

# Der Druck in der Mündungsebene beim Ausströmen elastischer Flüssigkeiten.

Von

A. Fliegner.

---

Unter der Überschrift: „Beitrag zur Theorie des Ausströmens der elastischen Flüssigkeiten“ habe ich vor einiger Zeit in dieser Vierteljahrsschrift<sup>1)</sup> auf dem Wege der Rechnung nachzuweisen gesucht, dass bei einem solchen Ausströmen der Druck in der Mündungsebene stets grösser bleibt, als der Druck der umgebenden, ruhenden Flüssigkeit. Bei den folgenden Entwicklungen werde ich mich auf diese Untersuchung beziehen, bin aber genötigt, die dort benutzten Formeln in einem unwesentlichen Punkte zu ändern. Ich muss daher den ganzen dort befolgten Gedankengang hier kurz wiederholen und dabei die Änderungen begründen.

Die Geschwindigkeit  $w_m$  in der Mündungsebene und das ausströmende Flüssigkeitsgewicht  $G$  hängen ausser von dem Zustande  $p_i, v_i, T_i$  im Ausflussgefäss und dem Drucke  $p_m$  in der Mündungsebene auch von den Bewegungswiderständen und dem Wärmeaustausche mit den Mündungswandungen ab. Da sich die beiden letzten Einflüsse aus Versuchen nicht getrennt bestimmen lassen, so habe ich schon bei einer früheren Gelegenheit<sup>2)</sup> den thatsächlich vorhandenen Wärmeaustausch vernachlässigt und die Abweichung der Zustandsänderung von der adiabatischen als nur von den Widerständen herrührend angenommen. Danu wird für Gase, für die allein weiter gerechnet werden kann, die Zustandsänderung polytropisch nach  $p v^{\nu} = \text{const.}$ , und es ergibt sich,

---

<sup>1)</sup> 42. Jahrgang, 1897, Seite 317—346. Weiterhin mit „V.“ angeführt.

<sup>2)</sup> „Versuche über das Ausströmen der atmosphärischen Luft durch gut abgerundete Mündungen“, Civilingenieur, 1877, Band XXIII, Seite 443—510. Weiterhin mit „C.“ angeführt.

wenn  $n$  den Quotienten der beiden spezifischen Wärmen bedeutet, mit den sonst üblichen Bezeichnungen:

$$(1) \quad w_m = \sqrt{2g R T_i \frac{n}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{n}} \right]},$$

$$(2) \quad G = F p_i \sqrt{\frac{2g}{R T_i} \frac{n}{n-1} \left[ \left( \frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{2}{n}} - \left( \frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{\kappa+1}{n}} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Hier soll noch gleich die kürzere Bezeichnung eingeführt werden:

$$(3) \quad \left( \frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{2}{n}} - \left( \frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{\kappa+1}{n}} \equiv \psi.$$

Weiterhin brauche ich die Zahlenergebnisse dieser älteren Versuche, und ich muss daher jetzt die obigen allgemeineren Formeln benutzen, während ich neulich einfach mit  $\kappa = n$  gerechnet hatte.

Die Vorgänge im freien Strahl aussen nach dem Verlassen der Mündungsebene liessen sich nur angenähert verfolgen. Unter Einführung von Mittelwerten für die Geschwindigkeit  $w$  und die Zustandsgrössen  $p$ ,  $v$ ,  $T$  in jedem Querschnitt ergab sich dafür, „V.“, Seite 338, die Gleichg. (35):

$$(4) \quad M dw = - d \left[ F(p - p_a) \right] - G \frac{dW_r}{w},$$

wo  $M = G/g$  ist,  $p_a$  den äusseren Druck,  $dW_r$  die durch Widerstände aufgezehrte Arbeit bedeutet.

Diese Gleichung hatte ich dann von der Mündungsebene bis zur Beruhigung integriert und darauf  $w_m$  nach Gleichg. (1) durch  $p_m$  ausgedrückt gedacht, wodurch sich ein Zusammenhang zwischen  $p_m$ ,  $p_i$  und  $p_a$  ergab. Eine weitere Rechnung war aber nicht möglich, weil das Gesetz, dem die Widerstände folgen, nicht bekannt war. Ich konnte daher auch das eingangs angegebene Verhalten des Druckes in der Mündungsebene nicht eigentlich streng beweisen, sondern musste mich damit begnügen, es wenigstens möglichst wahrscheinlich zu machen.

<sup>1)</sup> S. Zeuner, Techn. Thermodynamik, 1900, I. Teil, Seite 240, Gleichg. (33) und (34); nur habe ich hier die Bezeichnungen  $n$  und  $\kappa$  miteinander vertauscht.

Nun geht aber noch ein weiterer Schritt in dieser Richtung zu thun, gestützt auf Versuche von E. Mach und Salcher<sup>1)</sup>, von L. Mach<sup>2)</sup> und von R. Emden<sup>3)</sup>. Diese Beobachter haben ausströmende Gasstrahlen belichtet und das Lichtstrahlenbündel auf einem in passendem Abstand angebrachten Schirm aufgefangen. Infolge der Strahlenbrechung beim Durchgange durch den Gasstrahl entstand auf diesem Schirm ein durch Brennlinien erzeugtes Bild, aus dessen Aussehen Schlüsse auf die Vorgänge im Strahle gezogen werden konnten. Bei kleinem Überdrucke zeigt das Bild allerdings keinerlei Besonderheiten. Bei grösserem dagegen sieht die äussere Begrenzung des eigentlichen Strahles wesentlich gleich aus, wie die eines Wasserstrahles mit Kontraktion: es folgen sich regelmässig Erweiterungen und Verengungen, die mit einer je nach den Verhältnissen verschiedenen, für die vorliegende Untersuchung aber nebensächlichen Zeichnung in Hell und Dunkel bedeckt sind. Dieser Kern wird von einem, allerdings nicht auf allen Bildern deutlich erkennbaren, aber doch jedenfalls stets vorhandenen, divergenten Mantel mit unregelmässiger und weniger stark ausgesprochener Schattierung umgeben. Die ganze Zeichnung, namentlich die des Kernes, bleibt vollkommen ungeändert, so lange sich die Pressungen nicht ändern.

Aus diesem Aussehen der Bilder hat schon E. Mach gefolgert, und die anderen Beobachter stimmen ihm im wesentlichen durchaus zu, dass sich bei grösserem Überdruck im Gasstrahle Wellen ausbilden, die von E. Mach als konische, von Emden als longitudinale bezeichnet werden. Da sich solche Wellen im Strahle mit der Schallgeschwindigkeit fortpflanzen müssen, und da sie sich gleichzeitig als stationär ergeben haben, so beweise das, dass sich der Strahl selbst nach aussen zu auch mit der Schallgeschwindigkeit bewegt. Nur L. Mach scheint, wenn ich ihn recht verstehe<sup>4)</sup>, anzunehmen, dass die Strömungsgeschwindigkeit bei grösserem Überdrucke grösser wird, als die Schallgeschwindigkeit. Dieser Auffassung kann ich mich aber nicht

1) Sitzgsber. d. Akad. Wien, 1889, Bd. XCVIII, Abtlg. II a, Seite 1303.

