Beitrag zur Theorie des Ausströmens der elastischen Flüssigkeiten.

Von

A. Fliegner.

Zur Herleitung der Formeln für das Ausströmen der elastischen Flüssigkeiten aus Gefässmündungen muss man von der ersten Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie in der allgemeinsten Gestalt:

$$dQ = A(dU + dW + dN) \tag{1}$$

ausgehen. Darin bedeutet wie üblich,

- A das kalorische Aequivalent der Arbeitseinheit,
- dQ die Wärmemenge, die jedem durchströmenden Kilogramm auf einer unendlich kurzen Strecke der Bahn mitgeteilt wird,
- dU die Aenderung der inneren Arbeit des Kilogrammes auf derselben Strecke,
- dW die dabei von ihm verrichtete äussere Arbeit und
- dN die gleichzeitige Aenderung der angehäuften Arbeit der fortschreitenden Bewegung für jedes Kilogramm, oder, wie sie Zeuner neuerdings nennt, der Strömungsenergie.

Die drei letzten Grössen lassen sich nur dann genau ausdrücken, wenn man einige vereinfachende Annahmen zulässt. Man muss nämlich zunächst voraussetzen, dass in jedem ebenen Querschnitte der Zustand der Flüssigkeit, also der Druck p, das specifische Volumen v, die Temperatur T und die Geschwindigkeit w an allen Stellen die gleichen seien. Damit der Druck p dabei jeden beliebigen Wert annehmen kann, muss man ferner voraussetzen, dass die Bewegung in einem Rohre vor sich gehe, so dass der Flüssigkeitsstrahl stets allseitig von festen Wandungen umgeben ist. Schliesslich muss man noch annehmen, dass eine etwaige Änderung des Rohrquerschnittes, namentlich eine Zunahme, eigentlich unendlich langsam erfolge, damit keine radialen Geschwindigkeitskomponenten vorhanden sind.

Die Aenderung der inneren Arbeit, $d\,U$, lässt sich allerdings auch so nicht allgemein ausdrücken, da U von der Art des Körpers abhängt.

Die äussere Arbeit, $d\,W$, dagegen ist bei Bewegung eine Verdrängungsarbeit und beträgt:

$$d\,W = d\,(p\,v). \tag{2}$$

Sie wirkt nur in der Richtung von w und beschleunigt die Flüssigkeitsteilchen, welche die betrachtete Elementarstrecke schon durchströmt haben.

Die Aenderung der angehäuften Arbeit der offenen Bewegung endlich wird für jedes durchgeströmte Kilogramm:

$$d\,N = d\left(\frac{w^2}{2\,g}\right). \tag{3}$$

Setzt man die Werte aus Gleichung (2) und (3) in (1) ein, so folgt als Grundgleichung für die Bewegung der elastischen Flüssigkeiten:

$$d\,Q = A\left[d\,U + d\,(p\,v) + d\left(\frac{w^2}{2\,g}\right)\right]. \tag{4}$$

Diese Gleichung ergab sich aus der Untersuchung der Vorgänge beim Durchströmen eines Kilogrammes der Flüssigkeit durch ein Längenelement des Rohres.

Betrachtet man dagegen ein Flüssigkeitselement auf seinem Wege durch das Rohr, so hat es nach den gemachten Annahmen neben sich andere Elemente von je gleicher Pressung, während die vor ihm und hinter ihm befindlichen Elemente unter einem nur unendlich wenig verschiedenen Drucke stehen. Das Element macht also gegenüber seiner fortschreitenden Bewegung eine gewöhnliche umkehrbare, statische Zustandsänderung durch, für welche die Beziehung besteht:

$$d\,Q = A\,(d\,U + p\,d\,v). \tag{5}$$

Ausserdem gilt noch die Kontinuitätsgleichung, wonach durch jeden Querschnitt F in jeder Sekunde das gleiche Flüssigkeitsgewicht G oder die gleiche Masse M durchströmt, und zwar ist

$$G = M g = \frac{F w}{v} = \text{const.} \tag{6}$$

Diese Gleichungen sollen hier nur auf vollkommene Gase angewendet und dabei zur Vereinfachung zunächst vorausgesetzt werden, dass eine widerstandslose Bewegung ohne äusseren Wärmeaustausch vorliege. Dann ist

$$d U = \frac{d(p v)}{n-1} = \frac{R}{n-1} d T, \tag{7}$$

wo n den Quotienten der beiden specifischen Wärmen bei konstantem Drucke und konstantem Volumen, R die Konstante der Zustandsgleichung bedeuten. Ferner ist dann

$$d Q = 0, \tag{8}$$

und damit folgt aus (4)

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\frac{n}{n-1} d(p v) = -\frac{n R}{n-1} d T. \tag{9}$$

Die statische Zustandsänderung des Gases wird wegen (8) adiabatisch, folgt also dem Gesetze:

$$p v^n = \text{const.} \tag{10}$$

Integriert man (9) vom Inneren des Gefässes mit $w_i = 0, p_i, v_i, T_i$ bis zu einem beliebigen Querschnitte F mit w, p, v, T, so wird:

$$w = \sqrt{2 g R T_i \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{T}{T_i}\right)} = \sqrt{2 g R T_i \frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}, \tag{11}$$

während aus (6) mit (10) und (11) folgt:

$$G = F p_i \sqrt{\frac{2g}{R T_i}\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}. \tag{12}$$

Allerdings gilt die Kontinuitätsgleichung in der einfachen Gestalt der Gleichung (6) nicht auf der ganzen Strecke vom Inneren des Ausflussgefässes bis zum allgemeinen Querschnitte F, da beim Anschlusse des Rohres an die Gefässwand stets konvergierende Geschwindigkeitsrichtungen mit bedeutenden radialen Geschwindigkeitskomponenten auftreten. Genügt aber weiter aussen der Querschnitt F der Bedingung, dass seine Aenderung nur noch sehr langsam erfolgt, so ist der Einfluss der radialen Geschwindigkeitskomponenten bis dorthin verschwunden, und die Glchgn. (11) und (12) dürfen doch angewendet werden.

Diese beiden Gleichungen werden nun gewöhnlich als die Ausflussformeln angesehen. Eigentlich sind sie das aber nicht. Ihrer Entstehung nach geben sie vielmehr nur den Zusammenhang zwischen F, w, p, T in einem Rohre und den Werten p_i und T_i im Inneren eines unendlich grossen Gefässes. Sie stellen auch noch einen vollkommen umkehrbaren Vorgang dar, da man in allen benutzten Differentialgleichungen die Vorzeichen sämtlicher Glieder gleichzeitig ändern kann, ohne dass die Gleichungen dadurch ihre Geltung verlieren, nur muss man den Sinn von w mit geändert denken. Das widerstandslose Ausströmen ist auch, so weit es sich nur um die Bewegung als solche handelt, wesentlich umkehrbar. Nicht umkehrbar wird der ganze Vorgang erst, wenn man seine Ursache, den Druckunterschied zwischen innen und aussen, mit in Betracht zieht. Ausserdem kann allerdings auch eine raschere Zunahme des Rohrquerschnittes im Sinne der Bewegung eine Nichtumkehrbarkeit veranlassen, wenn sich dabei der Flüssigkeitsstrahl von den Rohrwandungen loslöst. Bei der Formelentwickelung ist das aber ausdrücklich als ausgeschlossen vorausgesetzt worden.

Die Gleichungen (11) und (12) werden erst dadurch zu Ausflussformeln, dass man für die Temperatur T und für den Druck p die in der Mündungsebene geltenden Werte T_m und p_m einsetzt. Bei Mündungen mit Kontraktion nimmt man statt der Mündungsebene gewöhnlich, wie bei Wasser, den Querschnitt an der Stelle der stärksten Kontraktion. Das ist aber eigentlich unrichtig, da die Gleichungen gar nicht bis zu diesem Querschnitte gelten. Nach dem Verlassen der Mündungsebene ist der Vorgang sofort nicht umkehrbar, so dass die Zustandsänderung nicht mehr nach dem Gesetze $p v^n =$ const. erfolgt.

Welche Werte man nun für T_m und p_m annehmen soll und wie sie mit dem Zustande im Inneren des Gefässes und mit dem äusseren Drucke zusammenhängen, das zu entscheiden bieten die Formeln keinerlei Anhaltspunkte. Man kann nur die Erwartung aussprechen, dass der Quotient p_m/p_i nicht unter den Wert

$$\frac{p_m}{p_i} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \equiv \alpha \tag{13}$$

sinken wird, weil dieser Wert G aus (12) zu einem Maximum macht und nicht anzunehmen ist, dass die Ausflussmenge mit stetig wachsendem Ueberdrucke schliesslich wieder abnehmen sollte.

