungen

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = -\mathfrak{F}(-x, y, z) = \mathfrak{F}(x, -y, -z) \tag{3}$$

gehorchende Funktion.

Die zweite Zerlegungsgleichung hat die Gestalt

$$2\,m = m_1^2 + d_2 \cdot \delta_2 \tag{4}$$

d_2 und δ_2 sind positive Zahlen, und beide ungerade. m_1 ist ungerade, positiv oder negativ. Über alle Lösungen (4) ist die Summe

$$S_2 = \sum_{(4)}\mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}\right),\ m_1,\ \left(\frac{d_2 - \delta_2}{2}\right) \tag{5}$$

auszudehnen.

---

[1]) Journal de math. pures et app. 2e sér., T. VII, 1862. Extrait d'une lettre de M. Liouville à M. Besgue.

Dann gilt, wie hier bewiesen werden soll, die Relation

$$2\,S_1 = S_2 \tag{6}$$

in allen Fällen.

In der Summe (2) kann, da die 2 ersten Argumente von $\mathfrak{F}$ ungerade sind, höchstens das letzte verschwinden. Wir wollen jedoch diesen Fall vorläufig ausschliessen. Ist dann x resp. y eine ungerade, z irgend eine von null verschiedene Zahl, so tritt in (2) das Summenglied

$$\mathfrak{F}\,(x, y, 2\,z)$$

so oft auf, als die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} d'' + 2\,m' &= x \\ \delta'' - 2\,m' &= y \\ 2\,m' + d'' - \delta'' &= z \\ m &= 2\,m'^2 + d''\,\delta'' \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder die ihnen gleichwertigen:

$$\left.\begin{aligned} \delta'' &= x - 2\,z \\ d'' &= y + 2\,z \\ 2\,m' &= x - y - 2\,z \\ 2\,m &= x^2 + y^2 - 4\,z^2 \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Lösungen besitzen. Die Lösungen von (7) entsprechen also eindeutig umkehrbar den Lösungen der Gleichung

$$2\,m = x^2 + y^2 - 4\,z^2, \tag{8}$$

welche die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} x - 2\,z &> 0 \\ y + 2\,z &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

befriedigen.

Die letztern kann man in Gruppen von je acht so zusammenfassen, dass sich die Lösungen einer Gruppe nur durch die Vorzeichen der Grössen x, y, z unterscheiden. Sind X, Y und Z die absoluten Werte der Variablen, so können von den 8 Lösungen einer Gruppe höchstens die folgenden vier die Bedingungen (α) erfüllen:

1) X, Y, Z; 2) $X, Y, -Z$; 3) $X, -Y, Z$; 4) $-X, Y, Z$.

Jene nehmen dann der Reihe nach die Form an:

$$\left.\begin{aligned} X - 2\,Z &> 0 \\ Y + 2\,Z &> 0 \end{aligned}\right\} (\alpha_1) \quad \left.\begin{aligned} X + 2\,Z &> 0 \\ Y - 2\,Z &> 0 \end{aligned}\right\} (\alpha_2) \quad \left.\begin{aligned} X - 2\,Z &> 0 \\ -Y + 2\,Z &> 0 \end{aligned}\right\} (\alpha_3)$$

$$\left.\begin{aligned} -X + 2\,Z &> 0 \\ Y - 2\,Z &> 0 \end{aligned}\right\} (\alpha_4)$$

Durch die Gleichungen (7′) erhält man zu jeder solchen Lösung eine Zerlegung (1), und damit in $2\,S_2$ ein Glied

$$\pm\,\mathfrak{F}\,(X,\,Y,\,\pm\,2\,Z)$$

zugeordnet, und zwar erzeugt

$$\left.\begin{array}{llll} \text{eine Lösung } (\alpha_1) \text{ den Term} & & & \mathfrak{F}\,(X, Y, 2\,Z) \\ \text{,, ,, } (\alpha_2) \text{ ,, ,,} & & & \mathfrak{F}\,(X, Y, -2\,Z) \\ \text{,, ,, } (\alpha_3) \text{ ,, ,,} & \mathfrak{F}\,(X, -Y, 2\,Z) & = & \mathfrak{F}\,(X, Y, -2\,Z) \\ \text{,, ,, } (\alpha_4) \text{ ,, ,,} & \mathfrak{F}\,(-X, Y, -2\,Z) & = & -\mathfrak{F}\,(X, Y, -2\,Z) \end{array}\right\} \quad (9)$$

Aber mit den Bedingungen (α_4) sind gleichzeitig auch die Forderungen (α_2) befriedigt; eine (α_4) erfüllende Lösung erzeugt also nach (9) denselben Term in S_2 zweimal, aber mit verschiedenen Vorzeichen, und kann daher weggelassen werden. Die Bedingungen (α_2) und (α_4) dürfen also ersetzt werden durch die engern:

$$\left.\begin{array}{l} X + 2\,Z > 0 \\ Y - 2\,Z > 0 \\ X - 2\,Z > 0 \end{array}\right\} \ (\alpha_2').$$

Die erste davon ist von selbst erfüllt. In der letzten ist die linke Seite ungerade, ein Gleichheitszeichen also unmöglich. Eine Lösung (α_2') erzeugt das Glied

$$\mathfrak{F}\,(X,\,Y,\,-\,2\,Z).$$

Da die Bedingungen (α_2') und (α_3) in die eine Ungleichung

$$X - 2\,Z > 0$$

zusammengefasst werden können, und diese wieder mit (α_1) identisch ist, so ergibt sich endlich

$$2\,S_1' = 2\sum{}' \{\mathfrak{F}\,(X,\,Y,\,2\,Z) + \mathfrak{F}\,(X,\,Y,\,-\,2\,Z)\}, \tag{10}$$

wo die Summe über alle Lösungen von

$$2\,m = X^2 + Y^2 - 4\,Z^2 \tag{10′}$$

mit der Bedingung

$$X - 2\,Z > 0 \tag{10″}$$

auszudehnen ist, und wo der Akzent andeuten soll, dass die Glieder mit verschwindendem 3. Argument unterdrückt worden sind.

Nun diskutieren wir in gleicher Weise die Summe S_2.

Aus (4) folgt, dass

$$d_2 \equiv \delta_2 \pmod 4,$$

dass also $\frac{d_2 + \delta_2}{2} = x$ eine ungerade Zahl ist. Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} d_2 + \delta_2 &= 2\,x \\ m_1 &= y \\ d_2 - \delta_2 &= 4\,z \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

also

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= y \\ d_2 &= x + 2\,z \\ \delta_2 &= x - 2\,z \end{aligned}\right\}, \tag{11'}$$

so ist x wie y eine ungerade Zahl, und z ist sicher ganz. Wir wollen einstweilen aber auch annehmen, z sei nicht null. Die Gleichung (4) wird nun zu

$$2\,m = x^2 + y^2 - 4\,z^2, \tag{8}$$

d. h. geht in die Gleichung (8) über; umgekehrt entspricht jeder Lösung von (8), für die

$$x \pm 2\,z > 0 \tag{12}$$

eine Lösung von (4), die durch die Gleichungen (11′) berechnet werden kann. Von den 8 Lösungen einer Gruppe der oben diskutierten Gleichung (8) können 4 die Bedingungen (12) nie erfüllen.

Für die 4 übrigen, nämlich

1) X, Y, Z; 2) $X, Y, -Z$; 3) $X, -Y, Z$; 4) $X, -Y, -Z$

wird (12) in allen Fällen zu

$$X - 2\,Z > 0. \tag{12'}$$

Einer Lösung 1) ... 4) entspricht wegen (11′) je eine Zerlegung (4) und damit ein Glied in S_2 eindeutig, und zwar entsteht

für eine Lösung	1)	der Term	$\mathfrak{F}(X, Y, 2\,Z)$
„ „ „	2)	„ „	$\mathfrak{F}(X, Y, -2\,Z)$
„ „ „	3)	„ „	$\mathfrak{F}(X, Y, -2\,Z)$
„ „ „	4)	„ „	$\mathfrak{F}(X, Y, 2\,Z)$

Daher wird, wenn wieder die Glieder mit verschwindendem letzten Argument unterdrückt werden, die Summe S_2 zu:

$$S_2' = 2 \sum{}' \{\mathfrak{F}(X, Y, 2\,Z) + \mathfrak{F}(X, Y, -2\,Z)\},$$

wobei über alle Lösungen von (10′) mit der Bedingung (10″) zu summieren ist.

Vergleicht man mit dem unter (10) erhaltenen Resultat, so folgt

$$2\,S_1' = S_2' \tag{13}$$

und es bleibt nur noch der Nachweis zu leisten, dass auch die Glieder mit verschwindendem letztem Argument in beiden Summen $2\,S_1$ resp. S_2 übereinstimmen.

Für sie verwandelt sich die Gleichung (8) in die Gleichung

$$2\,m = X^2 + Y^2 \tag{8'}$$

und die Summe $2\,S_1''$ aller in $2\,S$ enthaltenen solcher Glieder wird

$$2\,S_1'' = \sum \mathfrak{F}(X, Y, 0), \tag{14}$$

wo über sämtliche Lösungen von (8′) zu summieren ist.

Die in S_2 enthaltenen Glieder mit dem letzten Argument 0 bilden die über alle Lösungen der Gleichung

$$2\,m = X^2 + y^2 \tag{8''}$$

auszudehnenden Summe

$$S_2'' = \sum \mathfrak{F}(X, y, 0),$$

welche wegen $y = \pm Y \neq 0$

und wegen $\mathfrak{F}(X, -Y, 0) = \mathfrak{F}(X, Y, 0)$

offenbar mit der Summe (14) genau übereinstimmt.