2) Ebenda, 1897, Bd. CVI, Abtlg. II a, Seite 1025.

3) „Über die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase“. Habilitationsschrift, Leipzig, Joh. Ambr. Barth.

4) Z. B. a. o. O., Seite 1044, Zeile 12 bis 9 von unten.

anschiessen; sie steht auch im Widerspruche mit der von Anderen aus dem Verhalten der Formeln und aus Versuchen über Ausflussmengen als wahrscheinlich hergeleiteten Annahme, dass die Ausströmungsgeschwindigkeit höchstens der Schallgeschwindigkeit gleich werden könne. Dass aber diese Grenzgeschwindigkeit bei genügend grossem Überdrucke auch wirklich erreicht wird, ist doch erst durch solche Strahlbilder streng nachgewiesen worden. Emden hat ausserdem auf dem Wege der Rechnung gezeigt, dass sich dabei die in der Mündungsebene in Form von Überdruck noch verfügbare Energie bei der weiteren Bewegung aussen in relative Schallschwingungen umsetzt.

Unabhängig von diesen Beobachtern und auf ganz anderem Wege, nämlich durch unmittelbare Druckmessungen, hat Parenty<sup>1)</sup> gefunden, dass sich auch in einem unter grösserem Überdruck ausströmenden Dampfstrahle der Querschnitt und die Pressungen in wechselndem Sinne ändern. Er erhielt aber keinen so regelmässig periodischen Verlauf, für den Querschnitt, weil er Kern und Mantel nicht von einander trennen konnte, für die Pressungen vielleicht deswegen, weil er mit ungeeigneten Hilfsmitteln gearbeitet hat. Um den Druck im Inneren des Strahles zu beobachten, hat er nämlich zugespitzte Glasröhrchen in ihn eingeführt. Die Zuspitzung war aber nach seiner Figur 7, auf Seite 314, verhältnismässig stumpf ausgefallen, und ich muss daher auf Grund eigener Erfahrungen<sup>2)</sup> annehmen, dass der Strahl dadurch in seiner natürlichen Ausbildung zu stark gestört wurde, und dass daher die Druckbestimmungen keinen Anspruch auf Zuverlässigkeit machen können. Das ist auch wahrscheinlich der Grund, warum Parenty nicht erkannt zu haben scheint, dass es sich um Schallschwingungen handelt. Dabei nehme ich allerdings als selbstverständlich an, dass sich ein Dampf in dieser Richtung wesentlich gleich verhält, wie ein Gas.

Der vorhin erwähnte Kern muss der Entstehung der Belichtungsbilder nach in seinem Umriss den Umriss des Gasstrahles selbst richtig wiedergeben. Daraus folgt nun zunächst, dass sich in diesem Kerne die einzelnen Flüssigkeitsteilchen im allgemeinen

<sup>1)</sup> Annales de Chimie et de Physique, Ser. VII, 1897, Bd. XII, Seite 289—373.

<sup>2)</sup> „Versuche über das Ausströmen von Luft durch konisch divergente Rohre“. Schweiz. Bauztg. 1898, Bd. XXXI, Seite 69, links, erster dort beginnender Absatz.

in welligen Linien bewegen. Und das deutet weiter auf das Vorhandensein von Normalkräften, die ihrerseits nur durch eine Verschiedenheit der Pressungen in benachbarten Fäden hervorgerufen sein können, wobei aber die äussersten Fäden stets unter dem Drucke der Umgebung stehen. Daraus ergibt sich nun folgende Änderung der Pressungen im Verlaufe der Bewegung: Unmittelbar ausserhalb der Mündungsebene ist der Überdruck von innen nach aussen zu gerichtet, und die einzelnen Gasteilchen bewegen sich divergent in nach aussen zu hohlen Bahnen. In dem Querschnitt, in welchem dann die Wendepunkte der Bahnen liegen, herrscht in allen Punkten der äussere Druck, wobei es allerdings dahingestellt bleiben muss, ob das in einem ebenen oder gekrümmten Querschnitt geschieht. Bis zu den nächsten Wendepunkten kehren die Bahnen jetzt die hohle Seite nach innen, und es herrscht im Inneren des Strahles ein kleinerer Druck, als in der Umgebung. Nachher wird der Druck innen wieder grösser als aussen, und so wiederholt sich die Änderung weiter.

Umgekehrt wie die Pressung verläuft die Geschwindigkeit. Diese hat also in der Mündungsebene und in den Knotenpunkten kleinste Werte, in den Bäuchen grösste, während die Geschwindigkeit in den Wendepunktquerschnitten einen mittleren Wert annimmt. Diejenige Geschwindigkeit, welche man als die mittlere Fortbewegungsgeschwindigkeit des ganzen Strahles ansehen muss, und die, wie vorhin gezeigt wurde, der Schallgeschwindigkeit gleich ist, liegt nun zwischen den beiden Grenzgeschwindigkeiten, und man wird sie angenähert gleich der Geschwindigkeit in den Wendepunktquerschnitten setzen dürfen. Diese Annahme soll wenigstens weiterhin gemacht werden, um eine Rechnung überhaupt zu ermöglichen. Jedenfalls muss aber hiernach die Geschwindigkeit in der Mündungsebene noch kleiner sein, als die Schallgeschwindigkeit.

Der den Kern des Strahles umhüllende Mantel wird natürlich von solchen Gasteilchen gebildet, die sich mit dem umgebenden Gase gemischt und dieses dadurch mit in Bewegung gesetzt haben, während ihre eigene Geschwindigkeit entsprechend kleiner geworden ist. Diese ganze, nach aussen zu stetig wachsende Gasmasse befindet sich neben ihrer langsameren, fortschreitenden auch noch in unregelmässig wirbelnder Bewegung.

Aus den vorstehenden Erörterungen folgt nun, dass in dem ausgetretenen Strahle drei verschiedene Bewegungswiderstände auftreten, nämlich: 1) innere gegenseitige Reibung der einzelnen Gasteilchen, 2) Mitreissen von Gasteilchen der Umgebung und 3) Ausbildung von Schallwellen. Die beiden ersten Widerstände treten bei allen Pressungsverhältnissen auf, der dritte dagegen nur bei genügend grossem Überdrucke.

Bei meiner neulichen Veröffentlichung glaubte ich noch, die für die Bewegung aussen geltende Glchg. (4), „V.“, Glchg. (35), müsse von der Mündungsebene bis zur vollständigen Beruhigung integriert werden. Für diese Grenzen geht aber der eben als zweiter angegebene Widerstand gar nicht näher zu bestimmen, weil es vollständig unbekannt ist, welche Menge der umgebenden elastischen Flüssigkeit in jedem Querschnitte mitgerissen worden ist, und welche fortschreitende Geschwindigkeit in diesem Mantel herrscht. Auch dürfte weiter aussen die Einführung einer mittleren Geschwindigkeit im ganzen Querschnitte, rascher bewegtem Kern und langsamer strömendem Mantel, kaum mehr zulässig sein. Auf diesem Wege kann man also höchstens noch einige allgemeine Schlüsse ziehen, wie ich es damals versucht habe.