Gewöhnlich wird es nun als ziemlich selbstverständlich angesehen, dass, wenn p_a den äusseren Druck bezeichnet, für

$$\begin{cases} p_a > \alpha\, p_i: & p_m = p_a \\ p_a < \alpha\, p_i: & p_m = \alpha\, p_i \end{cases} \tag{14}$$

gesetzt werden dürfe und müsse. Häufig findet sich auch die Behauptung ausgesprochen, dieses Verhalten von p_m sei durch Versuche über Ausflussmengen bewiesen. Damit ist aber, meiner Ansicht nach, doch die Bedeutung solcher Versuche überschätzt. Ich will in dieser Richtung nur die neueste, mir bekannte Versuchsreihe kurz besprechen, die von Parenty in den Annales de Chimie et de Physique, Ser. 7, Tom 8, 1896, Seite 5—79 veröffentlicht worden ist. Dabei wurde mit Mündungen in dünner Wand und konvergenten Ansatzrohren gearbeitet, mit gleichen Mündungen, wie sie früher schon von Hirn untersucht worden waren [1]). Die Ergebnisse dieser Versuche hat Parenty auf Seite 57 und 61 graphisch dargestellt, und zwar die Ausflussmengen in Funktion des Quotienten: Ueberdruck $p_i - p_a$ dividiert durch den inneren Druck p_i. Von den vier gezeichneten Figuren bestätigt die rechte auf Seite 61 scheinbar die Konstanz des Quotienten p_m/p_i bei grösserem Ueberdrucke, weil dort alle gefundenen Punkte in der gleichen Horizontalen liegen. Die rechte Figur auf Seite 57 hat für $p_a < \alpha\, p_i$ 5 über das ganze Gebiet ziemlich gleichmässig verteilte Punkte, von denen die 3 näher an der Grenze $p_a = \alpha\, p_i$ befindlichen allerdings auch fast genau in einer Horizontalen liegen; die beiden übrigen, grösserem Ueberdrucke entsprechenden Punkte liegen dagegen entschieden höher, als die vorigen. Man müsste also aus dieser Figur unbedingt auf eine Zunahme der Ausflussmenge mit zunehmendem Ueberdrucke schliessen. In den

[1]) Annales de Chimie et de Physique. März 1886.

beiden linken Figuren auf Seite 57 und 61 sind nur je so wenig Punkte in unmittelbarer Nähe der Grenze enthalten, dass man aus ihnen überhaupt gar nichts über den Verlauf der Ausflussmenge bei grösserem Ueberdrucke entnehmen kann. Trotzdem sieht Parenty diese ganze Versuchsreihe als experimentellen Beweis dafür an, dass für $p_a < \alpha p_i$ der Druck an der Stelle der stärksten Kontraktion ununterbrochen gleich αp_i bleibt.

Versuche über Ausflussmengen sind aber überhaupt ganz ungeeignet, die Frage nach dem Verhalten des Druckes in der Mündungsebene zu entscheiden. Führt man in Glchg. (12) für die eckige Klammer unter der Wurzel die kürzere Bezeichnung

$$(15) \qquad \left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{n+1}{n}} \equiv \psi$$

ein, so wird G proportional mit $\sqrt{\psi}$. Man würde also aus den Versuchen über G zuerst $\sqrt{\psi}$ berechnen und dann daraus auf den Quotienten p_m/p_i schliessen müssen. Den dazu nötigen Zusammenhang von p_m/p_i mit ψ habe ich in der nebenstehenden Tabelle

$\frac{p_m}{p_i}$ absolut 1	$\frac{p_m}{p_i}$ Verhältnis 2	ψ 3	$\sqrt{\psi}$ absolut 4	$\sqrt{\psi}$ Verhältnis 5
0,52744	1	0,067 7421	0,260 273	1
0,53	1,004 85	0,067 7366	0,260 262	0,999 96
0,54	1,023 81	0,067 6951	0,260 177	0,999 63
0,55	1,042 77	0,067 5909	0,259 983	0,998 88
0,56	1,061 71	0,067 4269	0,259 667	0,997 67
0,57	1,080 61	0,067 2028	0,259 238	0,996 02
0,58	1,099 65	0,066 9191	0,258 687	0,993 91
0,59	1,118 61	0,066 5753	0,258 022	0,991 35
0,60	1,137 57	0,066 1714	0,257 233	0,988 34

für ein kleines Gebiet in der Nähe des Grenzwertes von p_m aus Gleichung (13) angegeben, und zwar für $n = 1{,}405$, wobei $\alpha = 0{,}52744$ wird. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass sich $\sqrt{\psi}$ weit langsamer ändert, als p_m/p_i, namentlich langsam in der Nähe der Grenze α. Das ist übrigens selbstverständlich, da ψ für

$p_m/p_i = \alpha$ ein Maximum erreicht. Aber auch bis zum Ende der Tabelle muss p_m/p_i noch um rund 14 % zunehmen, damit $\sqrt{\psi}$ um nur 1,2 % abnimmt. Bei Versuchen über Ausflussmengen muss man nun die Ausflusszeit gewöhnlich ziemlich kurz wählen, bis zu 10 Sekunden hinunter. Benutzt man dabei, wie bei den in Zürich angestellten Versuchen, zur Bestimmung der Ausflusszeit eine Uhr mit schleichendem Sekundenzeiger, so kann der Fehler der Zeitbeobachtung am Anfang und Ende je fast 0,2 Sekunden erreichen. Das sind aber zusammen fast 4 % der kürzesten benutzten Beobachtungszeit. Aus so wenig genauen Versuchen lässt sich der Verlauf von G und $\sqrt{\psi}$ nicht sicher genug herleiten, um daraus Schlüsse auf die Konstanz des bei grösserem Ueberdrucke verhältnismässig viel stärker veränderlichen Quotienten p_m/p_i ziehen zu dürfen.

Will man die Frage nach dem Verhalten des Druckes in der Mündungsebene doch auf dem Wege des Versuches zu beantworten suchen, so muss man unmittelbare Druckbeobachtungen vornehmen. Allerdings ist das nur möglich für Mündungen ohne Kontraktion. Solche Versuche habe ich schon vor längerer Zeit mit gut abgerundeten Mündungen angestellt [1]. Dabei hat sich die sonst allgemein als richtig angesehene Beziehung (14) nicht bestätigt. Der Grenzwert $p_m = \alpha\, p_i$ scheint sich nur beim Ausströmen in einen absolut leeren Raum einzustellen. Mit zunehmendem äusserem Drucke nimmt auch p_m ununterbrochen zu, anfangs allerdings nur sehr langsam, in der Nähe von $p_a = \alpha\, p_i$ rascher. Für grössere Werte von p_a wird die Differenz $p_m - p_a$ immer kleiner, bleibt aber auch bei dem kleinsten Druckunterschiede zwischen innen und aussen noch endlich. Der Verlauf von $p_m = f(p_i, p_a)$ entfernt sich aber doch nur wenig von dem unstetigen, in (14) angegebenen, so dass man diesen bei praktischen Rechnungen unbedenklich benutzen darf, jedoch nur als vereinfachende Annäherung.

Bei solchen Versuchen muss man die Pressungen oft sehr rasch sinken lassen. So rasch veränderliche Pressungen gehen aber nicht genau zu beobachten, da bei allen benutzten Manometern Massen- und Reibungswiderstände auftreten. Ich habe die dadurch hervorgerufenen Fehler durch Vertauschung der Instrumente einigermassen auszugleichen gesucht, durchaus befriedigende Ergebnisse

[1] Civilingenieur, 1874, Bd. XX, S. 13 und 1877, Bd. XXIII, S. 443.

hat das aber auch nicht geliefert. Solche Versuche sollten bei konstanten Pressungen angestellt werden; das würde aber bei Luft so kräftige Pumpen erfordern, wie sie mir hier nicht zur Verfügung stehen. Mit Dampf dagegen könnte man bei konstanten Pressungen arbeiten, und ich hoffe, im Laufe der Zeit noch einmal solche Versuche vornehmen zu können.

Da sich hiernach die Frage nach dem Verhalten des Druckes in der Mündungsebene durch Experimente auf dem einen Wege gar nicht, auf dem andern doch nicht ganz befriedigend lösen lässt, so wäre es wünschenswert, ihr auf dem Wege der Rechnung beikommen zu können. In dieser Richtung sind auch schon vereinzelte Versuche gemacht worden.

