Beweis einiger Sätze von Chasles über konfokale Kegelschnitte.

Von

Theodor Reye in Strassburg.

---

1. Bezüglich eines Kegelschnittes sind bekanntlich zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade der Ebene nur dann konjugiert, wenn sie die beiden Brennpunkte harmonisch trennen und somit die Winkel zwischen den Brennstrahlen ihres Schnittpunktes halbieren. Aus diesem Satze lassen sich alle bekannteren Brennpunkts-Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten. In ihm ist als Grenzfall der Satz enthalten: Zwei Gerade sind konjugiert bezüglich eines Kegelschnittes, wenn sie sich in einem Brennpunkte rechtwinklig schneiden. Wir nennen noch einige andere Folgerungen [1]), die wir später benutzen werden.

2. Die Halbierungslinien der Winkel zwischen zwei Tangenten des Kegelschnittes sind konjugiert und zu einander normal; sie halbieren deshalb auch die Winkel zwischen den Brennstrahlen ihres Schnittpunktes. Jede Tangente des Kegelschnittes bildet gleiche Winkel mit den beiden Brennstrahlen ihres Berührungspunktes. Verbindet man einen Brennpunkt mit den beiden Berührungspunkten und mit dem Schnittpunkte von zwei Tangenten, so bildet die letztere Verbindungslinie gleiche Winkel mit den beiden ersteren. Die Fusspunkte der Lote, die aus einem Brennpunkte auf die Tangenten gefällt werden können, liegen im Falle der Parabel auf der Scheiteltangente, im Falle der Ellipse oder Hyperbel auf dem Kreise, der die Kurve in den Scheitelpunkten der Hauptachse berührt. Die projektiven Punktreihen, in denen zwei beliebige Tangenten des Kegelschnittes seinen Tangentenbüschel schneiden, werden aus jedem der beiden Brennpunkte F, F_1 durch zwei gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel projiziert.

---

[1]) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., I. S. 157—165 und 215—217.

Wenn also zwei Tangenten u, v von einer dritten Tangente w in P und Q, von einer vierten z aber in resp. Q' und P' geschnitten werden, so ist:

$$\angle PFQ' = \angle QFP',$$

und die Nebenwinkel zwischen FP und FP' haben folglich dieselben zu einander normalen Halbierungslinien, wie die Winkel zwischen FQ' und FQ. Aber PP' und $Q'Q$ sind zwei paar Gegenpunkte des Vierseits $u\,v\,w\,z$, sodass sich ergiebt: Die drei paar Gegenpunkte eines beliebigen Tangentenvierseits des Kegelschnittes werden aus jedem Brennpunkte F durch Strahlenpaare einer symmetrischen Involution projiziert; die zu einander normalen Doppelstrahlen dieser Involution sind konjugiert. Dieser Satz gilt auch für den Kreis und seinen Mittelpunkt.

3. Konfokale Kegelschnitte liegen in einer Ebene und haben dieselben zwei Brennpunkte, also auch dieselbe Hauptachse; sie sind entweder Parabeln oder konzentrische Ellipsen und Hyperbeln. Eine Schaar konfokaler Kegelschnitte ist nebst ihren Brennpunkten durch eine beliebige ihrer Kurven bestimmt; einer ihrer Kegelschnitte zerfällt als Kurve zweiter Klasse in die beiden Brennpunkte. Zwei zu einander normale Gerade g, g_1 der Ebene sind konjugiert bezüglich der konfokalen Kegelschnitte, wenn sie die beiden Brennpunkte harmonisch trennen. (1.) Die Pole einer Geraden g bezüglich der konfokalen Kegelschnitte liegen folglich auf einer zu g normalen Geraden g_1, die von g harmonisch getrennt ist durch die beiden Brennpunkte. Wenn also zwei normale Gerade konjugiert sind bezüglich eines Kegelschnittes k, so sind sie konjugiert bezüglich aller mit k konfokalen Kegelschnitte. Dieser Satz enthält eines der wichtigsten Merkmale konfokaler Kegelschnitte.