Dagegen kommt man zu weiteren Ergebnissen, wenn man zunächst bei grösserem Überdruck, als obere Grenze der Integration der Glchg. (4) den ersten Wendepunktsquerschnitt einführt, in welchem also zum ersten Mal im Strahle nach dem Verlassen der Mündungsebene die Druckausgleichung mit der Umgebung eingetreten ist. Dieser Querschnitt liegt, wie aus den Messungen namentlich von Emden folgt, stets verhältnismässig so nahe vor der Mündungsebene, dass sich auf dieser kurzen Strecke jedenfalls nur eine ungemein kleine Flüssigkeitsmenge vom Kerne des Strahles losgetrennt haben kann. Es erscheint daher zulässig, die Mantelbildung bis dorthin überhaupt angenähert unberücksichtigt zu lassen. Dann fällt der unbequeme zweite Widerstand ganz aus der Betrachtung heraus.

Der erste Widerstand, die innere Reibung, muss aussen wesentlich gleich berücksichtigt werden können, wie es innerhalb der Mündungsebene geschieht, nämlich durch passende Bestimmung des Gesetzes der Zustandsänderung. Es ist mir aber nicht gelungen, aus den allgemeinen thermodynamischen Grundformeln

ein solches Gesetz herzuleiten, so dass nichts anderes übrig bleibt, als es rein empirisch anzunehmen. Dabei scheint es berechtigt, dieses Gesetz mit Rücksicht darauf zu wählen, dass die zu entwickelnden Formeln möglichst einfach ausfallen. Und das geschieht für eine polytropische Zustandsänderung. Der Exponent der zugehörigen Gleichung müsste auf Grund von Versuchen bestimmt werden; und da er dann auch die in Gleichg. (4) schon enthaltenen Annäherungen mit ausgleichen muss, so wird es nicht ausgeschlossen sein, dass sich sein Zahlenwert vielleicht mit der Grösse des Überdruckes ändert. Jedenfalls muss er aber von dem innerhalb geltenden Exponenten  $\alpha$  verschieden sein, da die Bewegung innen und aussen unter wesentlich verschiedenen Verhältnissen vor sich geht und auch nach teilweise verschiedenen Formeln berechnet werden muss.

Hier weiche ich von Hugoniot und von Emden ab, die Beide aussen die gleiche polytropische Kurve benutzen wie innen. Dass das im Besonderen die Adiabate ist, bleibt für den vorliegenden Zweck unwesentlich. Mit dieser Annahme kommen aber Beide zu Ergebnissen, von denen einige mit den Beobachtungen im Widerspruche stehen. Auf einen solchen Widerspruch von Hugoniot habe ich schon neulich, „V.“, Seite 324 und 325, hingewiesen. Emden dagegen folgert aus seinen Rechnungen, Seite 63 seiner Habilitationsschrift, dass der Druck im ganzen Strahlquerschnitt unmittelbar nach dem Verlassen der Mündungsebene un stetig in den Druck der Umgebung übergeht, während ich ausserhalb der Mündungsebene einen gelegentlich noch bedeutenden Überdruck nachgewiesen habe und zwar mit Hilfsmitteln, die den Druck jedenfalls nicht zu gross ergeben konnten<sup>1)</sup>. Auch die vorhin erwähnten Versuche von Parenty beweisen, trotz der Unsicherheit der gefundenen Zahlenwerte, dass aussen im Strahle nicht überall der umgebende Druck herrscht.

Für die weiteren Rechnungen soll also angenommen werden, dass die Mittelwerte der Zustandsgrössen aussen nach dem Gesetze

$$(5) \quad pv^\lambda = \text{const. oder } Tp^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}} = \text{const.}$$

zusammenhängen, mit  $\lambda \neq \alpha$ .

<sup>1)</sup> „Versuche über das Ausströmen von Luft durch konisch-divergente Rohre.“ Schweiz. Bauzeitung, 1898, Bd. XXXI, Seite 68 und Fortsetzungen.

Um den dritten, durch die Ausbildung der Schallschwingungen verursachten Arbeitsverlust leichter in die Gleichg. (4) einführen zu können, ist es zweckmässig, sie vorher umzuformen. Dividiert man sie durch  $G$  und berücksichtigt die Kontinuitätsbedingung

$$(6) \quad G = Mg = \frac{Fw}{v} = \text{const.},$$

so findet man:

$$(7) \quad \frac{dw}{g} = -d\left(v \frac{p-p_a}{w}\right) - \frac{dW_r}{w}.$$

Integriert man nun diese Gleichung von der Mündungsebene mit  $p_m, v_m, w_m$  bis zum ersten Querschnitt, in welchem  $p = p_a$  geworden ist, in welchem also nach den vorigen Überlegungen angenähert die Schallgeschwindigkeit,  $c$ , herrscht, so erhält man auf der linken Seite im Zähler einfach die Differenz  $c - w_m$ . Das erste Glied rechts verschwindet an der oberen Grenze, weil dort  $p = p_a$  geworden ist, und es bleibt nur von der unteren Grenze  $+ v_m(p_m - p_a)/w_m$  übrig. Auf die Bestimmung des Integrals des letzten Gliedes endlich führt folgende Überlegung: Dieses Glied enthält nur noch die Arbeitsverluste durch Entstehung der relativen Schallschwingungen. Würden sich keine solche Schwingungen ausbilden, so würde die Schallgeschwindigkeit  $c$  schon bei einem Drucke  $p_c > p_a$  und einem zugehörigen spezifischen Volumen  $v_c < v_a$  erreicht sein, und es geht daher die ganze Zustandsänderung von  $p_c, v_c$  bis zur Druckausgleichung mit  $p_a, v_a$  für Vergrösserung der fortschreitenden Geschwindigkeit verloren. Daher muss sein:

$$(8) \quad \int \frac{dW_r}{w} = v_c \frac{p_c - p_a}{c}.$$

Hiernach wird also das Integral der Gleichg. (7):

$$(9) \quad \frac{c - w_m}{g} = v_m \frac{p_m - p_a}{w_m} - v_c \frac{p_c - p_a}{c}.$$

In dieser Gleichung müssen noch die Geschwindigkeiten und Volume durch die Pressungen ersetzt werden. Dabei will ich, zur Vereinfachung der Formelschreibung, für die allein auftretenden Pressungsquotienten kurz die Bezeichnung

$$(10) \quad \frac{p}{p_i} \equiv \varphi$$

einführen und dieses  $\varphi$  je mit dem gleichen Zeiger versehen, wie das zugehörige  $p$ . Für  $w_m$  gilt dann Gleich. (1), nur schreibt sie sich jetzt:

$$(11) \quad w_m = \sqrt{2g R T_i \frac{n}{n-1} \left(1 - \varphi_m^{\frac{n-1}{n}}\right)},$$

während  $v_m$  nach den Beziehungen auf der polytropischen Kurve wird:

$$(12) \quad v_m = v_i \varphi_m^{-\frac{1}{n}}.$$

Die Änderung der mittleren Geschwindigkeit  $w$  im Querschnitt erfolgt aussen, da dort ein Wärmeaustausch mit der Umgebung auch als nicht vorhanden angenommen wird, nach dem Gesetze, s. „V.“, Gleich. (4) bis (9):

$$(13) \quad d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\frac{nR}{n-1} dT.$$

