Zur abzählenden Geometrie.

Die Inflexionen und die Doppeltangenten einer ebenen Kurve.

Von

A. Beck.

---

1. In einem frühern Aufsatz „Über den Schnitt zweier Kegel und über eine Steinersche Aufgabe betreffend ebene Kurven", Bd. 38 (1893) dieser Zeitschrift, habe ich zu Untersuchungen über ebene Kurven von einer räumlichen Konstruktion Gebrauch gemacht, die auch schon von andern benützt worden war: Von zwei beliebigen Punkten O, O' des Raumes aus werden die beiden Kegel gebildet, welche die ebene Kurve $\mathfrak{C}$ von der Ordnung m zur gemeinsamen Leitlinie haben, und es wird die Raumkurve $\mathfrak{U}$ konstruiert, in welcher sich die beiden Kegel ausserdem noch schneiden und welche offenbar von der Ordnung $m\,(m-1)$ ist. Bezeichnet P den Spurpunkt der Geraden O, O' auf der Ebene von $\mathfrak{C}$, so haben die von P aus an $\mathfrak{C}$ zu legenden Tangenten ihre Berührungspunkte C_0 in den Schnittpunkten von $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{C}$. Auf diese Weise ergibt sich sofort die erste Plückersche Formel:

$$n = m\,(m-1) - 2\,d - 3\,k, \tag{1}$$

wo m, n, d, k die Ordnung, Klasse, Anzahl der Doppelpunkte und Anzahl der Rückkehrpunkte bezeichnen. Die dualistische Übersetzung liefert als zweite Plückersche Formel:

$$m = n\,(n-1) - 2\,t - 3\,i, \tag{2}$$

(t = Anzahl der Doppeltangenten, i = Anzahl der Inflexionen[1]). Ich habe dann gezeigt (a. a. O. S. 205—206), wie man durch eine andere ähnliche räumliche Konstruktion ebenso einfach die dritte Plückersche Formel erhalten kann:

$$i - k = 3\,(n-m) \tag{3}$$

Man füge nämlich zu dem Kegel $O\,\mathfrak{C}$ einen beliebigen Kegel zweiter Ordnung hinzu, $O'\,\mathfrak{K}$, und betrachte die Schnittkurve der

---

[1]) Vergl. Rodenberg, Mathem. Annalen, Bd. 26.

beiden Kegel. Es lässt sich dann leicht die Anzahl der Schmiegungsebenen, welche an diese Schnittkurve von O und O' aus gelegt werden können, durch die Singularitäten von $\mathfrak{C}$ ausdrücken und indem man diese beiden Anzahlen einander gleichsetzt, erhält man die Formel 3. Mit den drei Formeln 1—3 sind aber alle andern Beziehungen zwischen den Singularitäten der ebenen Kurve gefunden.

Im Nachfolgenden möchte ich die erste Konstruktion mit den beiden Kegeln $O\,\mathfrak{C}$, $O'\,\mathfrak{C}$ noch weiter verfolgen und namentlich zeigen, wie auch sie dazu benützt werden kann, die Anzahl der Inflexionen und der Doppeltangenten einer ebenen algebraischen Kurve zu berechnen. Ich beschränke mich dabei aber auf eine punkt-allgemeine Kurve, setze also $d = o$, $k = o$. Dann ist

$$n = m\,(m-1) \tag{4}$$

und die zwei zu beweisenden Formeln lauten dann bekanntlich:

$$i = 3\,m\,(m-2), \tag{5}$$

$$t = \frac{1}{2}\,m\,(m-2)\,(m-3)\,(m+3). \tag{6}$$

2. Die Raumkurve $\mathfrak{U}$, in welcher sich die beiden Kegel $O\,\mathfrak{C}$, $O'\,\mathfrak{C}$ ausser in $\mathfrak{C}$ schneiden, hat die Eigenschaft, von einem Punkt Q aus doppelt projiziert zu werden, der zu P harmonisch liegt in Bezug auf O, O'. Nehmen wir dann Q als Kollineationszentrum und die Ebene von $\mathfrak{C}$ als Kollineationsebene einer involutorischen zentrischen Kollineation, so entspricht in dieser Kollineation dem Kegel $O\,\mathfrak{C}$ der Kegel $O'\,\mathfrak{C}$, während die Raumkurve $\mathfrak{U}$ sich selbst entspricht. Legt man durch P eine beliebige Gerade s in der Ebene von $\mathfrak{C}$ und sind C_1, C_2 zwei auf s liegende Punkte von $\mathfrak{C}$, so sind die Schnittpunkte $O\,C_1 \cdot O'\,C_2 = U_{1\,2} = U$ und $O\,C_2 \cdot O'\,C_1 = U_{2\,1} = U'$ zwei konjugierte Punkte von $\mathfrak{U}$.

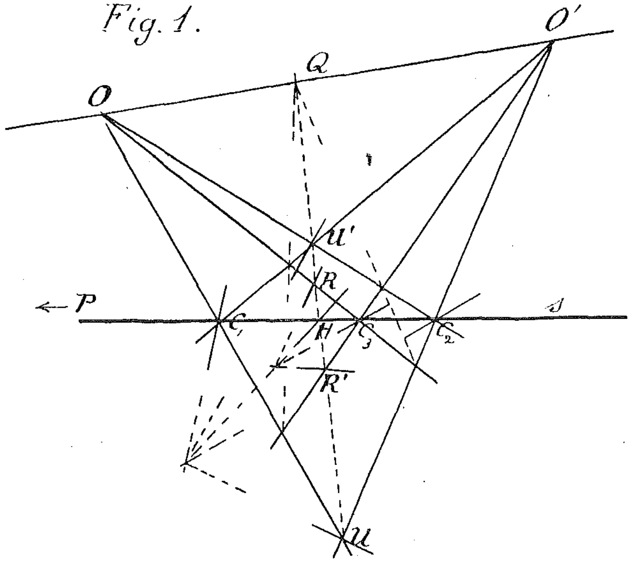
Der doppelt-projizierende Kegel $Q\,\mathfrak{U}$ wird von der Ebene $\mathfrak{C}$ in einer Kurve geschnitten, welche die harmonische Kurve $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{C}$ und P heissen möge und welche offenbar von der Ordnung $\frac{1}{2}\,m\,(m-1)$ ist. Jeder Punkt H dieser Kurve liegt harmonisch zu P in Bezug auf zwei Punkte C_1, C_2 von $\mathfrak{C}$ auf der Geraden $P\,H$. Die Tangente in H an $\mathfrak{H}$ geht durch den Schnittpunkt der Tangenten in C_1 und C_2 an $\mathfrak{C}$, durch welchen auch die Tangenten in U und U' an $\mathfrak{U}$ gehen.

3. In dem man s sich um P drehen lässt, kann man noch einer einfachen Bedingung in Bezug auf die Punkte C auf s genügen. In dieser Beziehung sind folgende drei Fälle hervorzuheben:

a) Zwei Punkte C_1, C_2 sind unendlich benachbart oder s ist eine Tangente s_0 von $\mathfrak{C}$, Berührungspunkt C_0. Ein Punkt H fällt mit C_0 zusammen. Jedes weitere Punktpaar C_0 C_3 liefert zwei unendlich benachbarte Punkte H_0 von $\mathfrak{H}$, harmonisch konjugiert zu P in Bezug auf C_0, C_3. s_0 ist also eine $(m - 2)$-fache Tangente von $\mathfrak{H}$. Da offenbar P im allgemeinen kein Punkt von $\mathfrak{H}$ ist, so ist also die Klasse von $\mathfrak{H}$ gleich $n(m - 2)$.

b) Es gibt auf s zwei verschiedene Paare von Punkten C, in bezug auf welche P denselben harmonisch konjugierten Punkt D hat. Diese Punkte D sind Doppelpunkte von $\mathfrak{H}$; auf jeder Geraden QD liegen zwei Paare konjugierter Punkte von $\mathfrak{U}$.