4. Die Tangentenpaare, die aus einem beliebigen Punkte P an die konfokalen Kegelschnitte gezogen werden können, bilden eine symmetrische Involution, deren zu einander normale Doppelstrahlen g, g_1 die Winkel zwischen den Brennstrahlen von P halbieren (2.) und bezüglich der Kegelschnitte konjugiert sind. Zwei der konfokalen Kegelschnitte berühren g resp. g_1 in P und schneiden sich rechtwinklig in P. Die Ebene wird demnach durch die konfokalen Kurven in unendlich kleine Rechtecke geteilt. Von den beiden durch P gehenden konfokalen Kurven ist die eine eine

Ellipse, die andere eine Hyperbel, falls nicht beide Parabeln sind; denn ihre Tangenten g, g_1 trennen die Brennpunkte harmonisch, die eine schneidet also die Hauptachse zwischen den beiden Brennpunkten und berührt in P die Hyperbel, während die andere in P die Ellipse berührt. Eine beliebige Gerade g berührt einen der konfokalen Kegelschnitte; sie wird in dem Berührungspunkte von ihrer konjugierten Geraden g_1 rechtwinklig geschnitten.

5. Den Strahlen eines beliebigen Punktes U der Ebene sind bezüglich der konfokalen Kegelschnitte die Tangenten einer Parabel konjugiert (vgl. 3.); die Polaren von U bezüglich je eines der Kegelschnitte berühren dieselbe Parabel. Die Pole von zwei beliebigen Geraden g, h bezüglich je eines der konfokalen Kegelschnitte sind folglich homologe Punkte von zwei projektiv ähnlichen Punktreihen g_1, h_1. — Die Parabel berührt auch die Achsen der konfokalen Kegelschnitte, und in U schneiden sich zwei ihrer Tangenten rechtwinklig (4.). Die Punkte, in denen die Strahlen von U je einen der konfokalen Kegelschnitte berühren und zu je einem anderen normal sind, liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, die sich selbst in U rechtwinklig schneidet. Diese Kurve wird erzeugt durch den Strahlenbüschel U und den zu ihm projektiven Tangentenbüschel der Parabel.

6. Andere weniger bekannte Eigenschaften konfokaler Kegelschnitte hängen mit Vierseiten zusammen, die Kreisen umschrieben sind. Zunächst beweisen wir den Satz:

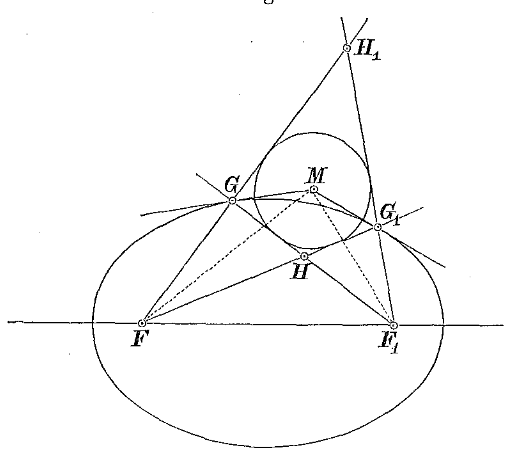
„Die vier Brennstrahlen von zwei beliebigen Punkten G, G_1
„eines Kegelschnittes berühren einen Kreis."

Ist nämlich M der Schnittpunkt der Tangenten von G und G_1, und sind F, F_1 die beiden Brennpunkte (Fig. 1), so bildet FM gleiche Winkel mit FG und FG_1 (2.), und M hat gleichen Abstand von FG und FG_1, ebenso aber von F_1G und F_1G_1. Weil aber die Tangente GM gleiche Winkel mit den Brennstrahlen ihres Berührungspunktes G bildet, so hat M auch von FG und F_1G und folglich von allen vier Geraden FG, FG_1, F_1G und F_1G_1 gleichen Abstand. Diese vier Brennstrahlen werden also von einem Kreise berührt, dessen Mittelpunkt M ist.