Würden sich keine Schallwellen ausbilden, so wäre hier-nach allgemein, von der Mündungsebene ausgehend:

$$\frac{w^2 - w_m^2}{2g} = \frac{nR}{n-1} (T_m - T) = \frac{n}{n-1} R T_i \left(\frac{T_m}{T_i} - \frac{T}{T_m} \frac{T_m}{T_i}\right).$$

Ersetzt man in diesem Ausdrucke die Temperaturquotienten nach den polytropischen Zustandsänderungen durch die Pressungsquotienten  $\varphi$ , so erhält man nach einfacher Umformung:

$$(14) \quad \frac{w^2 - w_m^2}{2g} = \frac{n}{n-1} R T_i \left(\varphi_m^{\frac{n-1}{n}} - \varphi^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{n}}}\right).$$

Hieraus ergibt sich schliesslich, mit  $w_m$  aus Gleich. (11):

$$(15) \quad w = \sqrt{2g R T_i \frac{n}{n-1} \left(1 - \varphi^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{n}}}\right)}.$$

Würde man bei Abwesenheit von Schallwellen gerade die Schallgeschwindigkeit  $c$  erreichen wollen, so müsste man dem Pressungsquotienten  $\varphi$  einen Wert  $\varphi_c$  beilegen, der mit  $c$  der Gleich. (15) genügt. Es müsste also zwischen  $\varphi_c$  und  $c$  der Zusammenhang bestehen:

$$(16) \quad c = \sqrt{2g R T_i \frac{n}{n-1} \left(1 - \varphi_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\varphi_c^{\frac{1}{n}}}\right)}.$$

Für diese Schallgeschwindigkeit gilt aber ausserdem bekanntlich die allgemeine Gleichung:

$$(17) \quad c = \sqrt{-g v^2 \frac{dp}{dv}}.$$

In ihr muss der Differentialquotient  $dp/dv$  nach dem Gesetze der Zustandsänderung, also hier nach Gleichg. (5), ausgedrückt werden. Diese Gleichung giebt ihn zu  $-\lambda p/v$ , und daher wird  $c$  schliesslich, unter Einführung der  $\varphi$ :

$$(18) \quad c = \sqrt{\lambda g R T_i \varphi_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa}}.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für  $c$  aus Gleichg. (16) und (18) einander gleich, so erhält man für den Zusammenhang von  $\varphi_c$  und  $\varphi_m$ :

$$(19) \quad \varphi_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa} = \frac{2n}{2n + \lambda(n-1)}, \text{ oder}$$

$$(20) \quad \varphi_c = \left[ \frac{2n}{2n + \lambda(n-1)} \varphi_m^{\frac{1}{\kappa}} - \frac{1}{\lambda} \right]^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}.$$

Das spezifische Volumen bei  $\varphi_c$  würde sein:

$$(21) \quad v_c = \frac{v_c}{v_m} \frac{v_m}{v_i} v_i = v_i \frac{1}{\varphi_c} \varphi_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa}.$$

Alle diese Werte in (9) eingesetzt, ergibt unmittelbar:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \sqrt{\lambda g R T_i \varphi_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa}} - \frac{1}{g} \sqrt{2g R T_i \frac{n}{n-1} \left(1 - \varphi_m^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \\ &= v_i \varphi_m^{-\frac{1}{\kappa}} \frac{p_m - p_a}{\sqrt{2g R T_i \frac{n}{n-1} \left(1 - \varphi_m^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}} - \frac{v_i \varphi_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa} \left(p_c - p_a\right)}{\varphi_c \sqrt{\lambda g R T_i \varphi_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa}}}. \end{aligned}$$

Hier hebt sich zunächst  $g$  weg. Multipliziert man dann rechts in den Zählern und Nennern mit  $p_i$ , so kann man in den Zählern die Differenzen der  $\varphi$  einführen, während sich  $p_i v_i = R T_i$  ebenfalls aus der ganzen Gleichung weghebt. Ferner geht das erste Glied links mit dem letzten Gliede rechts zu vereinigen. Wenn man endlich noch die Gleichung mit der Wurzel aus  $(n-1)/2n$  multipliziert und sie auf Null bringt, so erhält man schliesslich:

$$(22) \frac{1}{\lambda} \left( \lambda + 1 - \frac{q_a}{q_c} \right) \sqrt[2n + \lambda(n-1)]{\frac{\lambda(n-1)}{2n + \lambda(n-1)}} \sqrt[1 - q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}]{1 - q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}} - \left( 1 - \frac{q_a}{q_m} \right) \frac{n-1}{2n} \frac{q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}}{\sqrt[1 - q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}]{1 - q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}}} = 0.$$

$\varphi_c$  ist aus Glchg. (20) in Funktion von  $\varphi_m$  eingesetzt zu denken, dann giebt Glchg. (22) den gesuchten Zusammenhang zwischen  $\varphi_m$  und  $\varphi_a$ , also auch zwischen  $p_m$ ,  $p_i$  und  $p_a$  für grösseren Überdruck. In Glchg. (22) ist er in eine Form gebracht, welche für Zahlenrechnungen bequemer ist.

Würde man dagegen  $c$  aus Glchg. (16) in Glchg. (9) einsetzen, so würde sich nach ähnlicher Umformung ergeben:

$$(23) \sqrt[1 - q_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda} \frac{1}{q_m^{\frac{\lambda}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa}}}]{} - \sqrt[1 - q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}]{} = \left( 1 - \frac{q_a}{q_m} \right) \frac{n-1}{2n} \frac{q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}}{\sqrt[1 - q_m^{\frac{n-1}{\lambda}}]{}}$$

$$- \left( 1 - \frac{q_a}{q_m} \right) \frac{n-1}{2n} \frac{q_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda} \frac{1}{q_m^{\frac{\lambda}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa}}}}{\sqrt[1 - q_c^{\frac{\lambda-1}{\lambda} \frac{1}{q_m^{\frac{\lambda}{\lambda}} - \frac{1}{\kappa}}}]{}},$$

und aus dieser Form ist sofort ersichtlich, dass für  $\lambda = \kappa$  die Potenz von  $q_m$  als Faktor der Potenz von  $q_c$  verschwindet, und dass dann der Gleichung durch  $q_m = q_c$  oder  $p_m = p_c$  genügt wird. Setzt man also aussen und innen die gleiche Zustandsänderung voraus, so findet man, dass die Schallgeschwindigkeit schon in der Mündungsebene auftreten müsste, während sie thatsächlich erst in einem weiter aussen liegenden Querschnitte zwischen der Mündungsebene und dem ersten Bauch erreicht wird. Es musste also  $\lambda$  von  $\kappa$  verschieden eingeführt werden.

Bei kleinerem Überdrucke, durch den die Schallgeschwindigkeit überhaupt nicht mehr erzeugt werden kann, entstehen im ausgetretenen Strahl auch keine Schallwellen, wie die Versuche mit Belichtung gezeigt haben. Folglich fällt auch der daher rührende Widerstand weg. Da jetzt der in der Mündungsebene noch vorhandene Überdruck bedeutend kleiner ist, als vorhin, so wird man annehmen dürfen und müssen, dass die Druckausgleichung mit der Umgebung hier eher noch rascher eintreten wird als vorhin, dass also der Arbeitsverlust durch Mischung mit der äusseren Flüssigkeit erst recht genügend klein bleibt, um hier ebenfalls vernachlässigt werden zu dürfen.