Daher gilt die Gleichung

$$2\,(S_1' + S_1'') = 2\,S_1 = S_2' + S_2'' = S_2$$

oder:

$$2 \sum_{m = 2m'^2 + d''\delta''} \mathfrak{F}(d'' + 2\,m', \delta'' - 2\,m', 2\,m' + d'' - \delta'') =$$

$$= \sum_{2m = m_1^2 + d_2\delta_2} \mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, m_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right), \tag{A}$$

welche auch von Liouville herrührt [1]).

Beschränkt man m_1 auf positive Werte, und beachtet man, dass

$$\sum_{(4)} \mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, -m_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right) = \sum_{(4)} \mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, m_1, \frac{-d_2 + \delta_2}{2}\right) =$$

$$= \sum_{(4)} \mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, m_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right),$$

so ergibt sich die neue Form von (A):

$$\sum_{m = 2m'^2 + d''\delta''} \mathfrak{F}(d'' + 2\,m', \delta'' - 2\,m', 2\,m' + d'' - \delta'') =$$

$$= \sum_{\substack{2m = m_1^2 + d_2\delta_2 \\ m_1 > 0}} \mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, m_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right). \tag{A_1}$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 53, 1861 (2). Brief an Hermite, oder auch Journal de math. p. et a., 2e sér., T. 7, 1862, pg. 42.

Wenn man in Übereinstimmung mit den Bedingungen (3) die Funktion $F(x, y, 2z)$, die bezüglich aller Argumente ungerade ist, an Stelle der allgemeinern Funktion $\mathfrak{F}(x, y, 2z)$ in (A) einführt, so heben sich auf der rechten Seite die Glieder weg, welche zu entgegengesetzt gleichen Werten von m_1 gehören. Da m_1 nie null ist, verschwindet somit die Summe rechter Hand, und es ergibt sich die Formel (χ) des 12. Artikels der «formules générales»:

$$\sum_{m = 2m'^2 + d''\cdot\delta''} F(d'' + 2m', \delta'' - 2m', 2m' + d'' - \delta'') = 0. \qquad (\text{XII } \chi)$$

Bedeutet $f(u, v)$ eine gerade Funktion beider Veränderlichen u und v, so ist auch der Ansatz

$$\mathfrak{F}(x, y, 2z) = (-1)^{\frac{x-1}{2} + z} f(y, 2x)$$

mit den Bedingungen (3) verträglich. Führt man ihn in (A) ein, und beachtet man, dass

$$d_2 \equiv \delta_2 \pmod 4,$$

so ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{m = 2m'^2 + d''\delta''} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot f(\delta'' - 2m', 2d'' + 4m') = \\ = \sum_{2m = m_1^2 + d_2\cdot\delta_2} (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} \cdot f(m_1, d_2 + \delta_2). \end{aligned} \qquad (\text{XI } \pi)$$

Dies ist die Formel (π) des Artikels 11, die sich auch leicht direkt beweisen lässt.

Reduziert man $f(u, v)$ auf das 1. Argument u, so erhält man

$$\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta'' - 2m') = \sum (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} \cdot f(m_1)$$

oder mit Anwendung der schon früher gebrauchten Bezeichnung

$$\varrho(m_2) = \sum_{m_2 = d_2\delta_2} (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}}$$

$$\sum_{m = 2m'^2 + d''\delta''} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta'' - 2m') = \sum_{2m = m_1^2 + m_2} f(m_1) \cdot \varrho(m_2). \qquad (\text{XI } \xi)$$

Diese Formel erscheint unter (ξ) im 11. Artikel. $4\varrho(m_2)$ bedeutet aber die Anzahl der Darstellungen von m_2 durch die Form

$$u^2 + v^2,$$

und da von den Zahlen u und v die eine gerade, die andere ungerade ist, so kann man die Summe

$$\sum f(m_1)\,\varrho(m_2)$$

auch in die Gestalt

$$\sum f(i)$$

bringen, wenn man über alle Lösungen der Gleichung

$$2\,m = i^2 + i_1^2 + p^2$$

summiert, wobei i und i_1 positive ungerade Werte haben, p irgend eine gerade Zahl ist.

An Stelle der Formel (ξ) kann daher auch die gleichwertige Formel (o) des 11. Artikels treten:

$$\sum_{m = 2\,m'^2 + d''\delta''} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot f(\delta'' - 2\,m') = \sum_{2\,m = i^2 + i'^2 + p^2} f(i). \tag{XI o}$$

Wenn man den mit den Bedingungen (3) verträglichen Ansatz macht:

$$\mathfrak{F}(x, y, 2\,z) = F(x),$$

worin $F(x)$ wie gewöhnlich eine ungerade Funktion ist, so ergibt die Formel (A_1) die neue Gleichung:

$$\sum_{m = 2\,m'^2 + d''\delta''} F(d'' + 2\,m') = \sum_{\substack{2\,m = m_1^2 + d_2\delta_2 \\ m_1 > 0}} F\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}\right) \tag{A_2}$$

welche auch direkt bewiesen worden ist.[1])

Bezeichnet man mit $F(x)$ diejenige ungerade Funktion, die für positive Argumente den Wert $+1$, für negative den Wert (-1) besitzt; ferner mit

$$L_1\,(d'' + 2\,m' > 0) \quad \text{resp.} \quad L_1\,(d'' + 2\,m' < 0)$$

die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$m = 2\,m'^2 + d''\,\delta'',$$

für welche $\quad d'' + 2\,m' > 0 \quad$ resp. $\quad d'' + 2\,m' < 0$

ist, und endlich mit L_2 die Gesamtanzahl der Lösungen von

$$2\,m = m_1^2 + d_2\,\delta_2 \quad (m_1 > 0),$$

so ergibt sich aus (A_2) die Relation:

---

[1]) H. J. S. Smith. Collected papers. Report on the theory of numbers. Art. 136, p. 348.

$$L_1\,(d''+2\,m'>0)-L_1\,(d''+2\,m'<0)=L_2 \qquad (A_3)$$

welche beim arithmetischen Beweis einer Klassenzahlrelation eine Rolle spielt[1]).

§ 6.

Es sei m eine positive ganze Zahl, die die Kongruenz

$$m\equiv 3 \pmod 4 \qquad (1)$$

erfüllt. Sie soll nach den Gleichungen

$$m=m_1^2+2\,d_2\cdot\delta_2 \qquad (2)$$

$$m=4\,m'^2+d''\,\delta'' \qquad (3)$$

zerlegt werden. d_2, δ_2, d'' und δ'' sind positive ungerade Zahlen; m_1 ist auch ungerade, aber positiv oder negativ; m' ist irgend eine ganze Zahl, die Null eingeschlossen. Ferner sei in (3) immer

$$d''<\delta''. \qquad (4)$$

Die Funktion $\mathfrak{F}\,(x, y, z)$ sei für alle auftretenden Werte ihrer Argumente definiert, und genüge den Gleichungen:

$$\mathfrak{F}\,(x,y,z)=\mathfrak{F}\,(-x,y,z)=\mathfrak{F}\,(x,-y,z)=-\mathfrak{F}\,(x,y,-z). \qquad (5)$$

Man bilde die über alle Lösungen von (2) auszudehnende Summe

$$S_1=\sum_{(1)}\mathfrak{F}\,(d_2-m_1,\,\delta_2+m_1-d_2,\,m_1) \qquad (6)$$

und die über die Gleichung (3) zu erstreckenden Ausdrücke

$$S_2=\sum_{(3)}\mathfrak{F}\left(-2\,m',\,\frac{\delta''-d''}{2},\,d''+2\,m'\right) \qquad (7)$$

$$S_3=\sum_{(3)}\mathfrak{F}\left(\frac{d''+\delta''}{2},\,\frac{-\delta''+d''}{2},\,-d''-2\,m'\right). \qquad (7')$$

Es soll gezeigt werden, dass unter den erwähnten Voraussetzungen die Gleichung gilt:

$$S_1=S_2+S_3 \qquad (B)$$

Aus (3) folgt wegen (1) zunächst, dass

$$d''+\delta''\equiv 0 \quad (4)$$

[1]) Vergl. Journal de math., sér. 2, T. 7, 1862, p. 46 und § 10 dieser Arbeit.

und die Ausdrücke (6), (7) und (7') zeigen dann, dass das zweite und dritte Argument von

$$\mathfrak{F}(x, y, z)$$

in allen Gliedern ungerade, das erste dagegen immer gerade ist. Es tritt also $\mathfrak{F}$ nur in der Form

$$\mathfrak{F}(2x, y, z)$$

auf, und es ist

$$y \equiv z \equiv 1 \pmod 2.$$

In der Summe S_1 geschieht dies immer, wenn

$$\left.\begin{aligned} d_2 - m_1 &= 2x \\ \delta_2 + m_1 - d_2 &= y \\ m_1 &= z \\ m = m_1^2 + 2\, d_2\, \delta_2 & \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen ergeben

$$\left.\begin{aligned} \delta_2 &= y + 2x \\ d_2 &= z + 2x \\ m_1 &= z \\ m &= 8x^2 + 4xy + 4xz + 2yz + z^2 \end{aligned}\right\}. \tag{8'}$$

Umgekehrt entspricht jeder Lösung der Gleichung

$$m = 8x^2 + 4xy + 4xz + 2yz + z^2 \tag{9}$$

eine Zerlegung (2), wenn sie den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} A &= 2x + y > 0 \\ B &= 2x + z > 0 \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

genügt.

