Zur Theorie der Strahlensysteme,
deren Brennflächen sich aus Flächen zweiten Grades zusammensetzen.

Von

Ferdinand Rudio.

Nachdem ich mich bei früheren Gelegenheiten speciell mit denjenigen Strahlensystemen vierter Ordnung und vierter Klasse beschäftigt hatte, deren Brennflächen konfokale Flächen zweiten Grades sind — und zwar insbesondere mit denjenigen Flächen, deren Normalensysteme durch solche Strahlensysteme dargestellt werden, — wandte ich mich im 104. Bande des Crelle'schen Journals auch den Mittelpunktsflächen dieser Systeme zu.

Sind zwei konfokale Flächen zweiten Grades (λ) und (μ) durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a-\mu} + \frac{y^2}{b-\mu} + \frac{z^2}{c-\mu} = 1,$$

und bezeichnet man mit x, y, z die rechtwinkligen, mit u, v die elliptischen Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Fläche λ, so wird das Strahlensystem, dessen Brennflächen sich aus (λ) und (μ) zusammensetzen, durch die Gleichungen definiert:

$$\xi = x\left(\frac{U}{a-u}\,\frac{\mu-u}{v-u} + \frac{V}{a-v}\,\frac{\mu-v}{u-v}\right)$$

$$\eta = y\left(\frac{U}{b-u}\,\frac{\mu-u}{v-u} + \frac{V}{b-v}\,\frac{\mu-v}{u-v}\right)$$

$$\zeta = z\left(\frac{U}{c-u}\,\frac{\mu-u}{v-u} + \frac{V}{c-v}\,\frac{\mu-v}{u-v}\right).$$

Hierbei bedeuten ξ, η, ζ die Richtungskosinus eines der beiden durch P gehenden Strahlen des Systems, und es ist zur Abkürzung gesetzt:

$$U = \sqrt{\frac{(a-u)(b-u)(c-u)}{(\lambda-u)(\mu-u)}}, \quad V = \sqrt{\frac{(a-v)(b-v)(c-v)}{(\lambda-v)(\mu-v)}}.$$

Ist r die Entfernung des Punktes P von dem Berührungspunkte des Strahles (ξ, η, ζ) mit der Fläche (μ), so gilt die einfache Formel:

$$r = \frac{u-v}{U-V},$$

und die Mittelpunktsfläche des zu (λ) und (μ) als Brennflächen gehörigen Strahlensystems wird alsdann durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$x' = x + \frac{1}{2} r \xi, \quad y' = y + \frac{1}{2} r \eta, \quad z' = z + \frac{1}{2} r \zeta,$$

insofern x', y', z' den Mittelpunkt der Strecke r bezeichnen (vergl. die oben erwähnte Abhandlung im 104. Bande von Crelle's Journal).

Man kann aber auch ganz direkt und auf elementarem Wege zu einer einzigen Gleichung zwischen x', y', z' gelangen. Zugleich lässt sich die Aufgabe dadurch verallgemeinern, dass man die Voraussetzung, die Brennflächen seien konfokal, fallen lässt und allgemein nach den Mittelpunktsflächen derjenigen Strahlensysteme fragt, deren Brennflächen sich aus zwei konzentrischen Flächen zweiten Grades mit den Gleichungen:

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 = 0,$$

$$a_2 x^2 + b_2 y^2 + c_2 z^2 + d_2 = 0,$$

oder abgekürzt $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$, zusammensetzen.

Eine gemeinschaftliche Tangente der Flächen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ möge diese in den Punkten P_1 und P_2 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 berühren, der Mittelpunkt P von P_1 und P_2 habe die Koordinaten x, y, z. Dann gelten die Gleichungen:

$$a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2 + c_1 z_1^2 + d_1 = 0,$$
$$a_2 x_2^2 + b_2 y_2^2 + c_2 z_2^2 + d_2 = 0,$$
$$a_1 x x_1 + b_1 y y_1 + c_1 z z_1 + d_1 = 0,$$
$$a_2 x x_2 + b_2 y y_2 + c_2 z z_2 + d_2 = 0,$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

aus welchen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ zu eliminieren sind.