Mit einer einzigen Ausnahme wird dabei wesentlich von den vorhin kurz entwickelten Gleichungen ausgegangen. Nach Gleichung (12) ist mit der kürzeren Bezeichnung (15) bei stationärer Bewegung das Produkt

$$F \sqrt{\psi} = \text{const.} \tag{16}$$

Daraus folgt, dass das Maximum von ψ für $p = \alpha p_i$ im engsten Querschnitte des Rohres auftreten muss. Auf diese Beziehung ist meines Wissens zuerst von Emil Herrmann[1]) hingewiesen worden. Wohl unabhängig von ihm entwickelt sie auch Hugoniot[2]). Beide scheinen dieses Ergebnis als Beweis dafür anzusehen, dass der Druck in der Mündungsebene, als im kleinsten Querschnitte, bei grösserem Ueberdrucke den Grenzwert $p_m = \alpha p_i$ annehmen müsse. Hugoniot dehnt diesen Schluss sogar auf den Querschnitt der stärksten Kontraktion aus und behauptet ferner, dass bei kleinem Ueberdrucke der Strahlquerschnitt ununterbrochen abnehme[3]).

Diesen Anschauungen kann ich mich nicht anschliessen. Die entwickelten Gleichungen gelten eigentlich nur für die Bewegung der Flüssigkeit durch ein geschlossenes Rohr, wenn an dessen äusserstem Querschnitte keinerlei weitere Einflüsse wirken, da bei der Entwickelung der Formeln keine berücksichtigt worden

---

[1]) Compendium der mechanischen Wärmetheorie, Berlin, Ernst & Korn, 1879, Seite 83.

[2]) Comptes rendus, 1886, Bd. 103, Seite 242.

[3]) Comptes rendus, 1886, Bd. 103, Seite 1180.

sind. Man kann also aus Glchg. (16) nur den Schluss ziehen, dass sich beim Ausströmen in einen absolut leeren Raum im engsten Querschnitte des Rohres der Druck αp_i einstellen muss. Das nämliche wird man auch vom Drucke in einer Mündungsebene beim Ausströmen ohne Kontraktion erwarten dürfen, aber nur, wenn ebenfalls $p_a = 0$ ist. Doch ist auch diese Annahme durchaus nicht als bewiesen anzusehen, weil die raschere Ausbreitung des freien Strahles in anderer Weise erfolgt, als die Ausbreitung in einem sich unendlich langsam erweiternden Rohre. Weitergehende Schlüsse sind aber für solche Mündungen unzulässig. Und bei Mündungen mit Kontraktion gelten die bisherigen Gleichungen überhaupt nicht mehr, denn sie setzen ausser einer Zustandsänderung nach $p v^n =$ const. auch voraus, dass in allen Punkten eines Strahlquerschnittes je gleicher Druck herrsche, während im Querschnitte der stärksten Kontraktion der Druck von innen nach aussen zu abnehmen muss, damit sich die Flüssigkeitsteilchen dort in ihren krummlinigen Bahnen bewegen können. Die letzte Behauptung Hugoniot's endlich widerspricht den Thatsachen. Wenigstens habe ich bei Versuchen über das Ausströmen von Luft durch konisch divergente Rohre auch beim kleinsten Ueberdrucke stets Ausströmen mit vollem Querschnitte beobachtet, sogar bei einer gelegentlich sehr bedeutenden Erweiterung des Rohres.

Aus diesen Gründen erscheint es mir nicht zulässig, die Frage nach dem Drucke in der Mündungsebene aus den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen zu beantworten.

Die vorhin angedeutete ausnahmsweise und ganz eigenartige rechnerische Behandlung des Ausströmungsvorganges ist die von Georg Lindner entwickelte „Theorie der Gasbewegung", die sich in den „Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses" in den Jahrgängen 1889 und 1890 veröffentlicht findet [1]). Ich muss kurz auf die wesentlichen Abweichungen dieser Theorie von der sonst üblichen eingehen. Dabei handelt es sich namentlich um vier verschiedene Punkte, die aber sämtlich schon im Jahrgange 1889 behandelt sind; ich gebe daher, wo ich auf

[1]) Jahrgang 1889, Seite 45, 97, 132, 183, 250, 341, 479, und Jahrgang 1890, Seite 69 und 108.

bestimmte Stellen hinweisen muss, nur einfach die Seitenzahl an, ohne den Jahrgang 1889 noch besonders hinzuzufügen.

Die erste Bemerkung bezieht sich auf die 3 Gleichungen:

$$P \delta \xi = \int p \cos (n x) d s \; \delta x$$

$$Q \delta \eta = \int p \cos (n y) d s \; \delta y$$

$$R \delta \zeta = \int p \cos (n z) d s \; \delta z,$$

die Lindner auf Seite 98 aufstellt. In ihnen bedeutet p den specifischen Druck auf ein Oberflächenelement ds eines beliebigen Teiles der Flüssigkeit, n die Richtung der Normalen zu ds und δx, δy und δz die virtuellen Verrückungen der einzelnen Oberflächenelemente ds nach den Richtungen der 3 Koordinatenachsen x, y und z. Die 3 Integrale rechts sind daher die Arbeiten, die der Oberflächendruck nach diesen 3 Richtungen auf die ganze betrachtete Flüssigkeitsmenge ausübt. Links bedeuten P, Q und R Kräfte, die am Schwerpunkte des von den Oberflächenelementen ds eingeschlossenen Teiles der Flüssigkeit angreifen, $\delta \xi$, $\delta \eta$ und $\delta \zeta$ die gleichzeitigen virtuellen Verrückungen des Schwerpunktes nach den 3 Achsen. Die Gleichungen sagen nun aus, dass sich die Arbeit der Oberflächenpressungen auf die Arbeit von Kräften am Schwerpunkte zurückführen lassen solle. Eine solche Zurückführung wäre nun bei einem starren Körper wohl möglich. Hier handelt es sich aber um elastische Flüssigkeiten, und da können Oberflächenpressungen ganz wohl Arbeit auf ein Flüssigkeitsteilchen übertragen, ohne dass sich sein Schwerpunkt entsprechend mitfortbewegt; die Arbeit wird dann ganz oder teilweise auf Ueberwindung der Elasticität aufgebraucht. Die 3 Gleichungen gelten also für elastische Flüssigkeiten nicht. Von seiner unrichtigen Annahme ausgehend, bekommt Lindner dann in den Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen die specifische Masse μ unter das Differential, so dass seine von den Pressungen herrührenden Glieder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\mu}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\mu}\right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\mu}\right)$$

lauten, während die richtigen Ausdrücke sind:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \text{ und } \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Eine zweite wesentliche Neuerung, die Lindner an den Bewegungsgleichungen vornimmt, besteht in der Einführung einer Einwirkung, die er „Störungswiderstand" nennt. Zur Erläuterung dieses Störungswiderstandes denkt sich Lindner auf Seite 138 und 139 „einen beliebig begrenzten Körper innerhalb einer Gasmasse von unbeschränkter Ausdehnung", oder auch (Seite 142) „einen beliebig kleinen Teil der Masse des Gases selbst". Diesem Körper oder dieser Gasmasse erteilt er nun „eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung, z. B. eine positive Beschleunigung". Die Folge davon sei eine Kompression und Verdrängung des Gases vor dem Körper, eine Verdünnung und ein Nachströmen des dahinter befindlichen Gases. So denkt man sich sonst den Widerstand bei der Bewegung eines Körpers im widerstehenden Mittel hervorgerufen. Lindner dagegen nimmt an, Seite 138 unten, dass die Kompression u. s. w. nur so lange anhält, „bis ein der neuen Geschwindigkeit entsprechender Beharrungszustand wieder hergestellt sein wird." Es soll also dadurch nur ein Widerstand gegen eine Aenderung der Geschwindigkeit verursacht werden, und zwar sowohl gegen eine Beschleunigung, als auch gegen eine Verzögerung. Dem Störungswiderstande wird damit die gleiche Eigenschaft beigelegt, wie dem Beharrungsvermögen der Materie.

Weiterhin sucht Lindner die Grösse des Störungswiderstandes zu berechnen (Seite 143 und 144). Zu diesem Zwecke macht er die Annahme, der Störungswiderstand sei proportional mit der Aenderung dL der angehäuften Arbeit der fortschreitenden Bewegung des Flüssigkeitsteilchens und setzt ihn gleich μdL. Beide Arbeiten werden geleistet durch die Expansionsarbeit $p\,dV$ des betrachteten Teilchens oder eines benachbarten, und das führt auf die Gleichung (Seite 143):

$$\frac{1}{1+\mu}\, p\, d\, V = d\, L.$$

Auf der gleichen Seite unten sucht Lindner den Vorgang noch in anderer Weise darzustellen. Er betrachtet eine Reihe aufeinanderfolgender Teilchen, die einen kontinuierlichen Strahl bilden, und nimmt an, dass sie expandieren. Die Expansionsarbeiten zweier benachbarter Teilchen sind dann „nur um eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung verschieden", gehen also beide gleich $p\,dV$ zu setzen. „Wenn nun jedes Teilchen die von ihm geschaffene mechanische Arbeit im Entstehungsmoment in lebendige Kraft seiner Bewegung umwandeln wollte, so müsste es den μfachen Betrag oder $\mu\,p\,dV$ je an das Nachbarteilchen übertragen, während dieses eine gleiche Arbeit $p\,dV$ leistet". Daraus leitet Lindner für jedes Teilchen die Beziehung ab (Seite 144):