Es ist daher nur der Arbeitsverlust durch innere Reibung zu berücksichtigen. Dieser wird hier am einfachsten ebenso eingeführt, wie vorhin, durch Annahme einer polytropischen Zustandsänderung. Nur wird der Exponent in der zugehörigen Gleichung vielleicht einen anderen Wert erhalten müssen, und er soll daher gleich mit  $\mu$  bezeichnet werden.

In dem ersten Querschnitt, in welchem die Druckausgleichung eingetreten ist, hat das Pressungsverhältnis  $\varphi$  den Wert  $\varphi_a$  erreicht. Die zugehörige mittlere Geschwindigkeit,  $w_a$ , berechnet sich dann nach Gleichg. (15), nur mit  $\varphi_a$  statt  $\varphi$  und mit  $\mu$  statt  $\lambda$ . Sie wird daher:

$$(24) \quad w_a = \sqrt{2gR T_i \frac{n}{n-1} \left( 1 - \varphi_a^{\frac{\mu-1}{\mu}} \varphi_m^{\frac{1}{\mu}} - \frac{1}{n} \right)}.$$

Gleichg. (7) gilt hier auch, sie vereinfacht sich aber, weil  $dW_p$  verschwindet. Integriert man sie von der Mündungsebene bis zum ersten Querschnitte der Druckausgleichung, wo  $p = p_a$  ist, so erhält man den einfacheren Ausdruck

$$(25) \quad \frac{w_a - w_m}{g} = v_m \frac{p_m - p_a}{w_m}.$$

Eine ähnliche Umformung, wie von Gleichg. (9) zu Gleichg. (22), liefert hieraus für den Zusammenhang zwischen  $\varphi_m$  und  $\varphi_a$  bei kleinem Überdrucke die Gleichung:

$$(26) \quad \sqrt{1 - \frac{\mu-1}{\varphi_a^{\frac{1}{\mu}}} \varphi_m^{\frac{1}{\mu}} - \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{n-1}{\varphi_m^{\frac{n-1}{n}}} - \left( 1 - \frac{q_a}{q_m} \right) \frac{n-1}{2n} \frac{\varphi_m^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{1 - \varphi_m^{\frac{n-1}{n}}}}} = 0.$$

Die in den vorstehenden Formeln auftretenden Exponenten  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  müssen aus Versuchen bestimmt werden. Dazu stehen mir nur meine eigenen, oben erwähnten Versuche mit gut abgerundeten Mündungen zur Verfügung. Aus diesen hatte ich schon damals eine empirische Formel für den Zusammenhang zwischen den Pressungsverhältnissen  $\varphi_m$  und  $\varphi_a$  hergeleitet, s. „C.“, Seite 462, Gleichg. (1), weil aus den Versuchen hervorging, dass es dabei nur auf diese Verhältnisse ankommt, aber nicht auf den Zahlenwert der Pressungen selbst, ein Ergebnis, das durch die obigen Entwicklungen durchaus bestätigt wird. Die Gestalt

dieser Formel und namentlich die Zahlenwerte der darin auftretenden Konstanten waren, im Anschluss an die gebräuchlichen Anschauungen, unter der Voraussetzung bestimmt, dass derjenige Grenzdruck, der die Ausflussmenge  $G$  nach Gleichg. (2) zu einem Maximum macht, in der Mündungsebene erst beim Ausströmen in einen vollkommen leeren Raum, dann aber auch wirklich erreicht wird. Damit die Formel für  $\varphi_m = f(\varphi_a)$  die Versuche nicht nur über die Pressungen, sondern auch über die Ausflussmengen möglichst gut wiedergab, musste ich den Exponenten der polytropischen Kurve innen  $\alpha = 1,37$  wählen, trotzdem die Grenzwerte von  $\varphi_m$  und  $G$ , oder  $\psi$  nach Gleichg. (3), beide gegenüber den Versuchen eher etwas zu gross ausfielen. Sie ändern sich aber beide im entgegengesetzten Sinne, wenn  $\alpha$  einen anderen Wert erhält, und es war daher keine wesentlich bessere Übereinstimmung erreichbar.

Es fragt sich aber, ob diese Auffassung jetzt noch beizubehalten geht.

Für die Bewegung vom Inneren des Gefässes bis zur Mündungsebene sind bei den vorstehenden Entwicklungen nur Widerstände berücksichtigt worden. Dabei entspricht die polytropische Zustandsänderung  $p v^\alpha = \text{const.}$  einer durch Reibung erzeugten, stets mitgeteilten Wärmemenge vom Betrage:

$$(27) \quad dQ_r = -r c_v dT, \text{ mit } r = \text{const. und } > 0.$$

Bei einfachen Gefässmündungen bleibt ununterbrochen  $dT < 0$ , und ich habe daher rechts gleich das negative Vorzeichen hinzugefügt, damit  $r$  eine wesentlich positive Grösse wird. Thatsächlich findet aber auch ein gewisser Wärmeaustausch mit den Mündungswandungen statt, den man ebenfalls proportional der Temperaturänderung annehmen kann. Bei den einfachen Gefässmündungen handelt es sich dabei stets um eine Wärmeaufnahme, und es soll daher diese Wärmemenge auch in der Form:

$$(28) \quad dQ = -m c_v dT, \text{ mit } m = \text{const. und } > 0$$

eingeführt werden. Die Zustandsänderung bleibt dabei polytropisch, nur mit

$$(29) \quad \alpha = \frac{c_p + m c_v + r c_v}{c_v + m c_v + r c_v} = \frac{n + m + r}{1 + m + r},$$

die Formeln (1) und (2) ändern sich dagegen, gleich mit  $\varphi$  nach Gleichg. (10), in:

$$(30) \quad w_m = \sqrt{2g R T_i \frac{n+m}{n-1} \left(1 - \varphi_m^{\frac{n-1}{n}}\right)},$$

$$(31) \quad G = F p_i \sqrt{\frac{2g}{R T_i} \frac{n+m}{n-1} \left(\varphi_m^{\frac{2}{n}} - \varphi_m^{\frac{n+1}{n}}\right)}.$$

$G$  nimmt hier, wie immer, einen grössten Wert an für:

$$(32) \quad \varphi_m \equiv \alpha = \left(\frac{2}{z+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Berechnet man den zugehörigen Wert von  $w_m \equiv w_\alpha$  nach Gleichg. (30), so erhält man:

$$(33) \quad w_\alpha = \sqrt{2g R T_i \frac{n+m}{n-1} \frac{z-1}{z+1}}.$$

Wegen der polytropischen Zustandsänderung ist nun, mit (32):

$$(34) \quad T_i = T_m \left(\frac{p_i}{p_m}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{z+1}{2} T_m.$$