Man setze, entsprechend den drei letzten Gleichungen:

$$x_1 = x - \lambda, \quad y_1 = y - \mu, \quad z_1 = z - \nu,$$
$$x_2 = x + \lambda, \quad y_2 = y + \mu, \quad z_2 = z + \nu,$$

wodurch die vier ersten Gleichungen übergehen in:

$$a_1 \lambda^2 + b_1 \mu^2 + c_1 \nu^2 - f_1 = 0,$$
$$a_2 \lambda^2 + b_2 \mu^2 + c_2 \nu^2 - f_2 = 0,$$
$$a_1 x \lambda + b_1 y \mu + c_1 z \nu - f_1 = 0,$$
$$a_2 x \lambda + b_2 y \mu + c_2 z \nu + f_2 = 0.$$

Die Aufgabe, aus diesen Gleichungen λ, μ, ν zu eliminieren, kommt darauf hinaus, die Bedingung anzugeben, unter welcher eine durch zwei Ebenen bestimmte Gerade durch die Schnittkurve zweier Flächen zweiten Grades hindurchgeht. Diese Bedingung ist im Art. 217 des ersten Bandes der Salmon-Fiedler'schen Raumgeometrie (2. A. 1874) aufgestellt und in die Form gekleidet worden:

$$\pi^2 = 4\,\varrho\,\varrho'.$$

Hierbei sind ϱ, ϱ' und π als sechsgliedrige Summen definiert durch:

$$\varrho = \Sigma\, a_{11}\, a_{22}\, (\xi_3\, \xi_4' - \xi_3'\, \xi_4)^2,$$
$$\varrho' = \Sigma\, a_{11}'\, a_{22}'\, (\xi_3\, \xi_4' - \xi_3'\, \xi_4)^2,$$
$$\pi = \Sigma\, (a_{11}\, a_{22}' + a_{11}'\, a_{22})\, (\xi_3\, \xi_4' - \xi_3'\, \xi_4)^2,$$

insofern die a_{ik} und a_{ik}' die Koeffizienten der beiden Gleichungen zweiten Grades und die ξ_i und ξ_i' diejenigen der beiden Gleichungen ersten Grades bedeuten.

Dieselbe Gleichung $\pi^2 = 4\varrho\varrho'$ ist daher auch die Gleichung der gesuchten Mittelpunktsfläche, sobald man $a_{11} = a_1$ etc., $a'_{11} = a_2$ etc, $\xi_1 = a_1 x$ etc., $\xi'_1 = a_2 x$ etc. setzt. Für ϱ, ϱ' und π erhält man alsdann die folgenden Ausdrücke:

$$\varrho = b_1 c_1 (a_1 f_2 + a_2 f_1)^2 x^2 + \cdots - a_1 f_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 y^2 z^2 - \cdots$$

$$\varrho' = b_2 c_2 (a_1 f_2 + a_2 f_1)^2 x^2 + \cdots - a_2 f_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 y^2 z^2 - \cdots$$

$$\pi = (b_1 c_2 + b_2 c_1)(a_1 f_2 + a_2 f_1)^2 x^2 + \cdots$$
$$- (a_1 f_2 + a_2 f_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 y^2 z^2 - \cdots$$

Auch ohne die Struktur der Gleichung $\pi^2 = 4\varrho\varrho'$ weiter zu verfolgen, erkennt man, dass die Mittelpunktsfläche von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ eine Fläche zwölfter Ordnung ist. Da ferner ϱ, ϱ' und π sich als lineare Formen von f_1 und f_2 schreiben lassen, so kann man die Gleichung $\pi^2 = 4\varrho\varrho'$ in der Form darstellen:

$$\varphi f_1^2 + \psi f_1 f_2 + \chi f_2^2 = 0,$$

d. h. die Mittelpunktsfläche geht durch die Schnittkurve von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ hindurch, und diese Schnittkurve ist zugleich eine Doppelkurve unserer Fläche.