$$(\mu - 1)\,p\,d\,V = d\,L.$$

In dieser Gleichung setzt er also den Störungswiderstand gleich $\mu\,p\,dV$, während er ihn in die vorige mit μdL eingeführt hatte. Da aber $p\,dV$ nicht gleich $d\,L$ ist, so erscheint das unzulässig. Die beiden Gleichungen können nur dann gleichzeitig bestehen, wenn man in ihnen den μ verschiedene Werte beilegt. Lindner setzt aber beide Werte von μ einander gleich und findet sie aus den beiden Gleichungen zu:

$$\mu = \sqrt{2}.$$

Auf Seite 146—148 untersucht Lindner dann eine Wärmemitteilung bei konstantem Volumen und bei konstantem Drucke, die beide Male die nämliche Temperaturerhöhung erzeugen soll. Durch Anschauungen und Annahmen, für die ich aber eine eingehendere Erläuterung und genaue Begründung vermisse, kommt er dabei zu dem „inhaltsschweren Schluss", dass der Quotient n der beiden specifischen Wärmen bei konstantem Drucke und bei konstantem Volumen dem Koefficienten μ des Störungswiderstandes gleich sein müsse, dass also auch

$$n = \sqrt{2}$$

wäre. Nun ist allerdings für die zweiatomigen Gase Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff n angenähert gleich $\sqrt{2}$, wenn auch etwas kleiner, für die einatomigen Gase Argon und Helium und die einatomigen Dämpfe von Cadmium, Quecksilber und Zink ist dagegen

$$n = 1{,}66,$$

während sich für die Halogene: Brom, Chlor, Jod

$$n = 1{,}30$$

ergeben hat[1]). Das Lindner'sche Ergebnis für n entspricht also der Wirklichkeit nicht.

Die Einführung des Störungswiderstandes erscheint daher auch nicht als eine Verbesserung der Theorie der Gasbewegung.

Der dritte Punkt, den ich aus den Lindner'schen Untersuchungen hervorheben möchte, betrifft seinen Einwand gegen die bekannte Clausius'sche Berechnung des Druckes aus den Molekularstössen. Clausius rechnet dabei mit einer mittleren, für alle Molekeln gleichen Geschwindigkeit w. Er betrachtet dann eine grössere Wandfläche F mit einer anstossenden Gasschicht, in der sich n Molekeln hin und her bewegen, und zwar nach allen möglichen Richtungen. Lindner glaubt wesentlich richtiger vorzugehen (Seite 252), indem er nur eine Molekel herausgreift und ihre wiederholten Stösse gegen den zugehörigen Teil der Wandfläche, also gegen F/n, untersucht. Das ist aber in Wirklichkeit kein Unterschied, und hätte Lindner weiterhin den Clausius'schen Weg eingeschlagen, so hätte er kein abweichendes Ergebnis erhalten. Clausius bestimmt nämlich zuerst den Anteil, den diejenigen Molekeln an den Druck liefern, die sich in dem Winkelintervall ϑ bis $\vartheta + d\vartheta$ gegenüber der Normalen zur Wandfläche bewegen. Dann integriert er diesen Ausdruck zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 90^0$ und findet schliesslich, wenn m die mittlere Masse einer Molekel bezeichnet:

$$\frac{m w^2}{2} = \frac{3}{2} p v.$$

Lindner dagegen bestimmt zunächst die Anzahl der Stösse der Molekel gegen die Wand und findet sie gleich gross, wie wenn sich die Molekel ununterbrochen unter $\vartheta = 45^0$ bewegen würde, anstatt in Wirklichkeit nacheinander in allen Richtungen. Unabhängig davon bestimmt er ferner die mittlere Stärke der einzelnen Stösse, und diese ergiebt sich für die Richtung $\vartheta = 60^0$. Den ganzen specifischen Druck berechnet er dann als das Produkt der beiden Mittelwerte. Das giebt ihm endlich

$$\frac{m w^2}{2} = \sqrt{2}\, p v = \mu p v.$$

---

[1]) Nach der Zusammenstellung von Berthelot, Comptes rendus, 1897, Band 124, Seite 120.

Dieses Lindner'sche Vorgehen ist aber vom mathematischen Standpunkte aus durchaus unhaltbar; da der gesuchte Druck mit dem Produkte aus der Anzahl und der Stärke der Molekularstösse proportional ist, so ist es nur zulässig, einen Mittelwert von ϑ für dieses Produkt selbst zu bestimmen, aber nicht zwei von einander verschiedene Mittelwerte für die beiden Faktoren. Lindners Einwand gegen die Clausius'sche Entwickelung ist daher hinfällig.

Der letzte Punkt, den ich aus der Lindner'schen Theorie besprechen möchte, ist die Art und Weise, wie er den Einfluss des äusseren Druckes, p_a, in die Bewegungsgleichungen einführt, Seite 352 bis 354: Die Arbeit, die „ein einzelnes Massenteilchen innerhalb des Stromes" „erzeugt", ist $p\,d\,V$. „Wenn das Gasteilchen um $d\,V$ expandiert, so erfährt die äussere Pressung die Raumänderung $(-d\,V)$. Sie leistet dabei die Arbeit $p_a\,(-d\,V)$ und erleidet also die Arbeit $p_a\,d\,V$." Diese Arbeit wird nun bei Expansion subtraktiv, bei Kompression additiv zu $p\,d\,V$ hinzugefügt. Das giebt, gleich auf die Gewichtseinheit angewendet, die Beziehung:

$$(p \mp p_a)\,d\,v = (1+\mu)\,d\,L,$$

wonach der Ueberschuss $(p \mp p_a)\,d\,v$ die angehäufte Arbeit des Teilchens um $d\,L$ ändern und den Störungswiderstand mit $\mu\,d\,L$ überwinden soll.

Hier bin ich mit Lindner so weit in Uebereinstimmung, dass ich auch annehme, der äussere Druck übe stets einen Einfluss auf die Bewegungserscheinung aus. Die Art aber, wie er ihn einführt, halte ich für unzulässig. Wenn man die Verhältnisse an einem Massenteilchen innerhalb des Stromes untersuchen will, so darf man nur die Kräfte einführen, die unmittelbar an dem betrachteten Teilchen angreifen. Zu diesen gehört aber der äussere Druck im allgemeinen nicht, da der nur auf die Teilchen am Rande des Strahles wirken kann. Die letzte hier angeführte Lindner'sche Gleichung ist daher auch nicht richtig, noch ganz abgesehen von μ.

Aus diesen Bemerkungen folgt, dass die Lindner'sche Theorie der Gasbewegung auf teilweise mindestens sehr unsicherer, teilweise aber sogar entschieden unrichtiger Grundlage aufgebaut ist, dass sie also nicht als Lösung der Frage angesehen werden kann.

Wenn man den Einfluss des äusseren Druckes auf das Ausströmen elastischer Flüssigkeiten aus Gefässmündungen auf dem Wege der Rechnung weiter untersuchen will, so muss man von vornherein auf ganz genaue Ergebnisse verzichten. Es ist dazu nötig, die Flüssigkeit bei ihrer Bewegung ausserhalb der Mündung zu verfolgen. Man hat es daher mit einer Strahlbildung zu thun. Eine solche lässt sich aber bekanntlich einstweilen nur für eine tropfbare Flüssigkeit, also bei konstantem specifischem Volumen, nachrechnen und auch das nur beim Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials und für nur zwei Koordinaten.[1]) Bei den elastischen Flüssigkeiten muss man dagegen einige Annäherungen zulassen und kann auch so nur allgemeinere Beziehungen herleiten.

Zunächst muss man annehmen, der Strahl bleibe aussen vollkommen isoliert, mische sich also auf der ganzen untersuchten Strecke nicht mit der umgebenden Flüssigkeit. Dagegen kann ein Wärmeaustausch mit der Umgebung in der Rechnung leicht berücksichtigt werden.

Nach dem Verlassen der Mündungsebene ändert der Flüssigkeitsstrahl seinen Querschnitt im allgemeinen ununterbrochen. Man muss nun entweder annehmen, diese Aenderung erfolge sehr langsam; dann kann man von ebenen Querschnitten des Strahles ausgehen und die in sie hineinfallenden Komponenten der Geschwindigkeit angenähert vernachlässigen. Oder man führt gekrümmte Querschnitte ein, die in allen ihren Punkten senkrecht zu den dortigen Geschwindigkeitsrichtungen stehen; dann kann man mit den wirklichen Geschwindigkeiten rechnen und dabei beliebig rasche Querschnittsänderungen zulassen.