In der Summe S_2 tritt das Glied $\mathfrak{F}(2x, y, z)$ immer dann auf, wenn die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -2m' &= 2x \\ \delta'' - d'' &= 2y \\ d'' + 2m' &= z \\ m = 4m'^2 + d''\delta'' & \end{aligned}\right\}$$

bestehen; diese aber ergeben

$$\left.\begin{aligned} d'' &= 2x + z \\ \delta'' &= 2x + 2y + z \\ m' &= -x \\ m &= 8x^2 + 4xy + 4xz + 2yz + z^2 \end{aligned}\right\}.$$

Sie entsprechen mithin eindeutig umkehrbar denjenigen Lösungen von (9), welche die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} B = 2x + z > 0 \\ C = y \qquad > 0 \end{array}\right\} (\beta)$$

befriedigen.

In S_3 endlich tritt $\mathfrak{F}(2x, y, z)$ immer dann auf, wenn die Relationen

$$\left.\begin{array}{r} d'' + \delta'' = 4x \\ -\delta'' + d'' = 2y \\ -d'' - 2m' = z \\ m = 4m'^2 + d''\delta'' \end{array}\right\}$$

erfüllt werden. Aus ihnen folgt

$$\left.\begin{array}{r} d'' = 2x + y \\ \delta'' = 2x - y \\ 2m' = -2x - y - z \\ m = 8x^2 + 4xy + 4xz + 2yz + z^2 \end{array}\right\}$$

und sie entsprechen somit ein-eindeutig denjenigen Lösungen der Gleichung (9), für welche

$$\left.\begin{array}{l} A = 2x + y > 0 \\ C = y \qquad < 0 \end{array}\right\} (\gamma)$$

ist. Jeder Lösung (α), (β) oder (γ) der Gleichung (9) entspricht ein Glied

$$+ \mathfrak{F}(2x, y, z)$$

in den resp. Summen S_1, S_2 oder S_3.

Die Grössen A, B und C sind ungerade. Die Bedingungen (α) können daher zerlegt werden in die zwei folgenden, nie gleichzeitig erfüllten Systeme

$$A > 0,\ B > 0,\ C > 0 \} \ (\alpha_1) \qquad A > 0,\ B > 0,\ C < 0 \} \ (\alpha_2).$$

Analog zerlegt man die Forderungen (β) resp. (γ) in die folgenden:

$$A > 0,\ B > 0,\ C > 0 \} \ (\beta_1) \qquad A < 0,\ B > 0,\ C > 0 \} \ (\beta_2)$$

resp.

$$A > 0,\ B > 0,\ C < 0 \} \ (\gamma_1) \qquad A > 0,\ B < 0,\ C < 0 \} \ (\gamma_2).$$

Da die Systeme (β_1) und (α_1), sowie die Systeme (α_2) und (γ_1) identisch sind, so erzeugen sie in der Gleichung

$$S_1 = S_2 + S_3 \tag{B}$$

auf beiden Seiten dieselbe Anzahl gleicher Glieder. Unterdrückt man sie, so ändert sich die Richtigkeit oder Unrichtigkeit von (B) also nicht, und es genügt daher, die dermassen reduzierte Gleichung zu beweisen, d. h. nachzuweisen, dass die in

$$S_2 + S_3$$

zurückbleibenden Glieder eine Summe null ergeben. Dies ist aber sehr einfach. Ist nämlich (x, y, z) eine Lösung von (9), welche einem der Bedingungssysteme

$$(\beta_2), \quad (\gamma_2)$$

genügt, so erfüllt die ihr eindeutig umkehrbar zugeordnete und von ihr immer verschiedene zweite Lösung der Gleichung (9):

$$-x, -y, -z$$

das andere Bedingungssystem, wie die Relationen

$$A = 2x + y; \quad B = 2x + z; \quad C = y;$$

sofort erkennen lassen. Die erste Lösung erzeugt aber in

$$S_2 + S_3$$

das Glied $$\mathfrak{F}(2x, y, z),$$

die zweite dagegen den Ausdruck

$$\mathfrak{F}(-2x, -y, -z) = -\mathfrak{F}(2x, y, z)$$

und es zerstören sich sonach alle übrig bleibenden Glieder in

$$S_2 + S_3.$$

Die Relation (B) ist damit bewiesen.

Mit Hülfe der Gleichungen (5) erhält sie die Gestalt:

$$\sum_{m = m_1^2 + 2d_2\delta_2}' \mathfrak{F}(d_2 - m_1, \delta_2 + m_1 - d_2, m_1) =$$
$$= \sum_{m = 4m'^2 + d''\delta''} \mathfrak{F}\left(2m', \frac{\delta'' - d''}{2}, d'' + 2m'\right) - \sum_{m = 4m'^2 + d''\delta''} \mathfrak{F}\left(\frac{\delta'' + d''}{2}, \frac{\delta'' - d''}{2}, d'' + 2m'\right), \tag{B}$$

in welcher sie von Liouville publiziert worden ist [1]).

Wir spezialisieren hier:

$$\mathfrak{F}(2x, y, z) = (-1)^{x + \frac{z-1}{2}}.$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 53, 1861 (2), oder Journal de math., p. e. a., T. 7 (1862), pg. 43.

Bezeichnen wir wie früher mit $\varrho\,(m)$ die Summe:

$$\varrho\,(m) = \sum_{d\cdot\delta=m} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

und ferner dieselbe Summe mit $\varrho'\,(m)$, wenn sie nur über diejenigen Teiler von m erstreckt wird, die kleiner sind als ihre konjugierten, so ergibt sich aus (B) unter der Annahme

$$m \equiv 3 \pmod 8$$

nach einigen leichten Umformungen die Gleichung:

$$\sum_{i=1,3,\ldots}^{i^2<m} \varrho\left(\frac{m-i^2}{2}\right) = \varrho'\,(m) + 2\sum_{\varkappa=1,2,\ldots}^{4\varkappa^2<m} \varrho'\,(m-4\,\varkappa^2). \tag{B$_1$}$$

Die Summation ist links über alle positiven ungeraden Zahlen i, rechts über alle positiven Zahlen $\varkappa$ auszuführen, für welche die Argumente nicht null oder negativ werden. Aus dem Ausdruck der linken Seite liest man leicht ab, dass der gemeinsame Wert der beiden Gleichungsseiten der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$m = x^2 + y^2 + z^2$$

in positiven ungeraden Zahlen gleichkommt. Diese Formel ist von Liouville der Formel (B) beigefügt worden.

§ 7.

Die positive ungerade Zahl m werde nach den Gleichungen

$$m = \alpha^2 + 3\,\beta^2 \tag{1}$$
$$4\,m = i^2 + 3\,i_1^2 \tag{2}$$

zerlegt. i und i_1 bedeuten positiv ungerade, α und β irgend welche ganze Zahlen. Die Funktion $f\,(x, y)$ sei bezüglich beider Argumente gerade. Über die Lösungen der Gleichung (1) resp. (2) erstrecke man die Summe

$$S_1 = \sum f\,(\alpha + 3\,\beta,\ \alpha - \beta) \tag{3}$$

resp. die Summe

$$S_2 = 2\sum f\,(i, i_1); \tag{4}$$

dann gilt immer die Relation

$$S_1 = S_2. \tag{5}$$

Da m ungerade ist, so ist von den Zahlen α, β eine gerade, die andere ungerade. In S_1 treten also nur ungerade, insbesondere von null verschiedene Argumente auf. Bedeuten x und y ungerade Zahlen, so tritt $f(x, y)$ jedesmal dann in S_1 auf, wenn die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= x \\ \alpha - \beta &= y \\ m &= \alpha^2 + 3\beta^2 \end{aligned}\right\}$$

erfüllt sind. Hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{x + 3y}{4} \\ \beta &= \frac{x - y}{4} \\ 4m &= x^2 + 3y^2 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Umgekehrt entspricht jeder Lösung der Gleichung

$$4m = x^2 + 3y^2 \tag{6'}$$

eindeutig eine solche von (1), sobald

$$x - y \equiv 0, \quad (\text{mod. } 4) \tag{7}$$

und damit in S_1 der Term $f(x, y)$.

Die Lösungen von (6′) zerfallen in Gruppen von vieren. Ist x, y irgend eine Lösung, so sind die vier Lösungen ihrer Gruppe durch

$$\pm x, \ \pm y$$

gegeben. Die absoluten Werte von x und y seien i und i_1. Die Kongruenz (7) ist immer von zweien, und nur von zwei Lösungen einer Gruppe erfüllt, und diesen korrespondiert in S_1 der Term

$$f(x, y) = f(i, i_1)$$

zweimal genommen. Die Summe S_1 wird also zu

$$S_1 = \sum 2 \cdot f(i, i_1),$$

wobei über alle Lösungen von (6′) in positiven ungeraden Zahlen zu summieren ist. Dies ist aber genau die Summe S_2. Es gilt also die Relation

$$S_1 = S_2$$

oder

$$\sum_{m = \alpha^2 + 3\beta^2} f(\alpha + 3\beta, \alpha - \beta) = 2 \sum_{4m = i^2 + 3 i_1^2} f(i, i_1),$$

welche ebenfalls von Liouville herrührt [1]).

[1]) Journal de math., T. 18, sér. 2 (1873).

§ 8.

Es bedeute in diesem Paragraphen m eine positive, feste Zahl, die der Kongruenz

$$m \equiv 1 \quad (4) \tag{1}$$

genügt. Man zerlege sie nach der Gleichung

$$m = 4\,m'^2 + d''\,\delta'', \tag{2}$$

wobei m' eine beliebige ganze Zahl bedeutet, d'' und δ'' aber positiv und ungerade sein sollen.