7. Wenn G_1 den Kegelschnitt beschreibt, so ändert sich der Kreis, indem er die Geraden FG und F_1G beständig berührt; sein Mittelpunkt beschreibt die Tangente von G. Daraus folgt:

„Zieht man an die einem Winkel eingeschriebenen Kreise „aus zwei Punkten F, F_1 der Schenkel je zwei andere „Tangenten, so treffen sich diese auf einem den Winkel „halbierenden Kegelschnitt, der F und F_1 zu Brennpunkten „hat. Zwei beliebige Gegenpunkte eines Kreistangenten-„Vierseits sind demnach die Brennpunkte von zwei Kegel-„schnitten, die je zwei andere Gegenpunkte des Vierseits „verbinden. Und zwei beliebige Punkte G, G_1 eines Kegel-„schnittes sind folglich (6.) die Brennpunkte eines zweiten „Kegelschnittes, der die Brennpunkte F, F_1 des ersteren „verbindet."

Fig. 1.



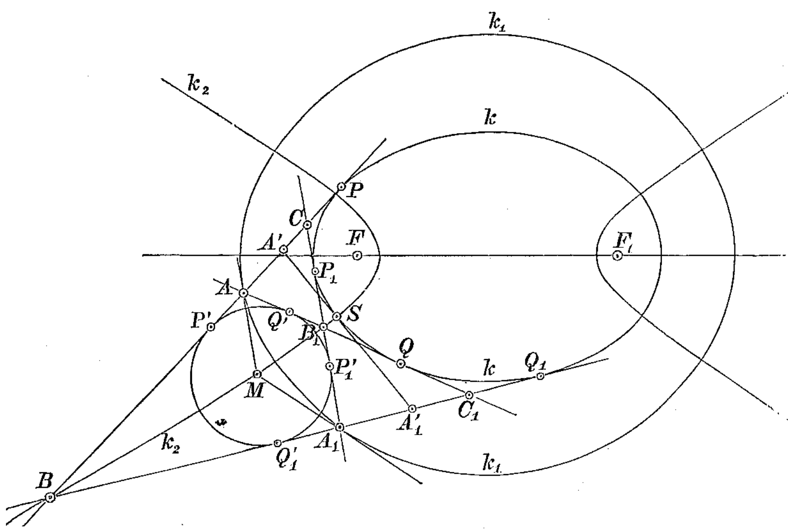
Dieser letzte Satz lässt sich für Ellipsen und Hyperbeln auch mittelst der Sätze von der Summe oder Differenz der Brennstrahlen beweisen. Ist z. B. der erstere Kegelschnitt eine Ellipse, so ist: $FG + F_1 G = FG_1 + F_1 G_1$ und folglich $FG - FG_1 = F_1 G_1 - F_1 G$. Die Brennpunkte FF_1 der Ellipse liegen demnach auf verschiedenen Zweigen einer Hyperbel, welche die Ellipsenpunkte G, G_1 zu Brennpunkten hat.

8. „Die vier gemeinschaftlichen Tangenten eines Kegel-„schnittes k und eines Kreises bilden ein Vierseit, dessen „drei paar Gegenpunkte auf drei mit k konfokalen Kegel-„schnitten liegen."

Zum Beweise dieses Satzes benutzen wir einen früheren (2.), dass nämlich die drei paar Gegenpunkte AA_1, BB_1 und CC_1 des

Vierseits (Fig. 2) aus dem Mittelpunkte M des Kreises durch Strahlenpaare einer symmetrischen Involution projiziert werden. Die zu einander normalen Doppelstrahlen dieser Involution sind konjugiert bezüglich aller dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte; denn die beiden durch M gehenden Tangenten jedes solchen Kegelschnittes bilden ein Strahlenpaar derselben Involution. (Vgl. den Satz von Desargues.) Die beiden normalen Doppelstrahlen der Involution sind insbesondere konjugiert bezüglich des Kegelschnittes k und folglich (3.) auch bezüglich der mit k kon-

Fig. 2.



fokalen Kegelschnitte. Einer dieser Kegelschnitte berührt MA und zugleich den zugeordneten Strahl MA_1 der Involution.