Ausserhalb der Mündungsebene muss nun die erste Hauptgleichung der Wärmetheorie in der anfangs unter (1) angegebenen allgemeinen Gestalt auch gelten. Ihre Anwendung wird aber dadurch erschwert, dass hier in den ebenen oder gekrümmten Querschnitten des Strahles die Pressung im allgemeinen veränderlich ist. Daher müssen sich auch die Geschwindigkeit, die Temperatur und das specifische Volumen in jedem Querschnitte von Punkt zu Punkt ändern.

---

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, 1. Auflage, Seite 273.

Man müsste die Gleichung also zuerst auf einen Flüssigkeitsfaden von unendlich kleinem Querschnitte anwenden und sie dann erst über den ganzen Querschnitt des Strahles integrieren. Nun ist aber das Gesetz der Veränderlichkeit von p, v und w nicht angebbar; experimentell lässt es sich für weiter ausserhalb liegende Querschnitte auch nicht bestimmen. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als gleich mit Mittelwerten für den ganzen Querschnitt zu rechnen.

Zur Bestimmung von $d\,W$ in Glchg. (1) sei p der Druck auf zunächst ein Element f des Strahlquerschnittes. Dann wird auf dieses Element an seiner Rückseite in der Zeit $d\,t$ die Arbeit

$$p\,f\,w\,d\,t$$

übertragen. An seiner Vorderfläche giebt es dagegen die Arbeit

$$p\,f\,w\,d\,t + d\,(p\,f\,w)\,d\,t$$

ab. Es verrichtet also durch seine Zustandsänderung in der Richtung von w eine Arbeit gleich der Differenz beider Werte, d. i.

$$d\,(p\,f\,w)\,d\,t = d\,(p\,f\,w\,d\,t).$$

Hierin ist $f\,w\,d\,t = v\,d\,G$ das durch f in $d\,t$ strömende Volumen, daher die Arbeit auch

$$d\,(p\,v\,d\,G).$$

Summiert man diesen Wert über den ganzen Querschnitt und dividiert die Summation durch $\Sigma\,(d\,G)$, so wird

$$d\,W = \frac{1}{\Sigma\,(d\,G)}\,d\,\Sigma\,(p\,v\,d\,G).$$

Führt man jetzt für p und v Mittelwerte im ganzen Querschnitte ein, so kann man das Produkt $p\,v$ vor das Summationszeichen setzen. Dann hebt sich $\Sigma\,(d\,G)$ weg und man erhält

$$d\,W = d\,(p\,v). \tag{17}$$

Das ist aber der gleiche Ausdruck wie in Glchg. (2).

Die Aenderung der angehäuften Arbeit der fortschreitenden Bewegung wird auch, wenn man unter w^2 den Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate versteht, wie früher in Glchg. (3),

$$d\,N = d\left(\frac{w^2}{2\,g}\right). \tag{18}$$

Hieraus folgt, dass auch ausserhalb der Mündungsebene die Glchg. (4)

$$(19) \qquad d\,Q = A\left[d\,U + d\,(p\,v) + d\left(\frac{w^2}{2\,g}\right)\right]$$

gelten muss, nur mit dem Unterschiede, dass hier p, v und w^2 Mittelwerte bedeuten.

Für die Zustandsänderung jedes einzelnen Flüssigkeitselementes gegenüber seiner fortschreitenden Bewegung gelten dagegen hier die früheren Beziehungen nicht mehr, da sich der Druck nicht nur im Sinne der Bewegung, sondern auch senkrecht dazu ändert. Die Aenderung erfolgt aber doch nach beiden Richtungen stetig, so dass der Druck der umgebenden Elemente von dem Drucke des betrachteten nur unendlich wenig verschieden ist. Daher gilt für jedes Element auch hier die Glchg. (5) der statischen Zustandsänderungen:

$$(20) \qquad d\,Q = A\,(d\,U + p\,d\,v).$$

Diese Gleichung muss aber noch für den ganzen endlichen Querschnitt des Flüssigkeitsstrahles umgeformt werden. In $d\,U$ ist dabei auch einfach der Mittelwert von p und v für den ganzen Querschnitt einzuführen. Das letzte Glied $p\,d\,v$ erfordert dagegen eine besondere Umformung. Dabei muss man die ganze Volumenänderung eines Elementes in zwei Teile zerlegen: die eine in der Richtung der Bewegung, die andere senkrecht dazu.

Zur Bestimmung der Arbeit in der Richtung der Bewegung sei wieder f der Querschnitt eines Elementes, dann bestreicht seine hintere Endfläche in der Zeit $d\,t$ ein Volumen

$$f\,w\,d\,t,$$

die vordere dagegen ein solches

$$f\,(w + d\,w)\,d\,t.$$

Die ganze Volumenzunahme des Elementes in der Richtung der Bewegung ist daher

$$f\,(w + d\,w)\,d\,t - f\,w\,d\,t = f\,d\,w\,d\,t.$$

Da es unter dem Drucke p steht, so verrichtet es dabei die äussere Arbeit

$$p\,f\,d\,w\,d\,t.$$

Das Gewicht, das in $d\,t$ durch f strömt, beträgt

$$d\,G = \frac{f\,w\,d\,t}{v}.$$

Daher verrichtet jedes durch f durchströmende Kilogramm die Arbeit

$$(21)\qquad d\,W_1 = p\,f\,d\,w\,d\,t\,\frac{v}{f\,w\,d\,t} = p\,v\,\frac{d\,w}{w}.$$

Dieser Wert müsste nun über den ganzen Querschnitt summiert und durch die Anzahl der Elemente dividiert werden, um die Arbeit zu erhalten, die jedes durch den ganzen Querschnitt strömende Kilogramm auf dem Längenelement des Strahles verrichtet. Da aber die Verteilung von p, v und w über den Querschnitt nicht bekannt ist, so muss man auch hier für alle drei Grössen Mittelwerte eingeführt denken. Dann giebt Glchg. (21) schon diese Arbeit für den ganzen Querschnitt.

Der zweite Teil der Volumenänderung geht gleich für den ganzen Querschnitt F zu erledigen. Bezeichnet s die Höhe der Schicht, so enthält sie ein Flüssigkeitsgewicht

$$G = \frac{F\,s}{v},$$

wo für v auch sein Mittelwert im Querschnitte zu nehmen ist. Diese Schicht vergrössert ihren Querschnitt um $d\,F$ unter Ueberwindung des an ihrem Umfange herrschenden äusseren Druckes p_a, sie verrichtet dabei also die Arbeit

$$p_a\,s\,d\,F.$$

Dividiert man diesen Wert durch G, so erhält man die Arbeit für jedes durchgeströmte Kilogramm der Flüssigkeit zu

$$(22)\qquad d\,W_2 = p_a\,s\,d\,F\,\frac{v}{F\,s} = p_a\,v\,\frac{d\,F}{F}.$$

Die Addition der beiden Glchgn. (21) und (22) ergiebt endlich als ganze äussere Arbeit, die für $p\,d\,v$ in Glchg. (20) einzusetzen ist:

$$(23)\qquad p\,d\,v = d\,W_1 + d\,W_2 = v\left(p\,\frac{d\,w}{w} + p_a\,\frac{d\,F}{F}\right).$$

Man kann den gleichen Ausdruck noch auf anderem und kürzerem Wege finden. Die Kontinuitätsgleichung (6) schreibt sich auch, mit Mittelwerten für w und v,

$$G\,v = F\,w.$$

Das Differential dieser Gleichung ist

$$G\,d\,v = F\,d\,w + w\,d\,F,$$

und wenn man es durch die ursprüngliche Gleichung dividiert, so folgt daraus für die Aenderung des mittleren specifischen Volumens

$$d\,v = v\left(\frac{d\,w}{w} + \frac{d\,F}{F}\right). \tag{24}$$

$d\,v$ setzt sich also aus zwei Teilen zusammen. Die eine Aenderung erfolgt in der Richtung von w und rührt daher, dass die vordere Endfläche einer unendlich dünnen Schicht mit einer um $d\,w$ grösseren Geschwindigkeit vorrückt, als ihr die hintere Endfläche folgt; in dieser Richtung wird der mittlere Druck p ausgeübt. Der zweite Teil der Aenderung von v erfolgt durch eine Zunahme des Querschnittes um $d\,F$, wobei der äussere Druck p_a überwunden werden muss. Multipliziert man daher $v\,d\,w/w$ mit p und $v\,d\,F/F$ mit p_a und addiert beide Werte, so muss man die ganze Arbeit erhalten, die von jedem durch die Schicht strömenden Kilogramme verrichtet wird. Diese Summe ist aber gleich dem Ausdrucke auf der rechten Seite von Glchg. (23).