Führt man dieses  $T_i$  in Gleichg. (33) ein und ersetzt dann das im Zähler noch stehen bleibende  $z$  nach Gleichg. (29), so erhält man schliesslich die Grenzgeschwindigkeit  $w_\alpha$  in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur  $T_m$  in der Mündungsebene zu:

$$(35) \quad w_\alpha = \sqrt{\frac{n+m}{1+m+r} g R T_m}.$$

Bei einer polytropischen Zustandsänderung nach  $p v^n = \text{const.}$  wird dagegen die der Temperatur  $T_m$  entsprechende Schallgeschwindigkeit, vergl. Gleichg. (17) und (29):

$$(36) \quad c = \sqrt{\kappa g R T_m} = \sqrt{\frac{n+m+r}{1+m+r} g R T_m}.$$

Diese Berechnung der Schallgeschwindigkeit erscheint zulässig, weil ausdrücklich angenommen wurde, dass die Temperatur vom Inneren des Gefässes bis zur Mündungsebene ununterbrochen abnimmt. Aus demselben Grunde durfte auch vorhin aussen für  $c$  auf dem gleichen Wege Gleichg. (18) hergeleitet werden, weil von der Mündungsebene bis zum ersten Querschnitt, in dem  $c$  auftritt, der Druck und daher auch die Temperatur ununterbrochen weiter

sinken. Würde es sich dagegen darum handeln, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen in einem Gase zu bestimmen, das selbst durch ein Rohr strömt, so müsste man teilweise anders vorgehen. Die Widerstände und ein Wärmeaustausch mit der Umgebung dürften dann nicht mehr ohne weiteres nach den Gleichungen (27) und (28) eingeführt werden, denn dann würde in den Schallwellen die Temperatur im allgemeinen abwechselnd abnehmen und wieder wachsen; für  $dQ_r$  müsste also ein ganz anderes Gesetz gesucht werden, das unabhängig vom Sinne der Temperaturänderung  $dQ_r$  ununterbrochen positiv ergibt. Dasselbe würde auch vom äusseren Wärmeaustausche  $dQ$  gelten, wenn die Temperatur im Rohre von der Temperatur der Umgebung ununterbrochen im gleichen Sinne abweicht. Solche Gesetze würden aber nicht mehr so einfach gestaltet sein, und sie würden daher auch verwickeltere Ausflussformeln ergeben.

Aus den beiden letzten Gleichn. (35) und (36) folgt nun, dass der Grenzdruck, welcher die Ausflussmenge zu einem Maximum macht, in der Mündungsebene eine Geschwindigkeit erzeugt, die kleiner bleibt, als die zur dortigen Temperatur gehörige Schallgeschwindigkeit. Sonst nimmt man allgemein an, das Maximum der Ausflussmenge werde stets mit der Schallgeschwindigkeit erreicht. Die Gleichn. (35) und (36) lassen aber erkennen, dass das nur möglich wäre für

$$r = 0,$$

also für eine widerstandslose Bewegung, während ein äusserer Wärmeaustausch auf diese Verhältnisse keinen Einfluss ausübt.

Da nun bei einer Bewegung stets Widerstände auftreten, so bestätigen diese Rechnungen die Ergebnisse der Belichtungsversuche, dass die Geschwindigkeit in der Mündungsebene jedenfalls kleiner bleibt als die Schallgeschwindigkeit, und dass die Schallgeschwindigkeit selbst bei genügend grossem Überdrucke erst ausserhalb der Mündungsebene erreicht werden kann.

Ob aber der Druck, der sich dann in der Mündungsebene einstellt, den Grenzwert der Gleichg. (32) wirklich erreicht oder mit ihm überhaupt zusammenhängt, lässt sich aus den Formeln nicht mit Sicherheit entscheiden. Da aber zwischen den drei Pressungen  $p_i$  innen,  $p_m$  in der Mündungsebene und  $p_a$  aussen

jedenfalls ein Zusammenhang nach Art der Glchg. (22) besteht, so wäre  $p_m$  durch eine weitere, aus Glchg. (2) hergeleitete Bedingung eigentlich überstimmt. Aus Glchg. (22) würde dann  $p_m$  ganz fortfallen und diese Gleichung einen bestimmten Zusammenhang zwischen  $p_i$  und  $p_a$  ergeben, während diese beiden Pressungen thatsächlich gegenseitig ganz unabhängig sind. Es scheint daher doch meine ältere Ansicht<sup>1)</sup>, der auch Grashof beipflichtet<sup>2)</sup>, die richtige zu sein, dass der Grenzwert des Druckes in der Mündungsebene mit dem Maximum der Ausflussmenge in keiner Beziehung steht.

Eine endgültige Entscheidung dieser Frage ginge nur durch Versuche zu treffen, aber meine eigenen besitzen die dazu nötige Genauigkeit nicht. Ich konnte nämlich die Druckbeobachtungen nur bei abnehmendem Drucke vornehmen, und dabei störte es, dass die verschiedenen gleichzeitig benutzten Manometer verschiedene Trägheit besaßen. Durch Vertauschung der Manometer bei den verschiedenen Versuchsreihen habe ich allerdings diesen Einfluss möglichst unschädlich zu machen gesucht. Ausserdem waren aber noch zwei weitere, im gegenseitig entgegengesetzten Sinne wirkende Störungen vorhanden. Beobachtet ist nämlich eigentlich gar nicht der Druck in der Mündungsebene selbst, sondern der in einem zwar möglichst nahe daran, aber doch innerhalb gelegenen Querschnitte, wo ein entsprechend etwas grösserer Druck herrscht. Dagegen wird er umgekehrt durch etwaige Verletzungen der Mündungskante verkleinert. In dieser Richtung zeigte sich sogar gewöhnlich ein Saugen, wenn der Arbeiter die Mündung nach der Bearbeitung mit dem Drehstahle noch mit einem eingeführten Holzstabe poliert hatte. Es scheint also namentlich eine Verletzung der Mündungskante von Einfluss zu sein, und da eine solche kaum jemals ganz vermieden werden kann, so werden die kleineren beobachteten Werte von  $\varphi_m$  als weniger zuverlässig angesehen werden müssen. Zur Bestimmung von  $\alpha$  für die folgenden Rechnungen habe ich mich daher mehr an die grösseren Werte gehalten, wobei allerdings eine willkürlichere Einschätzung nicht umgangen werden konnte.

<sup>1)</sup> S. Civilingenieur, 1874, Bd. XX, Seite 26, oben.

<sup>2)</sup> Theoretische Maschinenlehre, Bd. I, Seite 580, letzter Absatz von § 102.