Fig. 1.



c) Der harmonisch konjugierte Punkt zu P in bezug auf C_1, C_2 fällt mit einem Punkt C^* von $\mathfrak{C}$ zusammen. Diese Punkte C^* sind Schnittpunkte von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}$. Da aber ausser diesen Punkten C^* auch die Punkte C_0 solche Schnittpunkte sind, so ist die Anzahl der Punkte C^* gleich

$$\frac{1}{2} m^2 (m - 1) - m(m - 1) = \frac{1}{2} m(m - 1)(m - 2).$$

4. Für die weitere Entwicklung der Raumfigur betrachten wir nun die beiden Kurven $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ (Restkurven), in welchen die beiden Kegel $O\,\mathfrak{C}$, $O'\,\mathfrak{C}$ noch von dem Kegel $Q\,\mathfrak{U} = Q\,\mathfrak{H}$ geschnitten werden. Beide Kurven sind von der Ordnung

$$\frac{1}{2} m^2 (m - 1) - m(m - 1) = \frac{1}{2} m(m - 1)(m - 2).$$

Sie entsprechen einander in der involutorischen Kollineation und treffen also die Ebene $\mathfrak{C}$ in denselben Punkten, welche offenbar identisch sind mit den Punkten C^* von 3 *c*.

Wenn C_1, C_2, C_3 auf s liegen (Fig. 1) und C_1, C_2 die Punkte U, U' von $\mathfrak{U}$ erzeugen, so ist der Schnittpunkt $U\,U'\,Q \cdot O\,C_3 = R$ ein Punkt von $\mathfrak{R}$, $U\,U'\,Q \cdot O'\,C_3 = R'$ der konjugierte Punkt auf $\mathfrak{R}'$, und die Tangenten in beiden gehen nach dem Schnittpunkt der zugehörigen Tangente von $\mathfrak{H}$ in H und von $\mathfrak{C}$ in C_3.

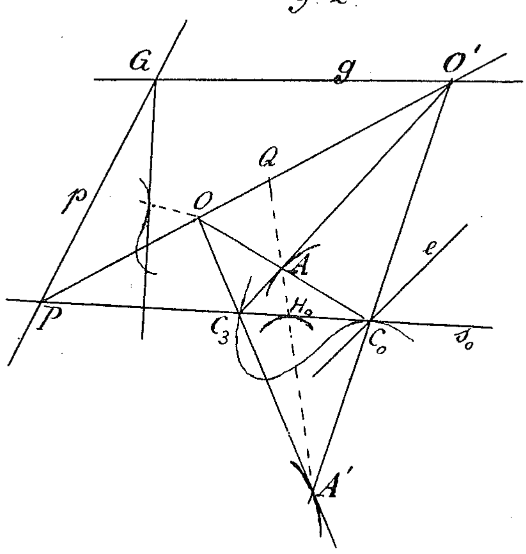
5. Wir fragen nun nach den gemeinsamen Punkten der beiden Raumkurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}$ auf dem Kegel $O\,\mathfrak{C}$, denen natürlich gemeinsame Punkte von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}'$ auf dem Kegel $O'\,\mathfrak{C}$ entsprechen. Jeder gemeinsame Punkt von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}$ muss ein Schnittpunkt von $\mathfrak{R}$ mit dem Kegel $O'\,\mathfrak{C}$ sein. Alle drei Kegel O, O', Q haben die Kurve $\mathfrak{U}$ gemein; ausserdem schneiden sie sich paarweise in den Kurven $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$; folglich sind die Schnittpunkte von $\mathfrak{R}$ mit dem Kegel O' zu suchen auf den drei Kurven $\mathfrak{C}, \mathfrak{U}, \mathfrak{R}'$, welche auf dem Kegel O' liegen. Die Schnittpunkte von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{C}$ sind die oben gefundenen Punkte C^*; jeder Schnittpunkt von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}'$ ausserhalb der Ebene $\mathfrak{C}$ ist aber offenbar auch ein Punkt von $\mathfrak{U}$. Somit ist die Anzahl der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}$ gleich

$$\frac{1}{2}\,m^2(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\,m\,(m-1)(m-2) = \frac{1}{2}\,m\,(m-1)^2(m-2).$$

