Über die Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden.

Von

Adolf Hurwitz.

In der vorliegenden Abhandlung werde ich zur Abkürzung mit

$$(1) \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots . a_n)$$

den Kettenbruch bezeichnen, dessen Teilnenner die Zahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots . a_n$ sind. Der Zahlenwert x dieses Kettenbruches wird aus den Gleichungen

$$(2) \quad x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \ldots\ldots, \quad x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$$

durch Elimination der Grössen $x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}$ gefunden. Handelt es sich um einen unendlichen Kettenbruch, so wende ich ebenfalls die Bezeichnung (1) an, nur dass in diesem Falle naturgemäss das letzte Glied a_n in der Bezeichnung fortfällt.

Ein Kettenbruch heisst „regelmässig", wenn seine Teilnenner ganz und rational und überdies vom zweiten ab positiv sind. [1])

Eine weitere Abkürzung, die ich im Folgenden verwende, ist diese: Es seien

$$\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots . \varphi_\varkappa(m)$$

$\varkappa$ Funktionen des ganzzahligen Argumentes m, welche sich teilweise oder sämtlich auch auf konstante, d. h. von m unabhängige Zahlenwerte, reduzieren dürfen. Dann soll

$$\overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots . \varphi_\varkappa(m)}$$

die Reihe von Zahlen bedeuten, welche entsteht, wenn man die Werte der Funktionen φ_i in der Reihenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots . \varphi_\varkappa$ für $m = 1$ aufschreibt, diesen die Werte der Funktionen für $m = 2$ anreiht, an diese wiederum die Werte der Funktionen für $m = 3$ u. s. f.

[1]) O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. II, pag. 285. (Leipzig 1886.)

Die regelmässigen Kettenbrüche von der Gestalt

$$(3) \qquad \left(a_0, a_1, \ldots . a_{i-1}, \overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots . \varphi_\varkappa(m)}\right),$$

wo $\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots . \varphi_\varkappa(m)$ ganze rationale Funktionen des Argumentes m bezeichnen, sind es, welche den Gegenstand dieser Abhandlung bilden. Die charakteristische Eigentümlichkeit dieser Kettenbrüche besteht darin, dass die Teilnenner von einem bestimmten (a_i) ab, $\varkappa$ in einander geschachtelte arithmetische Reihen bilden. Denn die der einzelnen Funktion $\varphi_r(m)$ entsprechenden Teilnenner

$$\varphi_r(1), \varphi_r(2), \varphi_r(3), \ldots .$$

bilden eine arithmetische Reihe und umgekehrt sind die Glieder einer beliebigen arithmetischen Reihe bekanntlich als die Werte einer ganzen rationalen Funktion eines positiv-ganzzahligen Argumentes darstellbar. Den Grad dieser ganzen Funktion werde ich (in unwesentlicher Abweichung von der üblichen Terminologie) als die „Ordnung" der arithmetischen Reihe bezeichnen. Hiernach ist also n die Ordnung einer arithmetischen Reihe, wenn die $(n+1)^{ste}$ Differenzenreihe die erste ist, deren Glieder sämtlich verschwinden. Der höchste unter den Graden der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varkappa$ möge die „Ordnung" des Kettenbruches (3) heissen.

Zu den hier betrachteten Kettenbrüchen gehören insbesondere die regelmässigen periodischen Kettenbrüche. Diese entsprechen dem Falle, wo die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\varkappa$ sich sämtlich auf Konstante reduzieren, wo also die Ordnung des Kettenbruches (3) gleich 0 ist.

Bezeichnet ferner e, wie gewöhnlich, die Basis der natürlichen Logarithmen, so besitzt die regelmässige Kettenbruchentwicklung der Zahl

$$\frac{\alpha e + \beta}{\gamma e + \delta}$$

stets die Gestalt (3). Dabei bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend vier ganze Zahlen, die nur der Einschränkung unterliegen, dass $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht verschwinden darf. Und zwar ist der Kettenbruch für die Zahl $\frac{\alpha e + \beta}{\gamma e + \delta}$ immer von der Ordnung 1.