Nun werden aber die Winkel der beiden in A sich schneidenden Tangenten von k durch zwei zu einander normale Gerade halbiert, die in Bezug auf k und die mit k konfokalen Kegelschnitte konjugiert sind, und MA ist eine dieser Halbierungslinien. Jener mit k konfokale Kegelschnitt berührt deshalb MA im Punkte A (4.), ebenso aber MA_1 in A_1; er verbindet die beiden Gegenpunkte $A_1 A_1$ des Vierseits mit einander. Ebenso liegen die Gegenpunkte $B_1 B_1$ oder $C_1 C_1$ auf einem mit k konfokalen Kegelschnitte, dessen Tangenten in B und B_1 resp. C und C_1 beide durch M gehen.

9. Aendert der Kreis sich stetig so, dass er die beiden durch A gehenden Tangenten von k beständig berührt, so beschreibt der Schnittpunkt A_1 der übrigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten einen durch A gehenden, mit k konfokalen Kegelschnitt k_1. Wir schliessen daraus:

„Die zwei paar Tangenten, die von zwei Punkten eines „Kegelschnittes k_1 an einen konfokalen Kegelschnitt k „gezogen werden können, berühren einen Kreis". (Chasles.)

10. Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die merkwürdigen Eigenschaften konfokaler Kegelschnitte beweisen, die von Chasles[1]) 1843 ohne Beweis veröffentlicht wurden. Diese Eigenschaften hängen mit der Theorie der elliptischen Integrale innig zusammen; sie beziehen sich nämlich auf gewisse Bögen eines Kegelschnittes, deren Differenz rektifizierbar, d. h. durch eine gerade Strecke genau darstellbar ist. Chasles nennt diese Bögen „ähnlich" (semblables); wir wollen sie lieber „vergleichbar" nennen.

Den Beweis der Chasles'schen Sätze unternahm 1856 de Jonquières in seinen „Mélanges de Géométrie pure" S. 55—105. Leider aber krankt seine Abhandlung an einer zu allgemeinen Definition der „arcs semblables", die ihn zu falschen Folgerungen, z. B. auf S. 94, veranlasst; und seine Beweisführung zeigt gleich zu Anfang eine bedenkliche Lücke. De Jonquières beruft sich nämlich (S. 57 u.) darauf, dass es unmöglich sei, einen elliptischen Bogen ss' zu rektifizieren; den Beweis hiefür aber giebt er nicht und kann er nicht geben. Zudem handelt es sich a. a. O. nur darum, ob elliptische Bögen existieren, die genau so lang sind, wie gewisse gerade Strecken, nicht aber darum, ob sie konstruiert oder berechnet werden können; der vermisste Beweis würde also nicht einmal die Lücke ausfüllen. Es sei mir deshalb gestattet, die wichtigeren Sätze von Chasles hier anderweitig zu begründen.

11. Der Einfachheit wegen bezeichne ich als den „Pol" und die „Schenkel" eines Kegelschnittbogens $\widehat{PQ}$ den Schnittpunkt A der Tangenten seiner Endpunkte P, Q und die Abschnitte AP und AQ dieser Tangenten. Von Ellipsenbögen setzen wir voraus, dass sie den halben Umfang der Ellipse nicht überschreiten. Zwei Bögen eines Kegelschnittes k aber nennen wir vergleichbar

[1]) In den Comptes Rendus vom 23. Okt. 1843, t. XVII p. 838–844.

(semblables), wenn ihre Pole auf einem mit k konfokalen und k umschliessenden Kegelschnitt liegen. Nach Chasles gelten dann u. a. folgende Sätze:

I. „Die Differenz von zwei vergleichbaren Kegelschnittbögen „ist rektifizierbar; sie ist nämlich gleich der Summe der „Schenkel des einen vermindert um die Summe der Schenkel „des anderen Bogens. Die Tangenten der vier Endpunkte „von zwei vergleichbaren Bögen berühren einen Kreis."

II. „Wenn zwei vergleichbare Bögen eines Kegelschnittes k „in einem Endpunkte zusammenstossen, so ist ihre Diffe- „renz gleich der Differenz der Schenkel ihrer Bogensumme. „Der gemeinschaftliche Endpunkt liegt mit dem Pole dieser „Bogensumme auf einem mit k konfokalen Kegelschnitt. „In ihm wird k von einem Kreise berührt, der mit k auch „die Tangenten der anderen beiden Endpunkte gemein hat."