Ausserhalb der Mündungsebene wird der Strahl Widerstände zu überwinden haben, teils Reibungen an der umgebenden Flüssigkeit, teils Wirbelbildungen im Inneren infolge der verschiedenen Geschwindigkeiten seiner einzelnen Teilchen. Dadurch wird ein Arbeitsverlust hervorgerufen, der, bezogen auf jedes durch ein Längenelement des Strahles strömende Kilogramm mit $d\,W_r$ bezeichnet werden möge. Er setzt sich in Wärme um, und es soll angenommen werden, diese Wärme bleibe vollständig in der bewegten Flüssigkeit. Dann ist in der Gleichung (20) für die statische Zustandsänderung zu der von aussen mitgeteilten Wärmemenge $d\,Q$ noch $A\,d\,W_r$ zu addieren. Setzt man gleichzeitig $p\,d\,v$ aus (23) in (20) ein, so folgt

$$d\,Q + A\,d\,W_r = A\left[d\,U + v\left(p\,\frac{d\,w}{w} + p_a\,\frac{d\,F}{F}\right)\right],$$

oder, wenn man noch $v\,d\,w/w$ aus Glchg. (24) einführt,

$$d\,Q + A\,d\,W_r = A\left[d\,U + p\,d\,v - (p - p_a)\,v\,\frac{d\,F}{F}\right]. \tag{25}$$

Hierin ist $d W_r$ stets positiv, während die übrigen Differentiale sowohl positiv, als auch negativ sein können.

Für die weitere Rechnung sollte nun diese Gleichung (25) mit der früheren Gleichung (19) verbunden werden. Das ist aber streng genommen nicht unmittelbar zulässig, weil in (19) der Mittelwert der Quadrate der Geschwindigkeiten auftritt, in (25) dagegen der Mittelwert ihrer ersten Potenzen. Da man aber die Verteilung von w über den Querschnitt nicht kennt, so kann man den Zusammenhang dieser beiden Mittelwerte auch nicht angeben. Um aber doch wenigstens einen angenäherten Grenzwert für ihr gegenseitiges Verhältnis zu erhalten, soll das widerstandslose Ausströmen eines vollkommenen Gases in einen absolut leeren Raum untersucht und dabei angenommen werden, die Geschwindigkeit verteile sich im freien Strahle nach einem Rotationsparaboloid, eine Verteilung, wie sie von Althans[1]) für ein cylindrisches Rohr gefunden worden ist. Bezeichnet dann

w_o die Geschwindigkeit in der Strahlachse,
w die Geschwindigkeit im Abstande x von der Achse,
w_a die Geschwindigkeit am Rande des Strahles, im Abstande r,

so ist nach dieser Annahme

$$w = w_o + 2\,\lambda\,x^2, \tag{26}$$

$$w_a - w_o = 2\,\lambda\,r^2. \tag{27}$$

Die allgemeine Geschwindigkeit w herrscht in einem Kreisringe vom Flächeninhalte $d(\pi x^2)$, und daher wird die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querschnitte mit (26):

$$w_m = \frac{1}{\pi r^2} \int_{x=o}^{x=r} w\, d(\pi x^2) = w_o + \lambda\, r^2,$$

oder, wenn man λr^2 aus (27) einsetzt:

$$w_m = \frac{w_o + w_a}{2},$$

$$(w_m)^2 = \frac{1}{4}\left(w_o^2 + 2\,w_o\,w_a + w_a^2\right). \tag{28}$$

---

[1]) Dingler 1888, **270**, 368.

Der Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate, $(w^2)_m$, berechnet sich in gleicher Weise zu

$$(w^2)_m = \frac{1}{3}(w_o^2 + w_o w_a + w_a^2). \tag{29}$$

Dividiert man (29) durch (28), so wird der Quotient beider Mittelwerte

$$\frac{(w^2)_m}{(w_m)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{w_o^2 + w_o w_a + w_a^2}{w_o^2 + 2\, w_o w_a + w_a^2}. \tag{30}$$

Der erste Faktor ist grösser, der zweite kleiner als die Einheit, es ist also zu erwarten, dass das Produkt nicht stark von der Einheit verschieden sein wird.

Da adiabatisches Ausströmen eines vollkommenen Gases in einen absolut leeren Raum vorausgesetzt ist, so wird sich der Druck in der Mündungsebene nach Glchg. (13) mit angenähert $\alpha\, p_i$ einstellen. Damit wird die eckige Klammer unter der Wurzel in Glchg. (11)

$$1 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \alpha^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Die Geschwindigkeit in der Mündungsebene ist daher

$$w = \sqrt{2\, g\, R\, T_i \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}. \tag{31}$$

Ausserhalb der Mündung nimmt die Geschwindigkeit zu, aber in der Achse des Strahles langsamer, als an seinem Umfange. w_o ist also jedenfalls nicht kleiner, als w aus Glchg. (31). Für die äussersten Flüssigkeitsfäden wird man hier Glchg. (11) auch ausserhalb der Mündung angenähert gelten lassen dürfen. Ist dann dort $p = p_a = 0$ geworden, so giebt (11)

$$w_a = \sqrt{2\, g\, R\, T_i \frac{n}{n-1}}\,. \tag{32}$$

Grösser kann die Geschwindigkeit am Rande des freien Strahles nicht werden. Aus (32) und (31) folgt daher der Grenzwert des Quotienten w_a/w_o zu

$$\frac{w_a}{w_o} < \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}, \text{ d. h. } \frac{w_a}{w_o} < 2{,}44.$$

Mit diesem Zahlenwerte ergiebt sich der Quotient in Glchg. (30) zu:

$$\frac{(w^2)_m}{(w_m)^2} = 1{,}058, \tag{33}$$

und das ist als sein unter den gemachten Annahmen höchster denkbarer Wert anzusehen. Die beiden Mittelwerte der Geschwindigkeiten zeigen sich hiernach so wenig voneinander verschieden, dass man sie für die hier beabsichtigte, doch nicht streng durchführbare Rechnung unbedingt unter sich gleich setzen darf.

Mit dieser Annäherung ist es dann zulässig, die beiden Gleichungen (19) und (25) in der gefundenen Gestalt gleichzeitig zu benutzen. Dabei ist aber die durch die Widerstände aus äusserer Arbeit erzeugte Wärmemenge $A\,d\,W_r$ in (19) nicht zu $d\,Q$ hinzuzufügen, da es sich bei ihr nicht um eine Wärmemitteilung von aussen her handelt.

Setzt man nun $d\,Q$ aus (19) in (25) ein, so wird, da A fortfällt,

$$d\,U + d\,(p\,v) + d\left(\frac{w^2}{2\,g}\right) + d\,W_r = d\,U + p\,d\,v - (p - p_a)\,v\,\frac{d\,F}{F},$$

und hieraus ergiebt sich nach leichter Umformung:

$$d\left(\frac{w^2}{2\,g}\right) = -\,v\,d\,p - (p - p_a)\,v\,\frac{d\,F}{F} - d\,W_r. \tag{34}$$

Man erhält also für die Aenderung der angehäuften Arbeit der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeit aussen einen allgemeineren Ausdruck als innerhalb der Mündungsebene. Für $p = p_a$ und ohne Berücksichtigung der Widerstände geht er aber in den einfachen Wert $-\,v\,d\,p$ über, der bekanntlich im Inneren eines Rohres gilt.

Multipliziert man Glchg. (34) mit G/w und berücksichtigt dabei die Bedingung der Kontinuität, (6), so kann man sie auf die Gestalt bringen:

$$M\,d\,w = -\,F\,d\,p - (p - p_a)\,d\,F - G\,\frac{d\,W_r}{w},$$

und hier lässt sich, da aussen $p_a = \text{const.}$ angenommen werden muss, die rechte Seite noch einfacher schreiben, so dass man erhält:

$$M\,d\,w = -\,d\,[F\,(p - p_a)] - G\,\frac{d\,W_r}{w}. \tag{35}$$

Wenn man in (35) die Widerstände vernachlässigt, das Differential rechts in

$$d\,[F(p - p_a)] = d\,(F p) - p_a\, d\, F$$

auflöst, $F p$ und $M w$ je additiv und subtraktiv hinzufügt und anders ordnet, so erhält man:

$$F p + d\,(F p) = F p + M\,[w - (w + d\,w)] + p_a\, d\, F,$$

und diesen Ausdruck hätte man, ebene Querschnitte vorausgesetzt, nach dem Satze von den Bewegungsgrössen unmittelbar hinschreiben können.

Aus Glchg. (35) lassen sich einige Schlüsse auf die Aenderung der Geschwindigkeit im Verlaufe der Bewegung ziehen. Dabei sollen aber zunächst die Widerstände vernachlässigt werden.