Von den mannigfachen Specialfällen, die man durch besondere Wahl von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ erhalten kann, seien hier noch zwei hervorgehoben. Es möge nämlich zunächst $f_1 = 0$ in einen Kegelschnitt, etwa in $a_1 x^2 + c_1 z^2 + d_1 = 0$, degenerieren. Die Mittelpunktsfläche des Strahlensystems, dessen Brennflächen sich aus diesem Kegelschnitt $f_1 = 0$ und der Fläche $f_2 = 0$ zusammensetzen, wird dann bestimmt durch Elimination der Grössen x_1, z_1, x_2, y_2, z_2 aus den Gleichungen:

$$a_1 x_1^2 + c_1 z_1^2 + d_1 = 0,$$

$$a_2 x_2^2 + b_2 y_2^2 + c_2 z_2^2 + d_2 = 0,$$

$$a_2 x x_2 + b_2 y y_2 + c_2 z z_2 + d_2 = 0,$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Das Resultat lässt sich in die Form bringen:

$$(l + m + n)^2 = 4\, l\, n,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$l = a_2^2\, x^2\, (c_1\, d_2 - c_2\, d_1 - 4\, c_1\, f_2),$$

$$m = c_2^2\, z^2\, (a_1\, d_2 - a_2\, d_1 - 4\, a_1\, f_2),$$

$$n = (a_1\, c_2 - a_2\, c_1)\, (d_2 - 2\, f_2)^2.$$

Die Gleichung $(l + m + n)^2 = 4\, l\, n$ der Mittelpunktsfläche zeigt eine gewisse Analogie mit den Gleichungen $\varphi^2 = 4\, p^2\, \psi$ der von Kummer (im 64. Bd. von Crelle's Journal) untersuchten Flächen vierter Ordnung. Diese Analogie findet ihren Ausdruck insbesondere in der Existenz von Doppelkurven. Unsere Fläche ist von der achten Ordnung und besitzt zwei Doppelkurven, welche durch die Gleichungen:

$$x = 0,\; m + n = 0$$

und

$$z = 0,\; l - n = 0$$

dargestellt werden. Die Realität dieser Doppelkurven hängt von den Koeffizienten von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ ab.

Die Fläche ist überdeckt von einer Schar von Kegelschnitten derart, dass durch jeden ihrer Punkte ein Kegelschnitt hindurchgeht. Sie lässt sich also durch die Bewegung eines sich stetig deformierenden Kegelschnittes erzeugen, der jeweilen einem bestimmten Punkte von $f_1 = 0$ zugeordnet ist und dessen Grösse und Lage durch den von diesem Punkte an $f_2 = 0$ gelegten Berührungskegel definiert werden.

Geht endlich auch noch $f_2 = 0$ in einen Kegelschnitt über, etwa in $a_2\, x^2 + b_2\, y^2 + d_2 = 0$, so erhält man durch Elimination von x_1, z_1, x_2, y_2 aus den Gleichungen: $a_1\, x_1^2 + c_1\, z_1^2 + d_1 = 0$, $a_2\, x_2^2 + b_2\, y_2^2 + d_2 = 0$, $2\, x = x_1 + x_2$, $2\, y = y_2$, $2\, z = 2\, z_1$ die Gleichung der Mittelpunktsfläche desjenigen Strahlensystems, dessen *Brennlinien* $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ sind. Die Gleichung stellt sich in der Form dar:

$$\varphi^2 = 4\, x^2\, \psi,$$

insofern man setzt:

$$\varphi = 4\,a_1 b_2 y^2 - 4\,a_2 c_1 z^2 + a_1 d_2 - a_2 d_1$$

$$\psi = -\,2\,a_1 a_2\,(2\,a_1 a_2\,x^2 + 4\,a_1 b_2\,y^2 + 4\,a_2 c_1 z^2 + a_1 d_2 + a_2\,d_1).$$

Die Fläche ist von der vierten Ordnung und besitzt den in der $y\,z$-Ebene gelegenen Kegelschnitt $\varphi = 0$ als Doppelkurve. Sie ist überdeckt von zwei Scharen von Kegelschnitten derart, dass durch jeden ihrer Punkte zwei Kegelschnitte, von jeder der beiden Scharen je einer, hindurchgehen. Die Kegelschnitte einer und derselben Schar sind einander kongruent und zwar ähnlich und ähnlich gelegen (mit dem Aehnlichkeitsverhältnis $= \frac{1}{2}$) zu $f_1 = 0$ resp. $f_2 = 0$. Die Fläche kann daher auf zwei Arten durch die Bewegung eines Kegelschnittes von konstanter Grösse und konstanter Stellung der Ebene erzeugt werden. Ein specieller Fall wurde in der oben erwähnten Abhandlung (Crelle's Journal, Bd. 104) beschrieben.