Diese merkwürdige Eigenschaft der Zahl e (die übrigens auch den Zahlen $\sqrt{e}$ und e^2 zukommt) habe ich in einer Notiz, die in den Berichten der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. vom Jahre 1891 erschienen ist, ohne Beweis mitgeteilt. Sie wird sich weiter unten als eine einfache Folgerung aus einem allgemeinen, die Kettenbrüche (3) betreffenden Satze ergeben.

1.

Bevor ich mich dem Gegenstande dieser Abhandlung zuwenden kann, muss ich einige bekannte Sätze in Erinnerung bringen.

Während sich eine irrationale Zahl nur auf eine Weise in einen regelmässigen Kettenbruch entwickeln lässt, ist dies für eine rationale Zahl nicht der Fall. Vielmehr gilt der Satz: „Jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ lässt sich auf zwei Arten in einen regelmässigen Kettenbruch

$$\frac{p}{q} = (a_1, a_2, \dots . a_r) \tag{1}$$

entwickeln. Bei der einen Entwicklung ist r eine gerade, bei der anderen Entwicklung ist r eine ungerade Zahl."

Beispielsweise ist $-\frac{5}{4} = (-2, 1, 3) = (-2, 1, 2, 1)$. Allgemein erhält man die eine Entwicklung aus der anderen dadurch, dass man den letzten Teilnenner a_r der letzteren durch $a_r - 1 + \frac{1}{1}$ ersetzt.

Ein weiterer Satz, auf den ich mich später zu beziehen habe, lautet:

„Hat man den reduzierten Bruch $\frac{p}{q}$, dessen Nenner positiv sei, in die Gestalt (1) gebracht, so ist, unter z eine willkürliche Grösse verstanden,

$$(a_1, a_2, \dots . a_r, z) = \frac{pz + p'}{qz + q'}, \tag{2}$$

wo die ganzen Zahlen p, q' die Gleichung

$$pq' - qp' = (-1)^r \tag{3}$$

und die Ungleichung

$$0 \leqq q' \leqq q \tag{4}$$

befriedigen."

Die Gleichheitszeichen treten in (4), beiläufig bemerkt, nur in Kraft, wenn $q = 1$, also $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist. In diesem Falle ist entweder $r = 1$ und $0 = q'$ oder $r = 2$ und $q' = q = 1$.

Gehörten die bisher erwähnten Sätze der Lehre von den Kettenbrüchen an, so die nun folgenden der Theorie der linearen ganzzahligen Transformationen.

Besteht zwischen zwei Grössen x und y eine Relation der Gestalt:

$$(5) \qquad y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bezeichnen, die der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ genügen, so heissen die beiden Grössen „aequivalent". Lagrange hat nun bekanntlich bewiesen, dass zwei aequivalente Grössen x und y stets gleichendende Kettenbruchentwicklungen besitzen. D. h.: Sind:

$$x = (a_1, a_2, \ldots\ldots a_r, a_{r+1}, \ldots\ldots)$$
$$y = (b_1, b_2, \ldots\ldots b_s, b_{s+1}, \ldots\ldots)$$

die regelmässigen Kettenbrüche für irgend zwei aequivalente Grössen x und y, so kann man die Indices r und s stets so auswählen, dass die Zahlen

$$a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots\ldots$$

der Reihe nach bez. gleich sind den Zahlen

$$b_s, b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots\ldots$$

Man denke sich jetzt, dass in der Gleichung (5) x einen beliebig, aber fest angenommenen Wert besitzt und dass α, β, γ, δ alle Systeme von ganzen Zahlen durchlaufen, die der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm n$$

genügen, wo n eine beliebig, aber bestimmt gewählte positive ganze Zahl bezeichnet. Unter den unendlich vielen Grössen y, die so entstehen, gibt es dann nur eine endliche Zahl von inaequivalenten. Es gilt nämlich der folgende (aus der Theorie der Transformation der elliptischen Funktionen bekannte) Satz:

„Jede Grösse $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma = \pm n)$ ist einer der Grössen

$$(6) \qquad \frac{rx - t}{s}$$

aequivalent, wo r, t, s nicht negative ganze Zahlen bedeuten, die den Bedingungen

$$(7) \qquad r s = n, \quad t < s$$

unterworfen sind.“

Die Anzahl der Grössen (6) ist offenbar gleich Σs, d. h. gleich der Summe der Divisoren von n. Abgesehen von speziellen Werten von x, sind die Grössen (6) unter einander inaequivalent. Entwickelt man also die in der Form $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $(\alpha \delta - \beta \gamma = \pm n)$ enthaltenen Grössen in regelmässige Kettenbrüche, so entstehen im allgemeinen so viele verschieden endigende Kettenbrüche, als die Summe der Divisoren von n beträgt.