Unter $\varphi(u)$ soll ferner eine für alle auftretenden (immer ganzzahligen) Argumentwerte definierte, im übrigen ganz willkürliche Funktion verstanden werden.

Die Summe

$$S = \sum_{(2)} (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} \cdot \varphi\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) \tag{3}$$

ist über sämtliche Lösungen der Gleichung (2) zu erstrecken.

Es soll nun bewiesen werden, dass

$$S = \omega(m) \cdot (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}} \cdot \sqrt{m} \cdot \varphi(0) \tag{4}$$

ist, wenn wie früher $\omega(m) = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem m eine Quadratzahl ist, oder nicht.

Wir erhalten zunächst für die Summen S_0 derjenigen Glieder in (3), für welche das Argument von φ den Wert null hat, den Ausdruck:

$$S_0 = \sum{}' (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} \cdot \varphi(0),$$

wobei die Summation auszudehnen ist über die gleichzeitig die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m &= 4\,m'^2 + d'' \cdot \delta'' \\ m' &+ \frac{d''-\delta''}{4} = 0 \end{aligned}\right\}$$

befriedigenden Wertekombinationen

$$m',\ d'',\ \delta''.$$

Eliminiert man m' aus denselben, so ergibt sich

$$m = \left(\frac{d''+\delta''}{2}\right)^2 \tag{5}$$

woraus hervorgeht, dass $S_0 = 0$, wenn $\omega(m) = 0$. Wenn dagegen $\omega(m) = 1$ ist, so wird

$$S_0 = \varphi(0) \cdot \sum (-1)^{\frac{\delta'' - d''}{4} + \frac{\delta'' - 1}{2}} = \varphi(0) \cdot \sum (-1)^{\frac{d'' + \delta'' - 2}{4}}$$

oder wegen (5)

$$S_0 = \varphi(0) \cdot \sum (-1)^{\frac{\sqrt{m} - 1}{2}} = \varphi(0) \cdot (-1)^{\frac{\sqrt{m} - 1}{2}} \cdot Z,$$

wo Z die Anzahl der Zerlegungen (5) bedeutet. Da d'' der Reihe nach alle ungeraden Zahlen von 1 bis $(2\sqrt{m} - 1)$ durchlaufen kann, und δ'' dieselben $\sqrt{m}$ Zahlen in umgekehrter Reihenfolge durchläuft, so ist $Z = \sqrt{m}$. Daher gilt allgemein die Gleichung

$$S_0 = \omega(m) \cdot (-1)^{\frac{\sqrt{m} - 1}{2}} \cdot \sqrt{m} \cdot \varphi(0) \tag{4'}$$

und der Vergleich mit (4) lehrt, dass man um jene Formel zu beweisen, nur noch zu zeigen hat, dass sich in S alle Glieder mit von null verschiedenem Argument wegheben.

Fasst man alle Glieder, in denen das Argument von φ gleich $\varkappa$ ist, zusammen in den Ausdruck

$$\varphi(\varkappa) \cdot S_\varkappa,$$

so ist somit zu zeigen, dass

$$S_\varkappa = 0, \tag{6}$$

sobald $\varkappa$ nicht verschwindet.

Zunächst weisen wir nach, dass die Zahl $\varkappa$ auf positive Werte beschränkt werden darf.

Es sei (m', d'', δ'') irgend eine Lösung der Gleichung (2), für die

$$\varkappa = m' + \frac{d'' - \delta''}{4} \neq 0.$$

Wegen (1) ist $\qquad d'' \equiv \delta'' \quad (4) \qquad (7)$

und dieser Ausdruck daher immer ganzzahlig.

Ferner ist $(-m', \delta'', d'')$ eine der vorigen eindeutig unkehrbar zugeordnete Lösung von (2), und zwar ist sie von jener verschieden, weil aus der Gleichheit der Lösungen $\varkappa = 0$ folgen würde, was unserer Voraussetzung widerstreitet.

Die Lösung (m', d'', δ'') erzeugt in S aber das Glied

$$(-1)^{m' + \frac{\delta'' - 1}{2}} \varphi(\varkappa),$$

die Lösung $(-m', \delta'', d'')$ wegen (7) aber das Glied

$$(-1)^{-m' + \frac{d'' - 1}{2}} \cdot \varphi(-\varkappa) = (-1)^{m' + \frac{\delta'' - 1}{2}} \cdot \varphi(-\varkappa),$$

woraus folgt, dass $\qquad S_\varkappa = S_{-\varkappa}$

ist. Wenn also $S_\varkappa$ null ist, verschwindet auch $S_{-\varkappa}$, und wir dürfen daher $\varkappa$ als positive ganze Zahl voraussetzen.

Nach Definition ist

$$S_\varkappa = \sum (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} \tag{8}$$

wo die Summe über die gemeinsamen Lösungen von

$$\left.\begin{aligned} m &= 4\,m'^2 + d''\cdot\delta'' \\ m' &+ \frac{d''-\delta''}{4} = \varkappa \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

auszudehnen ist. Durch Elimination von m' wird

$$m = 4\,\varkappa^2 - 2\,\varkappa\,(d''-\delta'') + \left(\frac{d''+\delta''}{2}\right)^2 \tag{9'}$$

und $S_\varkappa$ wird zu

$$S_\varkappa = \sum_{(9')} (-1)^{\varkappa + \frac{\delta''-d''}{4} + \frac{\delta''-1}{2}}. \tag{8'}$$

Nun substituieren wir:

$$\left.\begin{aligned} d'' + \delta'' &= 2\,u \\ d'' - \delta'' &= 2\,g \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Es wird dann

$$\left.\begin{aligned} d'' &= u + g \\ \delta'' &= u - g \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

und die den Grössen d'', δ'' auferlegten Bedingungen werden zu

$$\left.\begin{aligned} &u > g;\ u > -g \\ &u \equiv 1 \pmod 2;\ g \equiv 0\,(2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

die Gleichung (9′) geht über in

$$m = 4\,\varkappa^2 - 4\,\varkappa\cdot g + u^2 \tag{12}$$

und es wird $S_\varkappa$ gleich der über alle Lösungen von (12) mit den Bedingungen (11) zu erstreckenden Summe

$$S_\varkappa = (-1)^\varkappa \cdot \sum (-1)^{\frac{u-1}{2}}. \tag{13}$$

Nun sei (u, g) eine den Forderungen (11) genügende Lösung der Gleichung (12). Wir machen den Ansatz

$$u' = -u + 4\,\varkappa\cdot a, \tag{14}$$

wo a eine ganze Zahl bedeutet. Soll (u', g') eine Lösung der Gleichung (12) sein, so bestimmt sich g' aus der Gleichung

$$m = 4\,\varkappa^2 - 4\,\varkappa\cdot g' + u^2 - 8\,\varkappa\,u\,a + 16\,\varkappa^2\,a^2,$$

oder wegen (12) aus

$$0 = 4\,\varkappa\cdot(g - g') - 8\,\varkappa\,u\,a + 16\,\varkappa^2 a^2. \tag{14'}$$

Da $\varkappa \neq 0$, ergibt sich hieraus

$$g' = g - 2u \cdot a + 4\varkappa a^2. \tag{14'}$$

Man erhält somit vermittelst (14) und (14') zu der Lösung (u, g) von (12) nach Fixierung der Zahl a die Lösung (u', g'), und es berechnen sich u und g rückwärts aus (u', g') nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} u &= -u' + 4\varkappa a \\ g &= -g' - 2u \cdot a + 4\varkappa \cdot a^2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

woraus hervorgeht, dass die Beziehung der beiden Lösungen aufeinander eindeutig umkehrbar ist.

Ferner ist wegen (14)

$$(-1)^{\frac{u-1}{2}} = -(-1)^{\frac{u'-1}{2}}.$$

Wenn daher die Lösung (u', g') die Bedingungen (11) erfüllt, so zerstören sich die in (13) auftretenden Glieder, welche den Lösungen (u, g) resp. $(u' g')$ entsprechen.

Nun zeigen wir, dass über den bis jetzt willkürlichen ganzzahligen Parameter a in eindeutiger Weise so verfügt werden kann, dass die Lösung (u', g') die Forderungen (11) befriedigt. Dann zerstören sich nach vorigem sämtliche Glieder in (13) paarweise, es ist $S_\varkappa = 0$, und der Beweis unserer Formel erledigt.

Da a eine ganze Zahl bedeutet, so sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} u' &\equiv 1 \pmod 2 \\ g' &\equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

in (11) immer erfüllt. Die zwei übrigen Ungleichungen werden zu folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a) &= -u + 4\varkappa \cdot a - g - 4\varkappa a^2 + 2au > 0 \\ \psi(a) &= -u + 4\varkappa \cdot a + g + 4\varkappa a^2 - 2au > 0 \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Betrachtet man in diesen Ausdrücken a als Variable, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(a) = 0$$

gleich den Ausdrücken

$$\omega_1 = \frac{u + 2\varkappa + \sqrt{m}}{4\varkappa}; \quad \omega_2 = \frac{u + 2\varkappa - \sqrt{m}}{4\varkappa}; \tag{17}$$

wobei wir unter $\sqrt{m}$ immer den positiven Wert der Wurzel verstehen wollen.