6. Nun gibt es aber zwei Arten solcher gemeinsamen Punkte $\mathfrak{U}\,\mathfrak{R}$:

a) Der Punkt $\mathfrak{U}\,\mathfrak{R} = A$ liegt nicht zugleich auf $\mathfrak{R}'$. Dieser Fall tritt ein, wenn zwei Punkte $C_1\,C_2$ unendlich benachbart sind (C_0).

Fig. 2.



Aus C_1, C_3 erhält man dann ein Paar konjugierter Punkte A, A' von $\mathfrak{U}$, deren Tangenten nach C_3 gehen; dabei fällt mit A ein Punkt R und mit A' ein Punkt R' zusammen, weil eine dritte erzeugende $O\,C_2$ resp. $O'\,C_2$ mit der zweiten $O\,C_1$ resp. $O'\,C_1$ unendlich benachbart ist (Fig. 2). Die Erzeugende $Q\,A\,A'$ trifft s_0 in einem der Punkte H_0, in welchen $\mathfrak{H}$ von s_0 berührt wird.

Die Anzahl der Punkte A beträgt nach dem Vorigen

$$n\,(m-2) = m\,(m-1)\,(m-2).$$

Der Fall 6 *a* ist offenbar mit 3 *a* identisch.

b) Der Punkt $\mathfrak{U}\,\mathfrak{R} = B$ liegt auch auf $\mathfrak{R}'$. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn auf einer Erzeugenden des Kegels Q zwei Paare konjugierter Punkte U liegen, also $\mathfrak{H}$ einen Doppelpunkt hat. Jeder dieser vier Punkte U ist offenbar auch ein Punkt R und ein Punkt R'. Da nun die Zahl aller Punkte $\mathfrak{U}\,\mathfrak{R}$ und die Zahl der Punkte A bekannt ist, so hat man auch die Zahl der Punkte B gefunden, und da je vier Punkte B auf einer Doppelerzeugenden $Q\,D$ liegen, so erhält man für die Anzahl der Doppelpunkte der harmonischen Kurve:

$$\frac{1}{8}\, m\,(m-1)^2\,(m-2) - \frac{1}{4}\, m\,(m-1)\,(m-2)$$
$$= \frac{1}{8}\, m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3).$$

Der Fall 6 *b* ist mit 3 *b* identisch.

Man kann leicht beweisen, dass die Kurve $\mathfrak{R}$ von einem Punkt Q'_1 aus dreifach projiziert wird, der zu O' harmonisch konjugiert ist in bezug auf O und Q. Auf diesem Kegel Q'_1 liegen die Tangenten von $\mathfrak{R}$ in den Punkten A. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{R}'$; der Scheitel Q_1 des dreifach projizierenden Kegels ist harmonisch konjugiert zu O in bezug auf O' und Q und nach ihm hin gehen die Tangenten von $\mathfrak{R}'$ in den Punkten A'. — Jede Gerade s_0 liefert $\frac{1}{2}\,(m-2)\,(m-3)$ Gerade durch Q, welche gleichzeitig Tangenten von $\mathfrak{R}$ und von $\mathfrak{R}'$ sind.

7. Die Inflexionen. Die Tangenten s_0 von P an $\mathfrak{C}$ haben mit der Kurve ausser dem Berührungspunkt $C_0 = C_1\,C_2$ noch $m-2$ andere Punkte $C_3 \cdots$ gemein, von denen im allgemeinen keiner mit C_0 zusammenfällt, da P ein beliebiger Punkt in der Ebene $\mathfrak{C}$ ist. Es wird also auch keiner der Punkte A in die Ebene $\mathfrak{C}$ fallen. So oft ein Punkt A in die Ebene $\mathfrak{C}$ fallen würde, so oft würde durch P eine Inflexionstangente von $\mathfrak{C}$ gehen und umgekehrt, so lange wenigstens keiner der Scheitel O, O' in der Ebene $\mathfrak{C}$ liegt.