12. Wir wollen diese Sätze beweisen. Zwei vergleichbare Bögen $\widehat{PQ}$ und $\widehat{P_1 Q_1}$ von k werden nach einem vorhin bewiesenen Satze (9.) in ihren Endpunkten von vier Tangenten eines Kreises berührt, weil ihre Pole A und A_1, in denen je zwei dieser Tangenten sich schneiden, auf einem mit k konfokalen Kegelschnitt k_1 liegen. Die Tangenten AP und AQ (Fig. 2) mögen den Kreis in P' und Q' berühren, ferner die Tangente $A_1 P_1$ in resp. C und B_1, die Tangente $A_1 Q_1$ aber in resp. B und C_1 schneiden; von $A_1 P_1$ und $A_1 Q_1$ werde der Kreis in P_1' und Q_1' berührt. Dann sind AA_1, BB_1 und CC_1 die drei paar Gegenpunkte des Tangentenvierseits. Wenn A_1 auf k_1 unendlich nahe an A hinanrückt, so wird der Kreis verschwindend klein, und es vereinigen sich noch zwei Gegenpunkte B, B_1 mit A; zugleich fallen die übrigen beiden Gegenpunkte C, C_1 mit resp. P und Q zusammen.

Nun ist bei beliebiger Lage von A und A_1 auf k_1 (vgl. Fig. 2):

$$CA + AC_1 = CP' + Q'C_1 = CP_1' + Q_1'C_1 = CA_1 + A_1 C_1;$$

Die Gleichung $CA + AC_1 = CA_1 + A_1 C_1$ aber lässt sich schreiben:

$$(PA - PC) + (AQ + QC_1) = (CP_1 + P_1 A_1) + (A_1 Q_1 - C_1 Q_1),$$

woraus folgt:

$$(PA + AQ) - (PC + CP_1) = (P_1 A_1 + A_1 Q_1) - (QC_1 + C_1 Q_1)$$

In dieser Gleichung fallen, wenn A und A_1 auf k_1 unendlich nahe beieinander liegen, die Streckensummen $PC + CP_1$ und $QC_1 + C_1 Q_1$

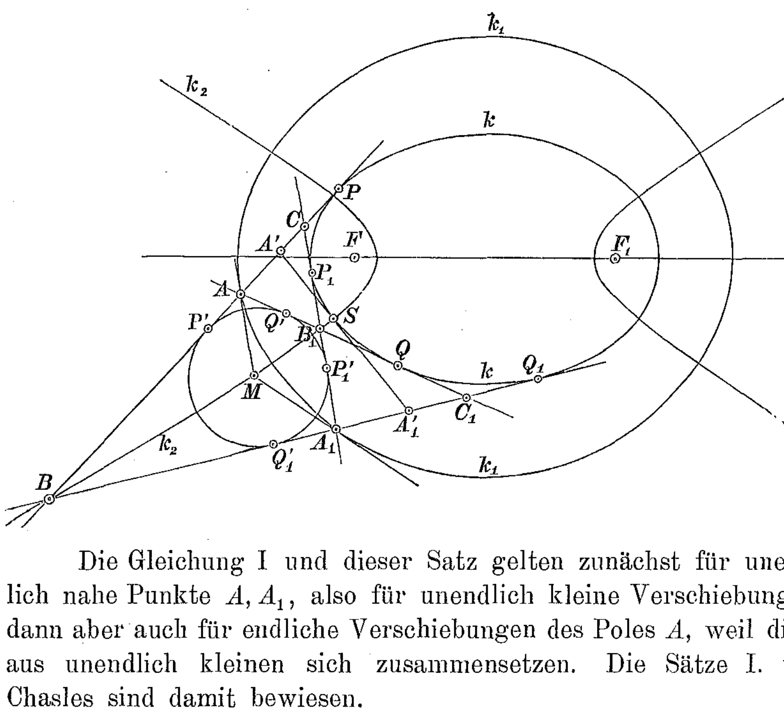
mit den resp. Bogenelementen $\widehat{PP_1}$ und $\widehat{QQ_1}$ zusammen. Wird von beiden Seiten der Gleichung noch der Bogen $\widehat{P_1Q}$ subtrahiert, so ergiebt sich:

$$\text{I} \ldots. PA + AQ - \widehat{PQ} = P_1A_1 + A_1Q_1 - \widehat{P_1Q_1},$$

und damit der Satz:

„Wenn auf einem Kegelschnitt k ein Bogen $\widehat{PQ}$ seine Lage „und Länge so ändert, dass sein Pol A einen mit k kon- „fokalen und k umschliessenden Kegelschnitt k_1 beschreibt, „so bleibt die Differenz seiner Länge und der Summe „$PA + AQ$ seiner Schenkel konstant.“

Fig. 2.



Die Gleichung I und dieser Satz gelten zunächst für unendlich nahe Punkte A, A_1, also für unendlich kleine Verschiebungen, dann aber auch für endliche Verschiebungen des Poles A, weil diese aus unendlich kleinen sich zusammensetzen. Die Sätze I. von Chasles sind damit bewiesen.

13. Die beiden Gegenpunkte B, B_1 des Vierseits liegen auf einem mit k und k_1 konfokalen Kegelschnitt k_2 (8.), welcher k_1 und dann auch k schneidet. Wir lassen nun das Vierseit so sich ändern, dass B_1 den Kegelschnitt k_2 beschreibt, B aber fest bleibt. Wenn dann B_1 unendlich nahe an den Schnittpunkt S von k_2 und

k hinanrückt, so vereinigen sich die beiden Tangenten $B_1 P_1$ und $B_1 Q$ von k mit der Tangente des Punktes S, und ihre Berührungspunkte P_1 und Q fallen mit S zusammen; der dem Vierseit eingeschriebene Kreis aber geht über in einen Kreis, welcher den Kegelschnitt k in S, ausserdem aber die beiden Tangenten BP und BQ_1 von k berührt. Zugleich gehen die Punkte A, A_1 über in die Pole A', A'_1 der Kegelschnittbögen $\widehat{PS}$ und $\widehat{SQ_1}$, und da sie nach wie vor auf einem mit k konfokalen Kegelschnitt liegen, so sind diese beiden Bögen vergleichbar. Nach Gleichung I. ist also:

$$\widehat{PS} - \widehat{SQ_1} = PA' + A'S - (SA_1' + A_1'Q_1)$$

Die Tangenten $A'S$ und SA_1' aber sind gleich den resp. anderen Tangenten, die von A' und A_1' an den Kreis gehen, und folglich wird:

$$A'S - SA_1' = A'B - BA_1'.$$

Die vorige Gleichung geht dadurch über in:

$$\text{II.} \ldots . \widehat{PS} - \widehat{SQ_1} = PB - BQ_1;$$

die Sätze II von Chasles aber sind hiemit bewiesen.

14. Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung I. einen Bogen $\widehat{KL}$, der $\widehat{PQ}$ und $\widehat{P_1 Q_1}$ überdeckt (vgl. Fig. 2), so ergiebt sich aus I ohne weiteres der Satz:

„Wird ein unendlich dünner Faden von gegebener Länge „mit seinen Endpunkten K, L an einem Kegelschnitte k „befestigt und durch eine bewegliche Spitze so gespannt, „dass er mit seinen beiden Enden an k sich anlegt, da-„zwischen aber mit zwei in A sich schneidenden Tangen-„ten zusammenfällt, so beschreibt die Spitze A bei ihrer „Bewegung einen mit k konfokalen Kegelschnittbogen."

Der Satz gilt auch für den Fall, dass k eine Hyperbel ist und K, L auf verschiedenen Hyperbelzweigen liegen; doch unterdrücken wir den Beweis für diesen Fall.

Wird ein geschlossener Faden um eine Ellipse gelegt und wiederum durch eine sich bewegende Spitze A gespannt gehalten, so beschreibt A eine mit jener konfokale Ellipse.