2.

Zunächst beschäftige ich mich nun mit der folgenden Aufgabe: Gegeben ist die regelmässige Kettenbruchentwicklung der irrationalen Grösse x:

$$(1) \qquad x = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)$$

Man soll daraus den regelmässigen Kettenbruch für die Grösse

$$(2) \qquad y = \frac{r x - t}{s}$$

ableiten, wo r, s positive ganze Zahlen und t eine zwischen $-r$ und s liegende ganze Zahl bedeuten.

Diese Aufgabe wird für den Fall, welcher weiterhin ausschliesslich in Betracht kommen wird, wo nämlich unter den Teilnennern von x solche vorkommen, die eine beliebig angenommene Zahl überschreiten, auf folgende Weise gelöst.

Es sei

$$(3) \qquad r s = n$$

und a_h ein Teilnenner der Entwicklung von x, welcher $2n - 1$ übersteigt. Man hat dann

$$(4) \qquad x = (a_0, a_1, a_2 \ldots a_{h-1}, x_1) = \frac{p x_1 + p'}{q x_1 + q'},$$

wo $x_1 > 2n$ ist. Nunmehr entwickle man die Zahl

$$\frac{r\frac{p}{q}-t}{s}=\frac{rp-tq}{sq}$$

in einen regelmässigen Kettenbruch

(5) $$\frac{rp-tq}{sq}=(b_0, b_1, b_2, \dots b_{k-1}),$$

wobei man die Entwicklung so einzurichten hat, dass $k \equiv h \pmod{2}$ wird. Endlich bestimme man y_1 derart, dass

(6) $$y=(b_0, b_1, b_2, \dots b_{k-1}, y_1)$$

ist. Dann stellt die letztere Gleichung die regelmässige Entwicklung von y dar.

Um dies zu beweisen, habe ich zu zeigen, dass $y_1 > 1$ ist. Zu dem Ende setze ich:

(7) $$\begin{cases} rp-tq=r_1 P, \\ sq=r_1 Q, \end{cases}$$

unter r_1 den grössten positiven gemeinsamen Teiler von $rp-tq$ und sq verstanden. Dann ist:

(8) $$y=\frac{Py_1+P'}{Qy_1+Q'},\ y_1=\frac{Q'y-P'}{P-Qy}.$$

Vermöge der Gleichungen (2), (4), (8) lässt sich y_1 als lineare gebrochene Funktion mit ganzen Koeffizienten von x_1 darstellen. Und zwar wird die aus diesen Koeffizienten gebildete Determinante gleich n sein. Denn y_1 geht aus y und ebenso x aus x_1 durch eine lineare Transformation von der Determinante $\varepsilon=\pm 1$, ferner y aus x durch eine lineare Transformation von der Determinante $rs=n$ hervor.

Die Ausführung der Rechnung ergibt ein einfaches Resultat. Zunächst folgt aus (8) und (2)

$$y_1=-\frac{Q'}{Q}+\frac{(-1)^k}{Q(P-Qy)}=-\frac{Q'}{Q}+\frac{(-1)^k r_1^{\,2}}{rsq(p-qx)}.$$

Sodann aus (4)

$$p-qx=\frac{(-1)^h}{qx_1+q'}.$$

Folglich:

$$y_1 = -\frac{Q'}{Q} + \frac{r_1^2}{n\,q}(q\,x_1 + q'),$$

oder schliesslich:

$$y_1 = \frac{r_1\,x_1 - t_1}{s_1}, \tag{9}$$

wo s_1 und t_1 aus den Gleichungen:

$$r_1\,s_1 = n,\ t_1 = s_1\,\frac{Q'}{Q} - r_1\,\frac{q'}{q} \tag{10}$$

zu entnehmen sind.