Man wird also zu den Inflexionen gelangen können, wenn man den Punkt P nicht fest annimmt, sondern ihn eine gerade Linie p durchlaufen lässt, wozu nötig ist, auch einen der beiden Scheitel O, O' sich ändern zu lassen. Wir nehmen also an, O' durchlaufe eine gerade Linie g, deren Spurpunkt G dann natürlich auf p liegen muss (Fig. 2.). Die Punkte A werden dann eine Raumkurve $\mathfrak{A}$ beschreiben und die Anzahl der Inflexionen von $\mathfrak{C}$ wird bestimmt werden können, wenn wir angeben können, wie viel Punkte von $\mathfrak{A}$ in die Ebene $\mathfrak{C}$ fallen.

Da aber jede andere Ebene die Kurve $\mathfrak{A}$ in der gleichen Anzahl von Punkten schneidet, so wählen wir eine Ebene ε, die beliebig durch den festen Punkt O gelegt wird und deren Spur irgend eine

Gerade e in der Ebene $\mathfrak{C}$ ist. Wir sind dann leicht im Stande, die Punkte A anzugeben, die in dieser Ebene ε liegen. Wenn A in ε liegt, so liegt C_0 auf e. Es gibt also m Punkte C_0. In jedem derselben legen wir die Tangente, welche auf p den Punkt P und auf $\mathfrak{C}$ die Punkte $C_3, \cdots$ bestimmt. Indem wir P mit O verbinden, erhalten wir auf g den Punkt O' und die Gerade $O' C_3$ bestimmt dann auf $O C_0$ den Punkt A. Die Anzahl solcher Punkte A in ε ist also gleich $m(m-2)$.

Aber es fragt sich nun, ob der Punkt O selbst auch zur Kurve $\mathfrak{A}$ gehöre, entsprechend gewissen speziellen Lagen der Ebene ε durch O. In der Tat können wir solche spezielle Lagen leicht angeben. Wenn nämlich A mit O zusammenfallen sollte, so müsste die Gerade $O' A$ mit $O' O$, also C_3 mit P zusammenfallen. Auf p liegen m solcher Punkte $C_3 = P$; von jedem derselben gehen $n-2$ Tangenten an $\mathfrak{C}$ und gleichzeitig erhalten wir die zugehörige Lage von O' auf g. Entsprechend diesen speziellen Lagen von ε fallen also $m(n-2)$ Punkte A nach O. Diese Ebenen ε bilden $m(n-2)$ Ebenenbüschel, deren Achsen nach den $m(n-2)$ Berührungspunkten auf $\mathfrak{C}$ gehen. Diese Achsen sind also die Tangenten von $\mathfrak{A}$ in dem $m(n-2)$-fachen Punkt O.

Nach dem Vorigen ergibt sich als Ordnungszahl der Kurve $\mathfrak{A}$:

$$m(m-2) + m(n-2) = m(m^2-4).$$

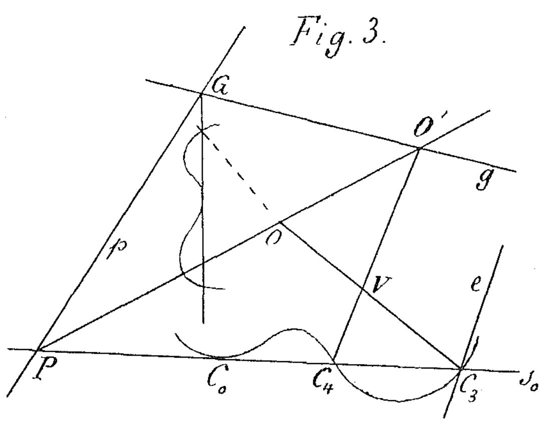
Nun ist aber zu bedenken, dass der Punkt O', indem er die Gerade g durchläuft, auch einmal in die Ebene $\mathfrak{C}$ fällt, nach G, mit dem dann auch P zusammenfällt. Auch für diese spezielle Lage lässt sich die Konstruktion der Punkte A durchführen; sie fallen in die Berührungspunkte der Tangenten von G an $\mathfrak{C}$ und zwar je $(m-2)$ mal, weil auf jeder dieser Tangenten $m-2$ Punkte C_3 liegen (Fig. 2). Diese $n(m-2)$ Punkte von $\mathfrak{A}$ in der Ebene $\mathfrak{C}$ haben also nicht die Bedeutung von Inflexionspunkten der Kurve $\mathfrak{C}$. Rechnen wir sie ab, so bleibt als Anzahl der Inflexionspunkte:

$$i = m(m^2-4) - m(m-1)(m-2) = 3\,m(m-2), \text{ w. z. b. w.}$$

8. Die Doppeltangenten. Nachdem i bestimmt ist, könnte man t nach Formel 2 berechnen. Wir wollen aber zeigen, wie t auch direkt abgeleitet werden kann in ähnlicher Weise wie i.

Dazu betrachten wir wieder die Tangenten s_0, welche von P an $\mathfrak{C}$ gehen und welche $\mathfrak{C}$ noch je in $m-2$ Punkten $C_3, C_4, \cdots$ schneiden. Je zwei dieser Schnittpunkte bestimmen ein Paar konjugierter Punkte von $\mathfrak{U}$, die wir mit V bezeichnen wollen. Zu jeder Tangente s_0 gehören also $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ solcher Punktepaare V. Würde s_0 eine Doppeltangente sein, so würde in jedem ihrer beiden Berührungspunkte ein Paar konjugierter Punkte V in der Ebene $\mathfrak{C}$ zusammenfallen. Umgekehrt würde ein in die Ebene $\mathfrak{C}$ fallender Punkt V eine Doppeltangente durch P anzeigen, so lange wenigstens keiner der beiden Scheitel O, O' in der Ebene $\mathfrak{C}$ liegt.

Nun wenden wir dasselbe Verfahren an wie in 7, indem wir O' eine Gerade g beschreiben lassen, so dass P in der Ebene $\mathfrak{C}$ eine Gerade p beschreibt, welche durch den Spurpunkt G von g geht. Dann beschreiben die Punkte V eine Raumkurve $\mathfrak{V}$, deren Ordnung zu bestimmen ist. Wir legen wieder durch O eine beliebige Ebene ε,



deren Spur e sei, und bestimmen die Anzahl der Punkte V, die in dieser Ebene liegen (Fig. 3). Der Punkt C_3 ist jetzt ein Schnittpunkt von $\mathfrak{C}$ mit e. Indem wir von ihm aus die Tangenten an $\mathfrak{C}$ legen, erhalten wir die Punkte C_4 und auf p den Punkt P, daraus O' auf g und endlich V als Schnittpunkt von $O\,C_3$ mit $O'\,C_4$. Die Zahl der so erhaltenen Punkte V beträgt also:

$$m\,(n-2)\,(m-3) = m\,(m-2)\,(m-3)\,(m+1).$$

Unter den Ebenen ε durch O gibt es aber spezielle, für welche O auch ein Punkt von $\mathfrak{V}$ wird. Soll nämlich V nach O fallen, so muss die Gerade $O'\,V$ mit der Geraden $O'\,O$, also der Punkt C_4 mit P zusammenfallen. Diese Punkte C_4 sind also die m Schnittpunkte von p mit $\mathfrak{C}$. Von jedem gehen $n-2$ Tangenten an $\mathfrak{C}$ und auf jeder derselben liegen $m-3$ Punkte C_3, durch welche die Spur e gehen muss. Die Anzahl der nach O fallenden Punkte V beträgt also:

$$m\,(n-2)\,(m-3) = m\,(m-2)\,(m-3)\,(m+1),$$

so dass wir für die Ordnungszahl der Kurve $\mathfrak{V}$ erhalten:

$$2\,m\,(m-2)\,(m-3)\,(m+1).$$

Die speziellen Ebenen ε bilden $m\,(n-2)\,(m-3)$ Ebenenbüschel, deren Achsen nach den Punkten C_3 gehen; diese Achsen sind die Tangenten von $\mathfrak{V}$ in dem vielfachen Punkt O.

Was nun die Schnittpunkte von $\mathfrak{V}$ mit der Ebene $\mathfrak{C}$ betrifft, so ist zu beachten, dass sie nur dann zu Doppeltangenten führen, wenn O' nicht in der Ebene $\mathfrak{C}$ liegt. Fällt der Punkt O', indem er g durchläuft, nach G, so lässt sich die Konstruktion der Punkte V noch ausführen. Sie fallen dann in diejenigen Punkte, in welchen $\mathfrak{C}$ von den Tangenten geschnitten wird, die von G aus an $\mathfrak{C}$ gelegt werden können und zwar in jeden $(m-3)$ mal. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{B}$ ist also um $n(m-2)(m-3)$ zu vermindern. Da aber bei einer Doppeltangente jeder der beiden Berührungspunkte auf $\mathfrak{B}$ liegen muss, so erhalten wir schliesslich für die Anzahl der Doppeltangenten:

$$t = \frac{1}{2}\left[2m(m-2)(m-3)(m+1) - m(m-1)(m-2)(m-3)\right]$$
$$= \frac{1}{2} m(m-2)(m-3)(m+3), \text{ w. z. b. w.}$$

9. In bezug auf die Raumkurven $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}$ mögen noch die folgenden Bemerkungen gemacht werden. Dabei ist die Gerade q zu beachten, welche durch G geht und zu p harmonisch konjugiert ist in bezug auf GO und g und welche die Punkte Q für die verschiedenen Lagen von O' enthält. Die Reihe der Punkte P ist perspektiv zu den Reihen der Punkte O' und Q.

Die Punkte A' beschreiben eine Raumkurve $\mathfrak{A}'$, welche mit $\mathfrak{A}$ auf dem Kegel $O\,\mathfrak{C}$ liegt. Auf jeder Erzeugenden dieses Kegels liegen ausser O $m-2$ Punkte A und $n-2$ Punkte A'. Zu jedem Punkt von $\mathfrak{A}$ gehört ein Punkt von $\mathfrak{A}'$ der Art, dass ihre Verbindungslinie die Gerade q schneidet in dem korrespondierenden Punkt Q. Die Kurve $\mathfrak{A}'$ ist ebenfalls von der Ordnung $m(m^2-4)$, aber sie hat in O einen $m(m-2)$-fachen Punkt. Beide Kurven $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ gehen durch die Inflexionspunkte von $\mathfrak{C}$. Während aber $\mathfrak{A}$ die Berührungspunkte der Tangenten von G an $\mathfrak{C}$ zu $(m-2)$-fachen Punkten hat, geht $\mathfrak{A}'$ einfach durch die $n(m-2)$ weitern Schnittpunkte dieser Tangenten mit $\mathfrak{C}$.

Auf der Kurve $\mathfrak{B}$ liegen die Punkte paarweise so, dass ihre Verbindungslinie die Gerade q in dem korrespondierenden Punkt Q schneidet. Auf jeder Erzeugenden des Kegels $O\,\mathfrak{C}$ liegen ausser O $(n-2)(m-3)$ Punkte V. Zu jeder Doppeltangente von $\mathfrak{C}$ gehört auf q ein bestimmter Punkt Q, nach welchem hin die Tangenten von $\mathfrak{B}$ in den Berührungspunkten der Doppeltangente gehen.