Unter derselben Voraussetzung ergeben sich die Wurzeln Ω_1 und Ω_2 von

$$\psi(a) = 0$$

zu:

$$\Omega_1 = \frac{u - 2\varkappa + \sqrt{m}}{4\varkappa}; \quad \Omega_2 = \frac{u - 2\varkappa - \sqrt{m}}{4\varkappa}. \tag{18}$$

Ferner ergeben sich noch die Gleichungen

$$\omega_1 = \Omega_1 + 1; \qquad \omega_2 = \Omega_2 + 1, \tag{19}$$

sowie die Ungleichungen

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\sqrt{m}}{2\varkappa} > 0; \qquad \Omega_1 - \Omega_2 = \frac{\sqrt{m}}{2\varkappa} > 0. \tag{19'}$$

Die Funktion $\varphi(u)$ ist im Innern des Intervalles $(\omega_2, \ldots \omega_1)$ positiv, und nur dort; ebenso ist $\psi(u)$ grösser als null nur ausserhalb des Intervalles $(\Omega_2 \ldots \Omega_1)$, dort aber immer.

Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle, die eine gesonderte Behandlung erfordern.

1. Fall. Es sei $\qquad \sqrt{m} > 2\varkappa.$

Dann ergibt sich aus (17) und (18):

$$\omega_1 > \Omega_1 > \omega_2 > \Omega_2.$$

$\varphi(u)$ und $(\psi)(u)$ sind dann gleichzeitig positiv im Innern des Intervalles

$$(\Omega_1 \ldots \omega_1)$$

und nur dort. Nach (19) ist die Länge desselben gleich der Einheit, und es gibt daher eine eindeutig bestimmte ganze Zahl a, für die gleichzeitig

$$\varphi(a) > 0 \qquad \psi(a) > 0$$

wird, wie (16) es verlangt, vorausgesetzt, dass die Grenzen Ω_1 und ω_1 keine ganzen Zahlen seien. Dass dies nie der Fall ist, können wir leicht nachweisen.

Nehmen wir zu diesem Ende an, Ω_1 sei gleich der ganzen Zahl z. Nach (18) ist dann

$$z = \frac{u - 2\varkappa + \sqrt{m}}{4\varkappa},$$

woraus hervorgeht, dass in diesem Fall m das Quadrat einer (ungeraden) ganzen Zahl μ sein muss. Dann aber wird

$$\frac{u + \mu}{2\varkappa} = 2z + 1.$$

Aus $\qquad m = \mu^2 = 4\varkappa^2 - 4\varkappa g + u^2$

folgt aber $\qquad \left(\frac{u + \mu}{2\varkappa}\right)(\mu - u) = 2(\varkappa - g),$

oder $\qquad (2z + 1)\left[(2z + 1) \cdot 2\varkappa - 2u\right] = 2(\varkappa - g).$

Schreibt man dies in der Form

$$-\varkappa \cdot 4z \cdot (z+1) + u(2z+1) = g,$$

so sieht man, dass die linke Seite dieser Gleichung eine ungerade, die rechte Seite eine gerade Zahl ist. Der Widerspruch löst sich nur durch die Annahme, z sei keine ganze Zahl; dann gilt dasselbe aber auch von Ω_1 und $\omega_1 = \Omega_1 + 1$.

2. Fall. Es sei nun $\sqrt{m} < 2\varkappa$.
Dann ist

$$\omega_1 > \omega_2 > \Omega_1 > \Omega_2.$$

Ferner ist nach (18)

$$\Omega_1 \cdot \Omega_2 = \frac{1}{16\varkappa^2}(u^2 - 4\varkappa \cdot u + 4\varkappa^2 - m)$$

und wegen (12) und (11)

$$\Omega_1 \cdot \Omega_2 = \frac{g-u}{4\varkappa} < 0.$$

Es ist also $\Omega_1 > 0$ und $\Omega_2 < 0$, und daher $\omega_1 > 1$ und $\omega_2 < 1$. Die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ sind gleichzeitig positiv im Innern des Intervalles

$$(\omega_1 \ldots \omega_2)$$

und nur dort. Nach (19′) ist dasselbe kleiner als die Einheit, enthält somit höchstens einen ganzzahligen Wert a. Nach vorigem enthält es aber immer den Wert

$$a = 1$$

und es ist daher auch in diesem Fall die Zahl a eindeutig bestimmbar, so dass die Bedingungen (16) erfüllt werden.

Andere als die zwei besprochenen Fälle kommen nicht vor, da m eine ungerade Zahl ist.

Die Gleichung (4) ist daher in allen Fällen richtig. Sie lautet ausführlich:

$$\sum_{m = 4m'^2 + d''\delta''} (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} \cdot \varphi\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) =$$

$$= \omega(m) \cdot (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}} \cdot \sqrt{m} \cdot \varphi(0) \qquad \text{(XI } \sigma\text{)}$$

und bildet in dieser Form die Formel (σ) des 11. Artikels von Liouville[1]).

Aus ihr entsteht die Formel (τ) desselben Abschnittes, wenn man die willkürliche Funktion $\varphi(u)$ durch eine gerade Funktion f ersetzt.

---

[1]) Journ. de math., sér. 2, T. 4, pg. 281 ff.

§ 9.

Die von P. Pepin bewiesenen Liouville'schen Formeln [1]) reduzieren sich im wesentlichen auf vier, welche wir hier der Vollständigkeit wegen zusammenstellen wollen. Zugleich wollen wir zeigen, dass die Formel (d) des fünften Artikels, für die Pepin einen eigenen Beweis erbringt (loc. cit.), in der allgemeineren Formel (f) desselben Artikels enthalten ist.

1) Es sei m eine positive ungerade, α irgend eine positive Zahl. Wie immer bedeute $f(x, y)$ eine bezüglich beider Variabler gerade, und für alle auftretenden Argumente definierte Funktion.

Die Summe

$$S = \sum \{f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(\delta' + \delta'', d' - d'')\}$$

erstrecken wir über alle verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$2^\alpha m = d' \delta' + d'' \delta''$$

in positiven ungeraden Zahlen. Des weitern betrachten wir die Zerlegungen der Zahl m in zwei positive (ungerade) Faktoren d und δ, und dehnen die Summe

$$S_1 = 2^{\alpha-1} \cdot \sum d\,[f(0, 2^\alpha d) - f(2^\alpha d, 0)]$$

über sämtliche Lösungen von

$$m = d \cdot \delta \qquad \text{aus.}$$

Es ergibt sich dann die erste der vier erwähnten Beziehungen in der Form

$$S = S_1 \qquad \text{oder}$$

$$\sum \{f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(\delta' + \delta'', d' - d'')\} =$$
$$= 2^{\alpha-1} \sum d\,\{f(0, 2^\alpha d) - f(2^\alpha d, 0)\}. \qquad \text{(II b)}$$

Dies ist die Gleichung (b) des zweiten Artikels, aus welcher sich alle übrigen Formeln der beiden ersten Artikel von Liouville ergeben [2]).

2) Sei $f(x, y)$ definiert wie vorhin, m sei irgend eine positive Zahl. Über sämtliche Lösungen der Gleichung

$$m = d' \cdot \delta' + d'' \cdot \delta'' \qquad (1)$$

in irgend welchen positiven ganzen Zahlen d', δ', d'', δ'' erstrecken wir die Summe

[1]) Journal de math., sér. 4, T. IV, pg. 83.

[2]) Journal de math., T. III, pg. 193.

$$S = \sum \{f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(d' + d'', \delta' - \delta'')\}.$$

m zerlegen wir nach der Gleichung

$$m = d \cdot \delta$$

in zwei positive, ungerade Faktoren, und dehnen die Summen

$$S_1 = \sum (d-1)\{f(d, 0) - f(0, d)\}$$
$$S_2 = \sum{}' \{f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + \cdots + f(\delta, d-1)\}$$
$$S_3 = \sum{}' \{f(2, \delta) + f(3, \delta) + \cdots + f(d-1, \delta)\}$$

über alle solchen Zerlegungen aus. Der in S_2 auftretende Akzent soll andeuten, dass alle Glieder der Klammer, für welche das zweite Argument Teiler der in derselben Klammer auftretenden Zahl d ist, gleich null zu setzen sind. Eine entsprechende Bedeutung bezüglich des ersten Argumentes hat der Akzent in der Summe S_3.

Die Formel (f) des fünften Artikels drückt sich nunmehr aus in der Gleichung:

$$S = S_1 + 2\,S_2 - 2\,S_3,$$

oder [1])

$$\sum \{f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(d' + d'', \delta' - \delta'')\} =$$
$$= \sum (d-1)\{f(0, d) - f(d, 0)\} +$$
$$+ 2\sum{}' \{f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + \cdots + f(\delta, d-1)\} -$$
$$- 2\sum{}' \{f(2, \delta) + \cdots + f(d-1, \delta)\}. \qquad \text{(V f)}$$

Nunmehr nehmen wir an, m sei ungerade.