Nach den vorigen Überlegungen scheint der Grenzwert von  $p_m$  und  $\varphi_m$  mit dem Maximum von  $\psi$  in keinem Zusammenhange zu stehen. Es erscheint aber auch widersinnig, anzunehmen, dass  $\psi$  mit abnehmendem Werte von  $\varphi_a$  nach Überschreiten seines Maximums wieder abnehmen sollte.  $\alpha$  muss also so gewählt werden, dass der Wert von  $\psi$  ununterbrochen innerhalb seines Maximums bleibt, und dazu ist nötig, dass  $\varphi_m$  den Grenzwert  $\alpha$ , Glchg. (32), nicht nur nicht unterschreitet, sondern sogar nicht einmal erreicht. Um das zu sichern, musste ich den Wert von  $\alpha$  kleiner einführen, als früher, was einen grösseren Wert des Exponenten  $\alpha$  erforderte. Ich habe daher hier nicht mit  $\alpha = 1,37$  gerechnet, sondern habe schätzungsweise

$$(37) \quad \alpha = 1,38$$

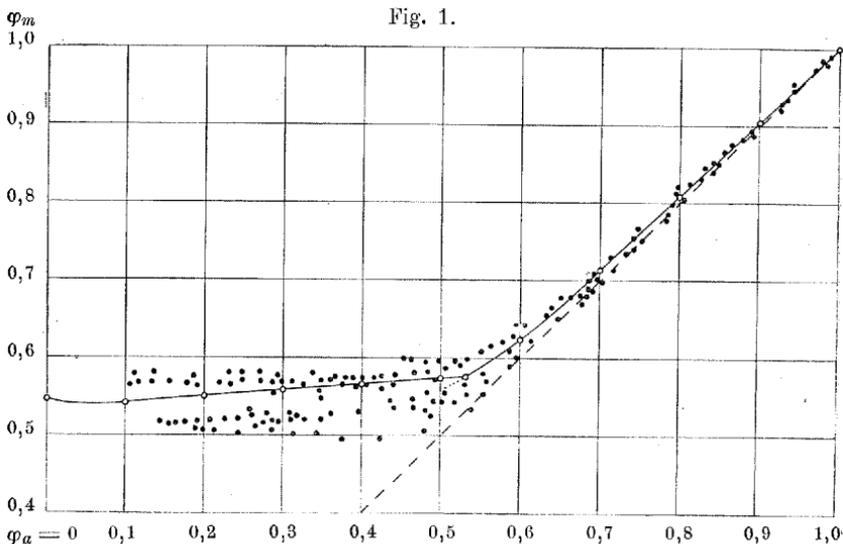
gewählt, ohne aber damit behaupten zu wollen, dass das auch der richtige Wert sei. Der geht aus den vorliegenden Versuchen noch gar nicht zu bestimmen.

Den zweiten Exponenten  $\lambda$ , der bei grösserem Überdrucke für die polytropische Zustandsänderung aussen gilt, wollte ich zuerst auf seinem ganzen Gebiete konstant einführen. Das zeigte sich aber unzulässig, weil sich dabei die Kurve  $\varphi_m = f(\varphi_a)$  als eine gekrümmte Linie mit einem Maximum ergab. Ich musste also  $\lambda$  veränderlich zulassen, und habe, nach einigen weiteren Versuchen, dafür das rein empirische Gesetz:

$$(38) \quad \lambda = 1,593 - 0,2117 \sqrt[4]{\varphi_a}$$

aufgestellt und bei den weiteren Rechnungen benutzt. Dieses Gesetz kann allerdings auch nicht richtig sein, weil die damit gefundene Kurve für  $\varphi_m$  zwischen  $\varphi_a = 0$  und  $\varphi_a = 0,1$  umgekehrt ein Minimum besitzt. Dagegen wächst  $\varphi_m$  auf dem durch die Versuche gedeckten Gebiet, also von  $\varphi_a \approx 0,1$  bis  $\varphi_a > 0,5$  stetig, wie es von vorneherein und auf Grund der Beobachtungen erwartet werden muss. Die mit Glchg. (38) erhaltene Kurve  $\varphi_m = f(\varphi_a)$  habe ich in Fig. 1 eingezeichnet und zur Vergleichung in den kleinen Punkten die beobachteten Werte von  $\varphi_m$  nach „C.“, „Versuche über Pressungen“, hinzugefügt, soweit diese Punkte neben einander Platz hatten. Die Auswahl habe ich so getroffen, dass ich nur zwischenliegende Punkte weggelassen habe. Immerhin

giebt die Darstellung insofern kein ganz richtiges Bild der Versuchsergebnisse, als die so ausgewählten Punkte nicht mehr alle das gleiche Gewicht besitzen.



Um eine bessere Übereinstimmung der berechneten Werte von  $\varphi_m$  mit den beobachteten zu erhalten, müsste man für  $\lambda$  ein verwickelteres Gesetz annehmen. Dabei ist es selbstverständlich, dass man jeden beliebigen Grad der Übereinstimmung erreichen kann, wenn man nur in dem Ausdrucke für  $\lambda$  eine genügende Anzahl von Konstanten zur Verfügung stellt. Das Ausprobieren eines solchen Gesetzes erfordert aber äusserst zeitraubende Zahlenrechnungen, weil die Gleichungen transcendent sind, und doch würde der schliesslich für  $\lambda$  gefundene Ausdruck rein empirischen Charakter beibehalten. Da ausserdem die experimentelle Grundlage noch recht unsicher ist, habe ich keine weiteren Versuche in dieser Richtung angestellt.

Aus der für kleinen Überdruck geltenden Gleichg. (26) ist sofort ersichtlich, dass  $\varphi_m = \varphi_a$  eine Lösung wäre, denn dann verschwände das dritte Glied ganz, und im ersten fielen der Exponent  $\mu$  weg, so dass es dem zweiten Gliede gleich werden würde. Dem Exponenten  $\mu$  selbst könnte man dabei noch jeden beliebigen Wert beilegen. Die Gleichheit von  $\varphi_m$  mit  $\varphi_a$  wird aber durch

die Versuche nicht bestätigt, und man muss daher eine zweite Lösung der Gleichg. (26) suchen, die dann von  $\mu$  abhängig zu erwarten sein wird. Und eine solche giebt es in der That.

Eine Vergleichung mit den Versuchen hat nun gezeigt, dass der Exponent  $\mu$  auf seinem ganzen Gebiete allenfalls konstant angenommen werden dürfte. Man erhält aber doch eine bessere Übereinstimmung, wenn man

$$(39) \quad \mu = 1,407 + 0,011 \varphi_a$$

setzt. Die hiermit nach Gleichg. (26) gefundene Kurve  $\varphi_m = f(\varphi_a)$  ist in Fig. 1 ebenfalls eingetragen. Hinzugefügt ist noch die unter  $45^\circ$  geneigte, gestrichelte Gerade, in der die Punkte  $\varphi_m = \varphi_a$  liegen würden.