Nach dem, was oben bemerkt wurde, lässt sich der Faktor ϱ so bestimmen, dass $\varrho\,r_1$, $\varrho\,t_1$, $\varrho\,s_1$ ganze Zahlen sind und $\varrho\,r_1 \cdot \varrho\,s_1 = n$ ist. Aus der letzteren Gleichung folgt aber $\varrho^2 = 1$. Also sind s_1 und t_1 ganze Zahlen. Da $\frac{Q'}{Q}$ und $\frac{q'}{q}$ zwischen 0 und 1 liegen, so liegt t_1 zwischen den Grenzen $-r_1$ und s_1.

Die Zahl r_1 ist mindestens gleich 1, t_1 und s_1 sind höchstens gleich n, und da $x_1 > 2\,n$, so ergibt sich aus (9)

$$y_1 > \frac{2\,n - n}{n} = 1,$$

was zu zeigen war.

Auf das Grössenpaar x_1 und y_1 findet nun genau dieselbe Betrachtung Anwendung, die wir soeben für das Grössenpaar x, y angestellt haben. Aus der bis zu einem gewissen Schlussglied x_2 fortgesetzten regelmässigen Kettenbruchentwicklung von x_1 erhält man dadurch die bis zu einem gewissen Schlussglied y_2 reichende Entwicklung von y_1. Auf x_2, y_2 ist wieder dieselbe Betrachtung anwendbar u. s. f. Es leuchtet ein, dass man auf diese Weise nach und nach alle Teilnenner der regelmässigen Kettenbruchentwicklung von y findet.

Diese Methode zur Herstellung der Entwicklung von y aus der als bekannt vorausgesetzten von x ist, wie schon oben bemerkt, stets anwendbar, wenn es Teilnenner von x gibt, die grösser als eine beliebig vorgeschriebene Zahl sind. Man wird aber bemerken, dass für einen bestimmten Wert von n die Methode schon dann brauchbar ist, wenn sich nur in der Reihe der Teilnenner von x, so weit man in derselben auch fortschreiten möge, immer noch solche finden, die $2\,n - 1$ überschreiten.

3.

Wie in der vorigen Nummer und unter Beibehaltung der dort gebrauchten Bezeichnungen, sei aus der Kettenbruchentwicklung:

(1) $$x = (a_0, a_1, \dots a_{h-1}, x_1) = \frac{p x_1 + p'}{q x_1 + q'}$$

die Entwicklung von:

(2) $$y = \frac{r x - t}{s},$$

nämlich:

(3) $$y = (b_0, b_1, \dots b_{k-1}, y_1) = \frac{P y_1 + P'}{Q y_1 + Q'}$$

abgeleitet. Zwischen y_1 und x_1 besteht dann die Gleichung:

(4) $$y_1 = \frac{r_1 x_1 - t_1}{s_1},$$

wo r_1 als grösster positiver gemeinsamer Teiler von $r p - t q$ und $s q$, sodann s_1 und t_1 aus den Gleichungen (10) der vorigen Nummer zu bestimmen sind.

Ich betrachte jetzt eine Grösse x', von welcher ich voraussetze, dass ihre Kettenbruchentwicklung die Gestalt:

(5) $$x' = (a_0 + n c, a_1, a_2, \dots a_{h-1}, x_1') = \frac{(p + n c q) x_1' + (p' + n c q')}{q x_1' + q'}$$

besitze, dass also die Teilnenner vom zweiten bis zum h^{ten} für x und x' übereinstimmen, während die ersten Teilnenner sich um ein Multiplum $n c$ von n unterscheiden. Überdies will ich annehmen, dass $x_1' > 2 n$ sei. Es hänge nun ferner y' gerade so von x' ab, wie y von x; es sei also:

(6) $$y' = \frac{r x' - t}{s}.$$

Nach der vorigen Nummer ergibt sich die Kettenbruchentwicklung von y' auf folgende Weise. Man hat zuerst die Zahl:

$$\frac{r(p + n c q) - t q}{s q} = \frac{r p - t q}{s q} + r^2 c$$

in einen Kettenbruch zu entwickeln. Nach (5) der vorigen Nummer erhält man offenbar:

$$\frac{rp-tq}{sq}+r^2c=(b_0+r^2c, b_1, b_2 \dots b_{k-1}).$$

Hierauf hat man die Entwicklung von y':