Von den zwei Zahlen

$$m' = d' \cdot \delta' \qquad m'' = d'' \cdot \delta''$$

ist dann immer eine gerade, die andere ungerade. m' durchläuft die Werte

$$m' = 1, 2, 3, \ldots m - 1$$

und wegen (1) ist jeweilen

$$m'' = m - 1, m - 2, \ldots . 2, 1.$$

Da die Funktion $f(x, y)$ gerade ist, so darf in der Summe S von (V f) immer d' mit d'', und δ' mit δ'' vertauscht werden, ohne dass sich der Wert irgend eines Gliedes änderte. Dem entspricht aber in der Zerlegungsgleichung

$$m = d' \cdot \delta'' + d'' \cdot \delta'' = m' + m''$$

---

[1]) Journ. de math., T. III, 1858, pg. 284.

eine Vertauschung von m' mit m''. Nehmen wir eine solche immer dann vor, wenn m' gerade ist, so ändert sich sonach in S nichts. Man kann also die Summe S statt über die Lösungen von (1) zweimal über die Lösungen der Gleichung

$$m = m' + m'' = d'\,\delta' + d''\,\delta'' \qquad m' \equiv 1\ (2)$$

ausdehnen, in welcher m' nunmehr nur ungerade, m'' also nur gerade positive Zahlen bedeutet. Extrahieren wir aus m'' den ungeraden Faktor, indem wir setzen

$$m'' = 2^{\alpha_2} \cdot m_2 = 2^{\alpha_2} \cdot d_2 \cdot \delta_2 \qquad m_2 \equiv 1\ (2)$$

und schreiben wir für die ungeraden Faktoren d' und δ' von m' in der Folge d_1 resp. δ_1, so ergibt sich die neue Zerlegungsgleichung

$$m = d_1 \cdot \delta_1 + 2^{\alpha_2}\,d_2 \cdot \delta_2 \tag{2}$$

und die Summe S ist zweimal über die Lösungen dieser Gleichung zu erstrecken.

Nun definieren wir

$$f(x, y) = 0,$$

wenn das zweite Argument y eine ungerade Zahl ist. Für gerade Werte y machen wir keine neue Voraussetzung.

Hieraus folgt dann, dass wir bloss verschwindende Glieder vernachlässigen, wenn wir S nur über diejenigen Zerlegungen ausdehnen, für welche

$$\delta' + \delta'' \equiv 0. \quad (\text{mod } 2)$$

Da aber

$$\delta' = \delta_1 \equiv 1 \quad (\text{mod } 2)$$

ist, so folgt, dass wir

$$\delta'' = \delta_2 \equiv 1 \quad (\text{mod } 2)$$

setzen dürfen, was die neue Gleichung

$$d'' = 2^{\alpha_2} \cdot d_2$$

zur Folge hat. Es wird dann die Summe S zu

$$S' = 2 \sum \left\{ f(d_1 - 2^{\alpha_2}\,d_2,\ \delta_1 + \delta_2) - f(d_1 + 2^{\alpha_2}\,d_2,\ \delta_1 - \delta_2) \right\}, \tag{3}$$

welche Summe einfach über die Lösungen von (2) auszudehnen ist.

In der Summe S_1 der Formel (f) fallen, da d Teiler von m, also ungerade ist, alle Glieder von der Form

$$f(0, d)$$

weg, und es wird S_1 zu

$$S_1' = -\sum (d - 1)\,f(d, 0). \tag{4}$$

In der Summe S_2 sind auch nur die Glieder zu berücksichtigen, deren zweites Argument gerade ist, und da ein solches nie Teiler der ungeraden Zahl d sein kann, so darf man den Akzent, resp. die hiedurch angedeutete Beschränkung unterdrücken. Es wird alsdann S_2 zu

$$S_2' = \sum \{f(\delta, 2) + f(\delta, 4) + \cdots + f(\delta, d-1)\}.$$

Da in der Summe S_3 alle zweiten Argumente, weil Teiler der ungeraden Zahl m, ungerade Zahlen bedeuten, so verschwindet Glied für Glied jenes Ausdruckes, und es ist also

$$S_3 = 0.$$

Beachtet man noch, dass die Gleichung

$$\sum_{m = d \cdot \delta} f(\delta, \varkappa) = \sum_{m = d \cdot \delta} f(d, \varkappa)$$

besteht, sobald $\varkappa$ eine konstante Zahl ist, so geht die Gleichung

$$S = S_1 + 2\, S_2 - 2\, S_3$$

über in

$$S' = S_1' + 2\, S_2'$$

oder in die folgende[1]):

$$2 \sum \{f(d_1 - 2^{\alpha_2} d_2, \delta_1 + \delta_2) - f(d_1 + 2^{\alpha_2} d_2, \delta_1 - \delta_2)\} = \tag{V d}$$
$$= \sum \{f(d, 0) + 2 f(d, 2) + 2 f(d, 4) + \cdots + 2 f(d, \delta - 1) - d \cdot f(d, 0)\}.$$

Links ist über die Zerlegungen

$$m = d_1\, \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \cdot \delta_2,$$

rechts über die Lösungen von

$$m = d \cdot \delta$$

zu summieren. Alle Zahlen d, δ sind positiv ungerade.

Dies ist aber, abgesehen von der Bezeichnung, die von Liouville unter (d) im fünften Artikel gegebene Beziehung.

3. Die zwei übrigen Formeln, welche von Pepin bewiesen worden sind, und die den Inhalt der zwei letzten Artikel der «formules générales» bilden, beziehen sich beide auf dieselben zwei Zerlegungen der ungeraden Zahl m, resp. des doppelten dieser Zahl, und zwar sind es die Zerlegungen

$$m = d_1\, \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \cdot \delta_2 \tag{1}$$
$$2\, m = d' \cdot \delta' + d'' \cdot \delta'', \tag{2}$$

[1]) Journ. de math., 2e sér., T. III, 1858, pg. 274 und Pepin, l. c.

in welchen mit Ausnahme der beliebigen positiven Zahl α_2 alle Grössen positiv und ungerade sind.

Bezeichnet $\mathfrak{F}(x, y)$ eine für alle auftretenden Werte der Argumente definierte Funktion, die die Bedingungen

$$\mathfrak{F}(x, y) = -\mathfrak{F}(-x, y) = +\mathfrak{F}(x, -y); \quad \mathfrak{F}(0, y) = 0$$

genügt, so kann die Hauptformel des 18. Artikels[1]) in der Gestalt notiert werden:

$$\begin{gathered}\sum_{(2)} (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \{\mathfrak{F}(d'+d'', \delta'-\delta'') + \mathfrak{F}(d'-d'', \delta'+\delta'')\} = \\ = \sum_{(3)} \mathfrak{F}(2d, 0) + 4 \sum_{(1)} (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} \cdot \mathfrak{F}(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2),\end{gathered} \tag{XVIII}$$

wobei die erste Summe rechter Hand wie früher über die Lösungen von

$$m = d \cdot \delta \tag{3}$$

in positiven Zahlen zu erstrecken ist.

Es sei nun $\psi(x, y)$ eine für sämtliche zur Anwendung gelangenden Argumentwerte definierte Funktion, für welche

$$\psi(x, y) = \psi(y, x) = \psi(-x, y) = \psi(x, -y).$$

Dann stellt sich die Hauptformel des Artikels XVII[2]) dar in der Gleichung

$$\begin{gathered}\sum_{(2)} (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} \cdot \psi(d'-d'', \delta'+\delta'') = \\ = \sum_{(3)} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d) + 4 \sum_{(1)} (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2} + \frac{\delta_2-1}{2}} \cdot \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2).\end{gathered} \tag{XVII}$$

Die Summation ist jeweilen über die unter dem Summenzeichen angedeutete Zerlegungsgleichung auszudehnen.

Hiemit ist die Zusammenstellung der Formeln vollendet. Wie man aus den Gleichungen (II b) und (V f) sämtliche übrigen Relationen der ersten fünf Liouville'schen Artikel, sowie aus (XVIII) die Formel (L) des sechsten Artikels herleiten kann, ist teils bei Liouville, teils bei Pepin nachzulesen, teils sind diese Herleitungen so einfach, dass sie sich ohne weiteres darbieten.

---

[1]) Journal de math., 2e sér., T. X, 1865, pg. 169.
[2]) Journal de math., 2e sér., T. X, pg. 135.

§ 10.

Um die Anwendbarkeit Liouville'scher Formeln auf zahlentheoretische Probleme zu demonstrieren, wollen wir zum Schluss mit ihrer Hülfe eine der von Kronecker[1]) zuerst aufgestellten Klassenzahlrelationen auf arithmetischem Wege herleiten. Wir stützen uns dabei auf die Angaben, welche Liouville[2]) über den einzuschlagenden Weg gemacht hat, und beweisen zunächst einen von ihm ausgesprochenen Hülfssatz, welcher für einen einfachern Fall von Hermite[3]) gegeben worden ist.

Sei n eine positive Zahl von der Form

$$n = 4\,\nu + 1. \tag{1}$$

Die Zahlen d_2, δ_2 und d seien auch positiv, die erstern zwei ungerade. $F(n)$ sei die Anzahl der Klassen quadratischer Formen von der Determinante $(-n)$ und positiven äussern Koeffizienten, von denen wenigstens einer ungerade sein soll.

Dann gilt der Satz:

Ist $\mathfrak{A}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$n = d_2 \cdot \delta_2 + 2\,d\,(d_2 + \delta_2), \tag{2}$$

$\zeta(n)$ die Anzahl der Divisoren von n, und hat $\omega(n)$ die frühere Bedeutung, so besteht die Relation:

$$F(n) = \mathfrak{A} + \frac{1}{2}\{\zeta(n) + \omega(n)\}. \tag{3}$$

Aus (2) und (1) folgt zunächst

$$d_2 \equiv \delta_2 \pmod 4.$$

---

1) Kronecker: Crelle, Bd. 57, pag. 248; Journ. de math., sér. 2, T. V, pag. 289. Über Klassenzahlrelationen vergleiche man ferner die Arbeiten von:

Gierster: Über Relationen zwischen Klassenzahlen etc., Math. Ann., Bde. XVII, XXI u. XXII und die dort gegebenen Zitate, ferner die unter demselben Titel erschienene Abhandlung von:

A. Hurwitz in den math. Ann., Bd. XXV, sowie die zusammenfassende Darstellung in:

Klein-Fricke, Theorie der ellipt. Modulfunktionen, Bd. II, Leipzig 1892.