Vom Ueberdrucke $p - p_a$ wird man als selbstverständlich annehmen müssen, dass er ununterbrochen abnimmt, bis er schliesslich einmal Null geworden ist. Der Querschnitt F nimmt bei Mündungen mit Kontraktion von der Mündungsebene bis zur engsten Stelle auch ab, so dass auf diesem Gebiete jedenfalls

$$d\,[F(p - p_a)] < 0, \text{ also } d\,w > 0$$

sein muss. Hinter dem kleinsten Querschnitte, ebenso beim Ausströmen ohne Kontraktion unmittelbar ausserhalb der Mündungsebene, fängt F an zu wachsen. Es ist aber zu erwarten, dass F infolge des Beharrungsvermögens zunächst langsamer zunimmt, als $p - p_a$ abnimmt, so dass das Produkt $F(p - p_a)$ doch abnimmt, w also wächst. Würde sich nun im weiteren Verlaufe des Strahles das Verhältnis der Aenderungen von F und $p - p_a$ dahin umkehren, dass die Zunahme von F die Abnahme von $p - p_a$ überwiegt, so müsste w nach Ueberschreitung eines grössten Wertes schliesslich wieder abnehmen. Ein solcher Verlauf der Geschwindigkeit erscheint aber unter den gemachten Annahmen nicht recht wahrscheinlich; da Widerstände vernachlässigt werden, der Strahl ausserdem vollkommen isoliert vorausgesetzt ist, die Schwerkraft in den Formeln auch nicht auftritt, so ist gar keine Kraftwirkung vorhanden, die eine Verlangsamung der Geschwindigkeit veranlassen könnte. Man wird daher erwarten müssen, dass die Abnahme des Ueberdruckes ununterbrochen das Uebergewicht über die Zunahme von F behält, dass also die Geschwindigkeit ununterbrochen zunimmt. Ist schliesslich $p = p_a$ geworden, so erreicht die Geschwindigkeit ihren grössten Wert, den sie dann beibehält. Ob sich dieser Grenzwert aber bei noch endlichem Strahlquerschnitte einstellt, oder erst nach unendlicher Ausbreitung, das lässt sich nicht entscheiden.

Sind Widerstände zu berücksichtigen, so haben sie stets das Vorzeichen, das ihnen bei der Entwickelung der Formeln von vornherein beigelegt wurde. Aus Glchg. (35) folgt daher, dass sie dw stets verkleinern. Die Geschwindigkeit nimmt also in Folge von Widerständen langsamer zu oder rascher ab als sonst. Bei zunehmendem Querschnitte des Strahles treten nun in der That auch bei elastischen Flüssigkeiten bedeutende Widerstände auf.[1] Es ist daher wahrscheinlich, dass die Geschwindigkeit schon bald ausserhalb der Mündungsebene anfangen wird, abzunehmen, und schliesslich muss die Flüssigkeit jedenfalls ganz zur Ruhe kommen. Da das aber im allgemeinen bei endlichem Drucke und daher auch endlichem specifischem Volumen geschieht, so kann die vollständige Beruhigung erst bei unendlich grossem Querschnitte eintreten. Dort ist dann natürlich $p = p_a$, und es fragt sich, welchen Wert das Produkt $F(p - p_a)$ bei eingetretener Beruhigung annimmt. Um das zu entscheiden, braucht man nur zu beachten, dass ein in die Atmosphäre austretender Dampfstrahl bald nach dem Verlassen einer kreisförmigen Mündung eine Gestalt annimmt, die man, unabhängig von den Wirbelbildungen, genügend genau als einen geraden Kreiskegel ansehen kann. Bei anderen elastischen Flüssigkeiten ist Aehnliches zu erwarten. In einem so geformten Strahle werden sich die einzelnen Flüssigkeitsteilchen angenähert in Geraden bewegen die durch die Kegelspitze gehen. Die Geradlinigkeit der Bahnen ist aber ein Beweis dafür, dass keine seitlichen Kraftwirkungen vorhanden sind, dass also der Druck in allen Punkten eines Querschnittes den gleichen Wert angenommen hat. Man muss hieraus schliessen, dass der Druck in einem sich frei ausbreitenden Strahle einer elastischen Flüssigkeit sehr rasch abnimmt, dass sich also der Ueberdruck $p - p_a$ rascher dem Werte

[1] S. meine „Mitteilungen aus dem Laboratorium für theoretische Maschinenlehre am eidg. Polytechnikum, 5. Versuche mit konisch-divergenten Lokomotiv-Essen". Schweiz. Bauzeitung, 1892, Band XX, Seite 121. Gleichartige Ergebnisse liefern mir neuere Versuche mit einfachen konisch divergenten Röhren.

Null nähert, als der Querschnitt F dem Werte Unendlich. An der Grenze, bei der Beruhigung aussen, muss man daher setzen

$$F_a\,(p_a - p_a) = \infty \cdot 0 = 0. \tag{36}$$

Dann verschwindet dieser Grenzwert aus dem Integral der Glchg. (35).

In Wirklichkeit vollzieht sich die Beruhigung wegen der Mischung mit der umgebenden Flüssigkeit sogar noch rascher. Nachrechnen lässt sich dieser Fall aber nicht, weil dann die Kontinuitätsgleichung nicht mehr gilt und man auch nicht angeben kann, in welcher Menge die umgebende Flüssigkeit mit in die Bewegung hineingezogen wird.

Wollte man die für die Ausbreitung und Beruhigung des Flüssigkeitsstrahles gefundenen Formeln wieder nur auf das adiabatische Ausströmen vollkommener Gase anwenden, so müsste man in Glchg. (19) die beiden früher schon benutzten Beziehungen aus den Glchgn. (7) und (8) einsetzen und erhielte dadurch die Glchg. (9) wieder, nämlich

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\frac{n}{n-1}\,R\,d\,T. \tag{37}$$

Dann bestände also zwischen der mittleren Geschwindigkeit w und der mittleren Temperatur T ausserhalb der Mündungsebene der gleiche Zusammenhang wie innerhalb. Und daraus würde folgen, dass das Gas, wenn es aussen zur Ruhe kommt, wieder seine innere Temperatur annimmt. Es ist das ein schon anderweitig und auf anderem Wege nachgewiesenes Verhalten.

Durch die gemachten besonderen Annahmen ginge Glchg. (25) über in

$$d\,W_r = \frac{d\,(p\,v)}{n-1} + p\,d\,v - (p - p_a)\,v\,\frac{d\,F}{F}; \tag{38}$$

integriert könnte sie aber auch nicht werden, da weder das Gesetz, dem die Widerstände folgen, noch der Zusammenhang zwischen F, p und v bekannt ist.

Die weitere Entwickelung soll sich wieder auf die ganz allgemein geltende Glchg. (35) stützen. Integriert man sie, so weit es möglich ist, von der Mündungsebene mit F_m, p_m, v_m bis zur erfolgten Beruhigung aussen mit p_a, $w_a = 0$, $F_a = \infty$ und berücksichtigt dabei Glchg. (36), so erhält man, anders geordnet,

$$G \int_m^a \frac{d\,W_r}{w} = M\,w_m + F_m\,(p_m - p_a). \tag{39}$$

w_m ist dabei abhängig von den Zuständen im Inneren des Gefässes und in der Mündungsebene. Zwischen diesen beiden Zuständen besteht aber ein bestimmter Zusammenhang, der von der Art der Flüssigkeit, von den Widerständen und von einem äusseren Wärmeaustausch abhängt, den man aber doch in der allgemeinen Gestalt

$$f\,(p_i, v_i) = f\,(p_m, v_m) \tag{40}$$

darstellen kann. Drückt man nach ihm v_m durch p_i, v_i und p_m aus, so erhält man

$$w_m = \varphi\,(p_i, v_i, p_m). \tag{41}$$

Mit den beiden letzten Beziehungen folgt dann aus der auf die Mündungsebene angewendeten Kontinuitätsgleichung (6)

$$G = M\,g = F_m\,\Phi\,(p_i, v_i, p_m). \tag{42}$$

Setzt man die Werte aus (41) und (42) in (39) ein, so fällt F_m ganz weg, und man erhält, wenn man in $M\,w_m$ noch die kürzere Bezeichnung $\Phi \cdot \varphi/g \equiv \Psi$ einführt:

$$\Phi\,(p_i, v_i, p_m) \int_m^a \frac{d\,W_r}{w} = \Psi\,(p_i, v_i, p_m) + p_m - p_a. \tag{43}$$

Um das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung ausführen zu können, müsste das Gesetz der Widerstände bekannt sein. Das lässt sich aber nicht von vornherein angeben. Es scheint zwar nahe zu liegen, ähnlich wie in der Hydraulik, die Widerstände von der Geschwindigkeit abhängig anzunehmen. Dabei würde aber eine eigentümliche Schwierigkeit auftreten. Wenn nämlich w ausserhalb der Mündungsebene zunächst noch wächst, um erst nachher abzunehmen, wenn also $d\,w$ in (35) sein Vorzeichen wechselt, so müsste sich das Gesetz $W_r = f\,(w)$ bei $d\,w = 0$ ändern, damit $d\,W_r$ ununterbrochen einerlei Vorzeichen beibehalten kann. Die gleiche Schwierigkeit würde sich zeigen, wenn man, wie es innerhalb der Mündungsebene geschieht,

$$A\,d\,W_r = c\,d\,T \text{ mit } c = \text{const.}$$

setzen wollte, ganz abgesehen davon, dass dann das Integral auch nicht lösbar wäre. Dagegen wäre die Integration durchführbar, wenn man

$$A\,d\,W_r = w \cdot f(p)\,d\,p$$

einführen könnte. Doch sind alle diese Annahmen, ebenso, wie alle übrigen, ganz willkürlich, und sie gehen auch gar nicht durch Versuche auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen, weil es nicht möglich ist, einen Strahl aussen wirklich zu isolieren, wie es die Formeln voraussetzen.