Der Übergang von den für grossen zu den für kleinen Überdruck geltenden Formeln muss vorgenommen werden, wenn

$$(40) \quad \varphi_c = \varphi_a$$

ausfällt. Dann wird in Gleichg. (22) der Faktor der ersten Wurzel der Einheit gleich. Führt man ausserdem unter dieser Wurzel nach Gleichg. (20)  $\varphi_c$ , also hier auch  $\varphi_a$  ein, so ergibt sich, unter Benutzung der gleichzeitig geltenden Gleichg. (26), zur Berechnung des Übergangspunktes die Doppelgleichung:

$$(41) \quad \sqrt{1 - \varphi_a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \varphi_m^{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}}} = \sqrt{1 - \varphi_a^{\frac{\mu-1}{\mu}} \varphi_m^{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}}}$$

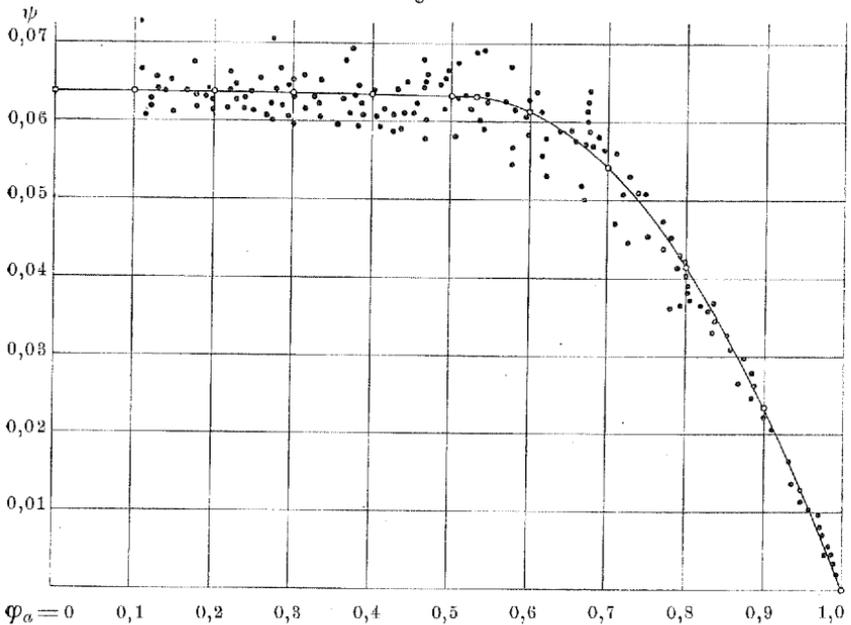
$$= \sqrt{1 - \varphi_m^{\frac{\mu-1}{\lambda}}} + \left(1 - \frac{\varphi_a}{\varphi_m}\right) \frac{\mu-1}{2\mu} \frac{\varphi_m^{\frac{1}{\mu}}}{\sqrt{1 - \varphi_m^{\frac{\mu-1}{\lambda}}}}$$

Die erste dieser Doppelgleichungen wird befriedigt durch  $\mu = \lambda$ . Wenn man aber das zugehörige  $\varphi_a = \varphi_c$  aus den Gleichn. (38) und (39) bestimmt und dafür dann  $\varphi_m$  aus Gleichg. (20) oder (19) berechnet, so findet man  $\varphi_m > 0,9$ , also einen unmöglichen Wert. Es muss also noch eine andere Lösung mit  $\mu \geq \lambda$  vorhanden sein, die sich jedoch nur durch umständliches Probieren finden liesse. Ich habe mich daher damit begnügt, den Schnittpunkt nur auf zeichnerischem Wege zu bestimmen. Zu diesem Zwecke habe ich die Kurve für kleinen Überdruck noch bis  $\varphi_a = 0,5$  berechnet, den für grossen Überdruck geltenden Ast dagegen nur einfach

stetig etwas verlängert. Dieser Ast verläuft nämlich bei dem angenommenen Gesetze für  $\lambda$  zwischen  $\varphi_a = 0,5$  und  $0,6$ , S-förmig gekrümmt, wieder nach abwärts.

Soweit die Werte von  $\lambda$  und  $\mu$  benutzt werden, bleiben sie grösser als  $n$ , das seinerseits hier, wie früher, mit  $1,41$  eingeführt ist. Infolge der doch vorhandenen Widerstände sollte man aber eigentlich beide Exponenten kleiner als  $n$  erwarten. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich leicht dadurch, dass in  $\lambda$  und  $\mu$  nicht nur die Widerstände berücksichtigt sind; diese Grössen müssen vielmehr auch die der ganzen Formelentwicklung zu Grunde liegenden Annäherungen ausgleichen.

Fig. 2.



Für die so gefundenen Werte von  $\varphi_m$  habe ich dann noch die mit der Ausflussmenge zusammenhängenden Werte von  $\psi$ , Gleich. (3), berechnet, die dadurch erhaltene Kurve  $\psi = f(\varphi_a)$  in Fig. 2 aufgetragen, und die aus den Beobachtungen, „C.“, „Versuche über Ausflussmengen“, hergeleiteten Punkte hinzugefügt, so weit diese aufgenommen werden konnten. Hier stimmt die Rechnung besser mit den Versuchen überein, als bei den Pressungen,

weil sich, namentlich bei grossem Überdrucke, die Ausflussmenge mit  $\varphi_a$  verhältnismässig viel langsamer ändert, als der Druck in der Mündungsebene. Während ich früher bei Aufstellung meiner empirischen Formel für  $\varphi_m$  angenommen hatte, dass sich dieser Wert und ebenso der Wert von  $\psi$  mit  $\varphi_a$  stetig änderten, würde aus der jetzigen Entwicklung wieder eine Unstetigkeit folgen. Und diese entspricht auch jedenfalls besser dem plötzlichen Auftreten der relativen Schallwellen bei genügend grossem Überdrucke.

$\varphi_a$	$\varphi_m$	$\varphi_c$	$\psi$
0,0	(0,5452)	(0,4879)	(0,06386)
0,1	0,5412	0,5050	0,06389
0,2	0,5498	0,5045	0,06382
0,3	0,5583	0,5072	0,06371
0,4	0,5663	0,5092	0,06357
0,5	0,5743	0,5108	0,06340
0,6	0,6240	—	0,06148
0,7	0,7148	—	0,05428
0,8	0,8095	—	0,04162
0,9	0,9048	—	0,02350
1,0	1	—	0

In der vorstehenden Tabelle habe ich noch die berechneten Werte von  $\varphi_m$  und  $\psi$  zusammengestellt und für grösseren Überdruck auch die Werte von  $\varphi_c$  hinzugefügt.

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass es für die Zustandsänderung im freien Strahl aussen ein Gesetz giebt, das, wenigstens je auf der Hälfte des ganzen Gebietes, mit unveränderten Konstanten gilt. Das Aufsuchen eines solchen, doch rein empirischen Gesetzes würde aber ungemein umfangreiche Proberechnungen erfordern, und dabei würde voraussichtlich eine noch bedeutend unbequemere Formel für den Druck in der Mündungsebene herauskommen. Führt doch schon die Annahme eines Wärmeaustausches mit der Umgebung, der natürlich innen und aussen verschieden vorausgesetzt werden müsste, auf bedeutend verwickeltere Ausdrücke. Ich habe daher weitere Versuche in dieser Richtung für zwecklos gehalten. Die vorstehende Untersuchung sollte nament-

lich nur zeigen, dass in der That ein bestimmter Zusammenhang zwischen den drei Pressungen  $p_i$ ,  $p_m$  und  $p_a$  besteht, und wie man im wesentlichen bei seiner genaueren Berechnung vorgehen müsste. Bei den Anwendungen wird man sich dagegen mit einer einfacheren, empirischen Formel begnügen, wenn man es nicht vorzieht, der noch einfacheren Annäherung von de Saint-Venant und Wantzel zu folgen, wonach für grösseren Überdruck  $\varphi_m = \varphi_c$  oder auch  $= \alpha$ , für kleineren  $\varphi_m = \varphi_a$  angenommen werden darf.

Zürich, Oktober 1901.

---