H. J. S. Smith in seinem Report on the theory of numbers, Art. 136, leitet eine zu der im Text gegebenen verwandte Relation ab, und benutzt dabei nur die auf rein arithmetischer Basis beruhenden Liouville'schen Formeln, im Gegensatz zu den übrigen Autoren, die sich durchwegs der Theorie der Modulfunktionen, also hoch transzendenter Hülfsmittel bedienen.

2) Liouville: Journal de math., sér. 2, T. 7, pag. 46.

3) Hermite: Comptes rendus. Vol. 53, 1861; Journal de math., sér. 2, T. V, pag. 32, ff.

Setzt man
$$\left.\begin{aligned} d_2 + \delta_2 &= 2\,u \\ d_2 - \delta_2 &= 4\,z \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

so bedeutet u eine ungerade, z irgend eine ganze Zahl und weil

$$\begin{aligned} d_2 &= u + 2\,z > 0 \\ \delta_2 &= u - 2\,z > 0 \end{aligned}$$

so sind z und u durch die Ungleichung

$$u > |\,2\,z\,| \tag{5}$$

mit einander verbunden. Die Gleichung (2) geht nun über in

$$u\,(u + 4\,d) - 4\,z^2 = n, \tag{2'}$$

aus welcher sich der Beweis des Satzes ergibt.

1. Jeder Lösung von (2′), für die

$$|\,4\,z\,| < u \tag{I}$$

ist, ordnen wir die Form

$$(u, 2\,z, u + 4\,d) \tag{6}$$

zu. Sie hat die Determinante $(-n)$, und ist wegen

$$2\,|\,2\,z\,| < u < u + 4\,d$$

reduziert. Da d alle positiven, u alle positiven ungeraden mit (2′) verträglichen Werte annehmen darf, so sind durch (6) alle reduzierten Formen dargestellt, deren Determinante $= -n$, deren mittlerer Koeffizient gerade oder null ist, und deren äussere Koeffizienten positiv, ungerade und ungleich sind. Ihre Anzahl, die mit der Zahl der Lösungen (I) übereinstimmt, sei Z_1.

2. Nun ordnen wir ferner den Lösungen von (2′), für welche

$$4\,z > u$$

ist, die quadratischen Formen

$$(u, u - 2\,z, 2\,u - 4\,z + 4\,d) \tag{6'}$$

zu, deren Determinante $(-n)$ ist. Aus

$$0 < u;\ \ 2\,z < u < 4\,z$$

folgt

$$0 < u;\ \ 0 < u - 2\,z;\ \ 0 < 2\,u + 4\,d - 4\,z;$$

und

$$u - 2\,(u - 2\,z) > 0;\ \ (2\,u - 4\,z + 4\,d) - 2\,(u - 2\,z) = 4\,d > 0.$$

Es ist daher (6′) der Inbegriff derjenigen Formen

$$(A,\ B,\ C),$$

welche den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{c} A > 0;\ B > 0;\ C > 0;\ A\,C - B^2 = n \\ 2\,B < A;\ 2\,B < C;\ B \equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right\} \tag{7}$$

genügen.

3. In dem allein noch nicht behandelten Fall, dass

$$-4\,z > u$$

ist, lassen wir jeder Lösung von (2′) die Form

$$(u,\ u + 2\,z,\ 2\,u + 4\,z + 4\,d) \tag{6″}$$

entsprechen, welche aus 6′ entsteht, indem man z in $(-z)$ verwandelt. Die Anzahl Z_2 der Formen (6″) ist sonach gleich derjenigen der Formen (6′).

Vertauscht man nun in (6′) jedesmal die äussern Koeffizienten, wenn der erste grösser ist, als der dritte, so entsteht ein Formensystem

$$(A, B, C),$$

für welches die Bedingungen

$$A > 0;\ B > 0;\ C > 0;\ B \equiv 1 \pmod 2;\ 2\,B < A < C;\ A\,C - B^2 = n$$

erfüllt sind, und das Z_2 Glieder enthält; fügt man zu diesem noch das aus gleich viel Gliedern bestehende System, welches durch Vertauschen von B mit $(-B)$ aus ihm hervorgeht, so erfüllen diese $2\,Z_2$ Formen die Bedingungen

$$A > 0;\ C > 0;\ B \equiv 1 \pmod 2;\ |2\,B| < A < C;\ A\,C - B^2 = n.$$

Mit den Formen (6) bilden diese aber das System aller reduzierten quadratischen Formen der Determinante $(-n)$ und positiven und nicht gleichzeitig geraden äussern Koeffizienten, für welche keine der Ungleichungen

$$|2\,B| < A < C$$

in eine Gleichung übergeht. Ihre Anzahl $Z_1 + 2\,Z_2$ ist gleich der Zahl $\mathfrak{A}$ der Lösungen von (2′) resp. (2).

Um sie zu der Zahl $F\,(n)$ sämtlicher reduzierter Formen zu ergänzen, haben wir noch die Formen

$$(A, B, A);\ |2\,B| \leqq A;\ B \geqq 0 \tag{8}$$

und

$$(2\,B, B, C);\ 0 < 2\,B < C \tag{9}$$

ihrer Zahl nach hinzuzufügen.

Wenn es deren im ganzen Z_3 gibt, so ist dann

$$F(n) = Z_1 + 2\,Z_2 + Z_3 = \mathfrak{A} + Z_3.$$

Im Falle der Formen (8) ist aber

$$n = (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

und da beide Faktoren positiv sind, darf man setzen

$$\left.\begin{matrix} A + B = d \\ A - B = \delta \end{matrix}\right\} (n = d \cdot \delta),$$

wo d und δ alle konjugierten Teiler von n zu durchlaufen haben.

Es wird
$$\begin{aligned} 2\,A &= d + \delta \\ 2\,B &= d - \delta, \end{aligned}$$

und wegen
$$0 \leqq 2\,B < A$$

unterliegen d und δ der Beschränkung

$$\delta \leq d \leq 3\,\delta. \tag{10}$$

Im Falle der Formen (9) ist

$$n = B(2\,C - B),$$

und da wieder beide Faktoren grösser als null sind, darf

$$\left.\begin{matrix} B = \delta \\ 2\,C - B = d \end{matrix}\right\} (n = d \cdot \delta)$$

gesetzt werden.

Die Bedingung $A < C$ geht dann über in

$$3\,\delta < d, \tag{10'}$$

und die Anzahl der Formen (9) ist der Zahl der diese Ungleichung befriedigenden Lösungen von

$$n = d \cdot \delta \tag{11}$$

gleich.

Nun kann wegen (1) der Fall

$$d = 3\,\delta$$

nicht eintreten. Jeder Teiler d von n erfüllt daher eine der Bedingungen

$$d < 3\,\delta \qquad d > 3\,\delta$$

und liefert daher eine Lösung (10) oder (10'), ausser wenn

$$d < \delta$$

sein sollte.

Die Anzahl dieser letztern Lösungen von (11) ist aber

$$\frac{1}{2}\left[\zeta(n) - \omega(n)\right],$$

die Zahl aller Lösungen von (11) ist $\zeta(n)$, und es ergibt sich sonach für die Zahl Z_3 der Formen (8) und (9)

$$Z_3 = \frac{1}{2}\left\{\zeta(n) + \omega(n)\right\}.$$

Gemäss der Gleichung

$$F(n) = \mathfrak{A} + Z_3$$

wird daher

$$F(n) = \mathfrak{A} + \frac{1}{2}\left\{\zeta(n) + \omega(n)\right\} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir gehen nunmehr an die Herleitung der erwähnten Klassenzahlrelation.

Sei d_3 eine positive ungerade Zahl, $f(x)$ eine gerade Funktion. Dann ist

$$\mathfrak{F}(x) = f(x - d_3) - f(x + d_3)$$

eine ungerade Funktion, und

$$\mathfrak{F}(0) = 0.$$

Führen wir dieselbe in die Formel (A_2) pg. 37 ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}\sum\left\{f(2m' + d'' - d_3) - f(2m' + d'' + d_3)\right\} = \\ = \sum\left\{f\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2} - d_3\right) - f\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2} + d_3\right)\right\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Die Summe links ist über die Lösungen von

$$n = 2m'^2 + d''\delta'' \qquad m' \gtrless 0;\; d'', \delta'' > 0;\; d'' \equiv \delta'' \equiv 1\ (2),$$

die zweite über diejenigen von

$$2n = m_1^2 + d_2\delta_2$$

zu erstrecken. n bedeutet eine ungerade Zahl.

Setzen wir

$$n = m - 2^{\alpha_3} \cdot d_3 \cdot \delta_3 \qquad \alpha_3 > 0, \tag{13}$$

wo m eine feste und wieder ungerade Zahl sein soll, und addieren wir alle für sämtliche Lösungen von (13) in positiv ungeraden Zahlen n, d_3, δ_3 und positiven Werten α_3 gebildeten Summengleichungen (12), so schreibt sich das Resultat in derselben Form (12), aber die linke Seite ist nun über alle Lösungen von

$$m - 2m'^2 = d''\delta'' + 2^{\alpha_3} d_3\delta_3 \tag{14}$$

und die rechte über die Lösungen von

$$2\,m = m_1^2 + d_2\,\delta_2 + 2^{\alpha_3+1}\cdot d_3\cdot\delta_3 \tag{15}$$

zu summieren.