Trotzdem lässt sich noch ein wichtiges Ergebnis herleiten.

Die Widerstände müssen jedenfalls von einer oder von mehreren der Grössen p, v oder T, w und F abhängen. Diese Grössen stehen aber unter sich auch in einem bestimmten Zusammenhange, der allerdings nicht angebbar ist, weil zu seiner Berechnung nur die einzige Glchg. (25) aufgestellt werden kann. Wäre er aber bekannt, so könnte man damit $d\,W_r/w$ in ein vollständiges Differential verwandeln und das Integral ausrechnen. Das bestimmte Integral müsste sich dann durch die beiden Grenzzustände ausdrücken lassen, zwischen denen die Ausbreitung und Beruhigung des Strahles vor sich geht. Und da an der unteren Grenze Glchg. (41) gilt, während an der oberen $w_a = o$ und $p = p_a$ wird, so ist das Integral selbst

$$(44) \qquad \int_m^a \frac{d\,W_r}{w} = f(p_i, v_i, p_m, p_a).$$

Es fragt sich nun, ob diese Funktion vielleicht so beschaffen sein kann, dass sich mit ihr in Glchg. (43) eine der drei Pressungen weghebt. Jedenfalls kann das nicht mit p_m geschehen, sonst würde ein ganz bestimmter Zusammenhang zwischen p_i und p_a folgen, während diese beiden Pressungen der Natur der Sache nach gegenseitig vollständig beliebig gewählt werden können, nur mit Einhaltung der Grenzbedingung $p_i > p_a$. Wenn es für W_r ein Gesetz giebt, das einheitlich für alle beliebigen gegenseitigen Werte von p_i und p_a gilt, so kann auch keine dieser beiden Pressungen wegfallen. Denn geschähe es, so müsste ein allgemein gültiger Zusammenhang zwischen p_m und der nicht verschwindenden Pressung p_a oder p_i bestehen. Das ist aber unmöglich, weil an der Grenze für $p_i = p_a$ p_m diesen beiden Werten auch gleich werden muss.

Man könnte also höchstens noch annehmen, dass W_r bei grösserem Ueberdrucke einem ganz anderen analytischen Gesetze folgt als bei kleinerem, wenn ein solches Verhalten auch nicht gerade wahrscheinlich ist. Damit dann, was nur bei grösserem Ueberdrucke geschehen könnte, p_a verschwindet, müsste, wie einfacher aus der Differentialgleichung (35) erkennbar ist,

$$d\,W_r = -\frac{w}{G}\,d\,[F(p-p_a)] \text{ oder } = -\frac{w}{G}\,F_m\,d\,p$$

sein. Mit diesem Werte für $d\,W_r$ würde jedoch aus (35) $d\,w = o$ folgen, was keinen Sinn hat. Aber auch, wenn man für $d\,W_r$ einen allgemeineren Ausdruck von der Form

$$d\,W_r = -\frac{w}{G}\,d\,[F(p-p_a)] - f(w)\,d\,w$$

einzuführen versucht, erhält man aus (35) nur die Beziehung, dass

$$f(w) = \frac{w}{G}$$

sein müsste. Der sich damit ergebende Wert für d W_r ist dann einfach eine Folge von Glchg. (35). Daher wird für ihn Glchg. (35) identisch Null, und damit verschwindet Glchg. (43) überhaupt.

Wollte man umgekehrt aus (42) bei kleinerem Ueberdrucke p_i wegfallen lassen, so müsste man in (35)

$$d\,W_r = -\frac{w}{g}\,d\,w$$

einführen. Dann würde aber $p = p_a$ folgen und Glchg. (35) nur aussagen, dass, wenn der Druck im Strahle dem umgebenden Drucke gleich geworden ist, die angehäufte Arbeit der offenen Bewegung ganz zur Ueberwindung der Widerstände aufgebraucht wird. Glchg. (43) verschwindet dabei auch wieder ganz. Die Annahme, W_r befolge bei grösserem und kleinerem Ueberdrucke verschiedene Gesetze, aber von der Art, dass je eine der Grenzpressungen aus (43) verschwindet, führt also entweder auf eine Unmöglichkeit oder eine Identität. Jedenfalls erhält man aber aus dieser Annahme keinen Zusammenhang zwischen p_m und nur einer der beiden anderen Pressungen.

Aus den vorstehenden Erörterungen muss man nun den Schluss ziehen, dass aus Glchg. (43) keine der drei Pressungen verschwinden kann, dass also zwischen p_i, p_m und p_a für alle beliebigen gegenseitigen Werte von p_i und p_a ein ganz bestimmter Zusammenhang besteht. p_i und p_a sind aber in jedem Falle der Anwendung als gegeben anzusehen. Man kann daher das eben gefundene Ergebnis auch so in Worte fassen, dass man sagt: *Der Druck p_m in der Mündungsebene ist stets gleichzeitig sowohl vom inneren als auch vom äusseren Drucke abhängig.*

Wäre die in Glchg. (36) gemachte Annahme nicht richtig, so würde der äussere Grenzwert des Produktes $F(p - p_a)$ aus den Glchgn. (39) und (43) nicht verschwinden. Er würde aber additiv oder subtraktiv darin auftreten, so dass p_a doch in beiden Ausdrücken stehen bleiben würde. Das eben gefundene Ergebnis könnte also dadurch keine Aenderung erleiden. Ebenso ist es ganz gleichgültig, wie die Ausflussvorrichtung beschaffen ist, ob man es mit einer einfachen Gefässmündung oder mit einer beliebig zusammengesetzten Rohrleitung zu thun hat. Endlich stützt sich die ganze letzte Entwickelung auf die allgemeine Differentialgleichung (35) und ihr ebenfalls allgemeines Integral (39), so dass das gefundene Ergebnis auch ganz allgemein für alle elastischen Flüssigkeiten gilt.

Dagegen könnte es von Einfluss zu sein scheinen, dass der Strahl aussen nicht, wie es bei der Entwickelung angenommen wurde, isoliert bleibt, sondern sich mit der umgebenden Flüssigkeit mischt. Nun geht aber diese Mischung auch als eine Art von Widerstand aufzufassen, nur mit dem Unterschiede, dass sich dabei offene Bewegung der strömenden Flüssigkeit nicht in Molekularbewegung umsetzt, die zum grössten Teile im bewegten Körper zurückbleibt, sondern in offene Bewegung, die ganz auf den umgebenden, mitgerissenen Körper übergeht. Diesen Arbeitsverlust könnte man in der Formelentwickelung so berücksichtigen, dass man die ihm äquivalente Wärmemenge beim äusseren Wärmeaustausche dQ als entzogene Wärmemenge in Anrechnung bringt. Dadurch ändert sich aber an der ganzen Entwickelung nichts Wesentliches, und das Schlussergebnis bleibt daher auch für diesen Fall unverändert gültig.

Beim Ausströmen irgend einer elastischen Flüssigkeit durch irgend eine Ausflussvorrichtung muss also in Wirklichkeit stets ein bestimmter Zusammenhang zwischen dem inneren Drucke p_i, dem mittleren Drucke p_m in der Mündungsebene und dem äusseren Drucke p_a von der allgemeinen Gestalt

$$(45) \qquad f(p_i, p_m, p_a) = 0 \text{ oder } p_m = f(p_i, p_a)$$

bestehen. Danach kann, ausser für $p_i = p_a$, p_m nicht gleich p_a werden. Und da eine Ausbreitung des Strahles aussen und ein Mitreissen der umgebenden Flüssigkeit nur möglich ist, wenn p_m nicht kleiner als p_a ist, so lässt sich das Ergebnis auch dahin aussprechen, dass *der Druck in der Mündungsebene stets grösser bleiben muss als der Druck in der äusseren, ruhenden Flüssigkeit.*

Die analytische Gestalt des in Glchg. (45) angedeuteten Zusammenhanges lässt sich allerdings auf dem Wege der Rechnung nicht finden. Sie geht vielmehr nur aus unmittelbaren Druckbeobachtungen empirisch herzuleiten.

Zürich, Juni 1897.