15. Wenn auf einem Kegelschnittzweige k zwei an einander grenzende Bögen $\widehat{PQ}$ und $\widehat{QR}$ mit den resp. anderen $\widehat{P_1 Q_1}$ und $\widehat{Q_1 R_1}$ vergleichbar sind, so ist auch ihre Bogensumme $\widehat{PR}$ mit $\widehat{P_1 R_1}$

vergleichbar. Denn die Pole der Bögen $\widehat{PP_1}$, $\widehat{QQ_1}$ und $\widehat{RR_1}$ liegen auf einem mit k konfokalen Kegelschnitt, wie man durch stetige Aenderung der Punkte R und R_1 leicht beweist; die Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1R_1}$ werden folglich in ihren Endpunkten von vier Tangenten eines Kreises berührt, und daraus folgt der Satz. Aus ihm ergiebt sich ohne weiteres seine Verallgemeinerung:

„Zwei Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1R_1}$ eines Kegelschnittzweiges „sind vergleichbar, wenn jeder von ihnen aus m Teilbögen „besteht, die mit je einem der m Teilbögen des anderen „vergleichbar sind."

16. Wenn die m Teilbögen von $\widehat{PR}$ mit einander vergleichbar sind, so sind es auch die m Teilbögen von $\widehat{P_1R_1}$; denn aus der Definition (11.) folgt sofort, dass zwei mit einem dritten vergleichbare Bögen auch mit einander vergleichbar sind. Daraus ergiebt sich:

„Sind zwei vergleichbare Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1R_1}$ eines Kegel- „schnittes k in je m vergleichbare Teilbögen geteilt, so „liegen die Pole dieser $2m$ Teilbögen alle auf einem mit „k konfokalen Kegelschnitt k_1 [1]). Die Tangenten der End- „und Teilpunkte bilden die Seiten von zwei Polygon- „stücken, die dem Kegelschnitt k_1 eingeschrieben und den „resp. Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1R_1}$ umschrieben sind. Die Differenz „von $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1R_1}$ ist gleich der Differenz der Umfänge „dieser beiden Polygonstücke (11.)."

17. Für die Ellipse ergiebt sich hieraus:

„Wird eine Ellipse in m vergleichbare Bögen geteilt, so „bilden die Tangenten der m Teilpunkte ein ihr umschrie- „benes Polygon, dessen Eckpunkte auf einer bestimmten, „mit k konfokalen Ellipse k_1 liegen. Jeder Punkt der „Ellipse k_1 ist Eckpunkt eines ihr eingeschriebenen m- „Ecks, welches der Ellipse k so umschrieben ist, dass k „durch die Berührungspunkte der m Seiten in m vergleich- „bare Bögen geteilt wird. Alle solche m-Ecke haben „gleichen Umfang."

[1]) Nach de Jonquières (a. a O. S. 94) enthält k_1 die Pole aller Bögen von k, die gleich dem m^{ten} Teile des Bogens $\widehat{PR}$ sind. Das ist unrichtig: denn sonst wären ja gleich lange Bögen vergleichbar und vergleichbare Bögen gleich lang, was nur bei besonderen Lagen der Bögen zutrifft.

Chasles, dem wir auch diese Sätze verdanken, bemerkt noch, dass dieser Umfang ein Minimum resp. Maximum ist im Vergleich mit andern m-Ecken, die der Ellipse k umschrieben resp. der Ellipse k_1 eingeschrieben sind.

18. Wenn zwei Tangenten eines Kegelschnittes k auf einem mit k konfokalen Kegelschnitt k_1 sich schneiden, so bilden sie gleiche Winkel mit der Tangente von k_1 im Schnittpunkte (4.) und können daher als die beiden Richtungen eines an k_1 reflektierten Lichtstrahles aufgefasst werden. Daraus und aus dem Vorhergehenden folgt:

„Ein Lichtstrahl, der an der Innenseite einer Ellipse „k_1 immer aufs neue reflektiert wird, berührt mit allen „seinen Lagen einen mit k_1 konfokalen Kegelschnitt k. „Ist auch k eine Ellipse, und kehrt der Strahl nach „m Reflexionen zu seinem Ausgangspunkte zurück, so „giebt es unendlich viele m-Ecke, die der Ellipse k um- „und zugleich der k_1 eingeschrieben sind. Alle diese m- „Ecke haben gleichen Umfang.“

Strassburg i. E., 3. Oktober 1895.