Nun kann die linke Seite der Gleichung (12) nach einer aus der Formel (V d) pg. 54 deduzierbaren Gleichung vereinfacht werden. Man setze in (V d) statt $f\,(x, y)$ eine gerade Funktion $f\,(y)$ des zweiten Arguments. So ergibt sich mit der dortigen Bezeichnung:

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=d_1\delta_1+2^{\alpha_2}d_2\delta_2}\{f\,(\delta_1+\delta_2)-f\,(\delta_1-\delta_2)\} &= \\ = \sum_{n=d\cdot\delta}\{f\,(0)+2\,f\,(2)+2\,f\,(4)+\cdot\cdot+2\,f\,(\delta-1)\} &- \sum_{n=d\cdot\delta} d\cdot f\,(0). \end{aligned} \tag{16}$$

Nun beachte man, dass auf der linken Seite S der Gleichung (12) jeweilen die Glieder, die zu entgegengesetzt gleichen Werten von m' gehören, zusammengefasst werden können, und dass

$$f\,(x+m') + f\,(x-m')$$

und im Falle $m' = 0$

$$f\,(x+0)$$

eine gerade Funktion von x ist. Man erhält so eine Summe S, die gleich gebaut ist, wie diejenige der linken Seite von (16), und sich auf dieselbe Zerlegungsart (14) bezieht. Nach (16) wird also

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\sum_{m'}\Big\{ & f\,(2\,m')\sum d^* - \\ & - \sum\big(f\,(2\,m') + 2\,f\,(2\,m'+2) + \cdots + 2\,f\,(2\,m'+d^*-1)\big)\Big\} \end{aligned}$$

wo d^* alle Teiler der Zahl $(m - 2\,m'^2)$ zu durchlaufen hat, und wo das vor die geschwungene Klammer gesetzte Summenzeichen andeutet, dass m' der Reihe nach alle Zahlen zu durchlaufen hat, für die

$$m - 2\,m'^2$$

positiv ausfällt.

Jetzt definieren wir

$$\left.\begin{aligned} f\,(x) &= 0 \qquad \text{wenn } x \neq 0 \\ f\,(x) &= 1 \qquad \text{wenn } x = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{α}$$

Dann werden in der Summe (14) auf der rechten Seite R alle Glieder von der Form

$$f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} + d_3\right)$$

zu null. Dasselbe geschieht mit denjenigen Gliedern

$$f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} - d_3\right)$$

für welche

$$d_2 + \delta_2 \neq 2\,d_3$$

während so oft die Zahl 1 auftritt, als Lösungen von (15) existieren, für welche

$$d_2 + \delta_2 = 2\, d_3$$

wird. Dieselben sind aber mit den Lösungen von

$$2\, m - m_1^2 = d_2 \cdot \delta_2 + 2^{d_3}\, \delta_3\, (d_2 + \delta_2) \tag{17}$$

identisch, und da

$$2\, m - m_1^2 \equiv 1 \pmod 4$$

ist, so stimmt diese letztere Gleichung mit der Gleichung (2) des anfangs bewiesenen Hülfssatzes überein. Die Summe R in (12) wird sonach gleich der Anzahl der Lösungen von (17), oder nach (3) gleich

$$\sum_{m_1} F\,(2\, m - m_1^2) - \frac{1}{2} \sum_{m_1} \zeta\,(2\, m - m_1^2) - \frac{1}{2} \sum_{m_1} \omega\,(2\, m - m_1^2).$$

Hiebei ist über alle positiven ungeraden Werte von m_1, für die

$$2\, m - m_1^2 > 0$$

ist, zu summieren. Aber

$$\sum_{m_1} \omega\,(2\, m - m_1^2)$$

gibt an, wie oft $2\, m$ als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, und nach bekannten Sätzen ist

$$\sum_{m_1} \omega\,(2\, m - m_1^2) = \sum_{m = d \cdot \delta} (-1)^{\frac{d-1}{2}} = \varrho\,(m).$$

Daher wird

$$R = \sum_{m_1} F\,(2\, m - m_1^2) - \frac{1}{2} \sum \zeta\,(2\, m - m_1^2) - \frac{1}{2}\, \varrho\,(m). \tag{18}$$

Nun ist die Definition (α) auch im Ausdruck S der linken Seite von (14) einzuführen und nachher

$$S = R$$

zu setzen. Die Summe

$$\sum_{m'} f\,(2\, m') \cdot \sum d^*$$

wird nur für $m' = 0$ ein von null verschiedenes Glied erzeugen, und zwar hat jenes den Ausdruck:

$$\sum_{m = d \cdot \delta} d = \zeta_1\,(m), \tag{19}$$

da die Teiler d^* in die Teiler d von m übergehen.

Das erste Glied $f\,(2\, m')$ in der Summe

$$S_1 = \sum_{m'} \left\{ \sum \left(f\,(2\, m') + 2 f\,(2\, m' + 2) + \cdots + 2 f\,(2\, m' + d^* - 1) \right) \right\}$$

wird nur für $m' = 0$ zu 1, und zwar tritt es dann so oft auf, als

Teiler $d^* = d$ von m existieren; es liefert sonach an S_1 den Beitrag

$$\xi\,(m). \tag{19'}$$

Die Argumente

$$2\,m' + 2,\ 2\,m' + 4,\ 2\,m' + d^* - 1$$

der übrigen Glieder in S_1 sind alle positiv, wenn $m' > 0$, alle negativ, wenn $2\,m' + d^* < 0$ ist, und in beiden Fällen verschwindet die ganze geschweifte Klammer. Ist aber

$$2\,m' + d^* > 0,\ m' < 0,$$

so ist immer eines, und nur eines der Argumente gleich null, und die Klammer hat jeweilen den Wert 2. Es wird demnach

$$S_1 = 2 \cdot L\begin{pmatrix} 2\,m' + d^* > 0 \\ m' < 0 \end{pmatrix} + \xi\,(m) \tag{19''}$$

wo L die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$m = 2\,m'^2 + d^*\,\delta^*$$

mit den beigesetzten Bedingungen bedeutet. Damit geht aber der Ausdruck für S über in

$$S = \frac{1}{2}\,\xi_1\,(m) - L\begin{pmatrix} 2\,m' + d^* > 0 \\ m' < 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\xi\,(m). \tag{20}$$

Wir vereinfachen weiter, indem wir den auf pag. 39 in § 5 abgeleiteten Hülfssatz verwenden, wonach

$$L\,(2\,m' + d^* > 0) - L\,(2\,m' + d^* < 0) = L_1, \tag{21}$$

und L_1 die Anzahl der Lösungen von

$$2\,m = m_1^2 + d_2\,\delta_2$$

in ungeraden positiven Zahlen bezeichnet. Nun ist aber wegen

$$2\,m - m_1^2 = d_2 \cdot \delta_2$$

offenbar

$$L_1 = \sum_{m_1} \xi\,(2\,m - m_1^2).$$

Ferner ergibt sich sofort die Relation:

$$L\,(2\,m' + d^* > 0) = L\begin{pmatrix} 2\,m' + d^* > 0 \\ m' > 0 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} 2\,m' + d^* > 0 \\ m' < 0 \end{pmatrix} + \xi\,(m)$$

und wenn man dies in (21) einsetzt, folgt die neue Gleichung

$$L\begin{pmatrix} 2\,m' + d^* > 0 \\ m' < 0 \end{pmatrix} = \sum_{m_1} \xi\,(2\,m - m_1^2) + L\,(2\,m' + d^* < 0) -$$

$$- L\begin{pmatrix} 2\,m' + d^* > 0 \\ m' > 0 \end{pmatrix} - \xi\,(m).$$

Ersetzt man in (20) die Hälfte von

$$L\binom{2\,m' + d^* > 0}{m' < 0}$$

durch die Hälfte dieses Ausdrucks, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\Big\{\zeta_1(m) - \zeta(m) - \sum \zeta\left(2\,m - m_1^2\right) - L\left(2\,m' + d^* < 0\right) + \\ + L\binom{2\,m' + d^* > 0}{m' > 0} + \zeta(m) - L\binom{2\,m' + d^* > 0}{m' < 0}\Big\} \end{aligned} \tag{22}$$

Aber die ungerade Zahl

$$2\,m' + d^*$$

ist nie null, und es ist ferner

$$L\left(2\,m' + d^* < 0\right) = L\binom{2\,m' + d^* < 0}{m' < 0}.$$

Dann aber kann man

$$L\binom{2\,m' + d^* > 0}{m' < 0} \text{ und } L\binom{2\,m' + d^* < 0}{m' < 0}$$

zusammenfassen zu

$$L\left(m' < 0\right).$$

Anderseits darf für

$$L\binom{2\,m' + d^* > 0}{m' > 0}$$

der einfachere Ausdruck $L\left(m' > 0\right)$ gesetzt werden.

Beachtet man endlich noch, dass

$$L\left(m' > 0\right) = L\left(m' < 0\right),$$

so geht der Ausdruck (22) über in

$$S = \frac{1}{2}\zeta_1(m) - \frac{1}{2}\sum_{m_1} \zeta_1\left(2\,m - m_1^2\right).$$

Setzt man endlich diesen und den Ausdruck (18) in die Gleichung

$$S = R$$

ein, so erhält dieselbe die definitive Gestalt:

$$\sum_{m_1 = 1, 3, 5}^{m_1^2 < 2\,m} F\left(2\,m - m_1^2\right) = \frac{1}{2}\left\{\zeta_1(m) + \varrho(m)\right\}.$$

Dies ist aber die Klassenzahlrelation, welche wir herleiten wollten.