(7) $$y'=(b_0+r^2c, b_1, b_2 \dots b_{k-1}, y_1')=\frac{(P+r^2cQ)y_1'+(P'+r^2cQ')}{Qy_1'+Q'}$$

Zwischen y_1' und x_1' besteht nun eine Gleichung der Gestalt:

$$y_1'=\frac{r_1'x_1'-t_1'}{s_1'},$$

und zwar ist r_1' als grösster positiver gemeinsamer Teiler von:

$$r(p+ncq)-tq=rp-tq+r^2c\cdot sq \text{ und } sq$$

gleich r_1, ferner $s_1'=\frac{n}{r_1'}=\frac{n}{r_1}=s_1$ und

$$t_1'=s_1'\frac{Q'}{Q}-r_1'\frac{q'}{q}=t_1.$$

Die Gleichung zwischen y_1' und x_1' lautet also:

(8) $$y_1'=\frac{r_1x_1'-t_1}{s_1};$$

es hängt also y_1' von x_1' gerade so ab, wie y_1 von x_1.

Für das Folgende ist es wichtig zu bemerken, dass man aus den Gleichungen (1) bis (6) ohne weiteres auf die Gleichungen (7) und (8) schliessen kann.

4.

Liegt ein Kettenbruch der Gestalt:

(1) $$\left(a_0, a_1, \dots a_{i-1}, \overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \dots \varphi_k(m)}\right)$$

vor, so will ich $a_0, a_1, \dots a_{i-1}$, seine „irregulären", alle übrigen Teilnenner seine „regulären" Glieder nennen. Da der Kettenbruch:

$$\left(a_0, a_1, \dots a_{i-1}, \varphi_1(1), \overline{\varphi_2(m), \dots \varphi_k(m), \varphi_1(m+1)}\right)$$

mit (1) identisch ist, so kann man das erste reguläre Glied zu einem irregulären und durch wiederholte Anwendung desselben Vorgehens offenbar eine beliebige Anzahl von regulären Gliedern zu irregulären machen, derart, dass ein beliebiges reguläres Glied des Kettenbruches (1) zum ersten regulären Gliede wird.

Man sieht ferner leicht ein, dass der Kettenbruch (1) auch in einer solchen Form dargestellt werden kann, in welcher an Stelle von k irgend ein Multiplum von k getreten ist. Soll beispielsweise $3k$ an Stelle von k treten, so setze man

$$\psi_r(m) = \varphi_r(3m-2),\ \psi_{r+k}(m) = \varphi_r(3m-1),$$
$$\psi_{r+2k}(m) = \varphi_r(3m)\ (r = 1, 2, \ldots k)$$

und bilde den Kettenbruch

$$\left(a_0, a_1, \ldots a_{i-1}, \overline{\psi_1(m), \psi_2(m), \ldots \psi_{3k}(m)}\right).$$

Der letztere ist, wie man sich sofort überzeugt, mit dem Kettenbruch (1) identisch. Diese Bemerkungen gelten unabhängig davon, welcher Natur die Funktionen $\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots \varphi_k(m)$ und welcher Beschaffenheit die Teilnenner des Kettenbruches (1) sind.

Nunmehr will ich aber insbesondere voraussetzen, dass (1) ein regelmässiger Kettenbruch ist und dass $\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots \varphi_k(m)$ ganze rationale Funktionen von m sind. Diese besitzen notwendig rationale Koeffizienten und lassen sich also auf die Form bringen:

$$\varphi_1(m) = \frac{1}{n_1} f_1(m),\ \varphi_2(m) = \frac{1}{n_2} f_2(m), \ldots \varphi_k(m) = \frac{1}{n_k} f_k(m),$$

wo $n_1, n_2, \ldots n_k$ positive ganze Zahlen und $f_1(m), f_2(m) \ldots f_k(m)$ ganze ganzzahlige Funktionen von m bezeichnen. Ist jetzt n eine beliebig gewählte positive Zahl, so bilden die regulären Glieder des Kettenbruches (1) (mod n) betrachtet eine periodische Reihe; mit andern Worten, es ist für jeden Wert von m

$$\varphi_1(m+N) \equiv \varphi_1(m),\ \varphi_2(m+N) \equiv \varphi_2(m), \ldots \varphi_k(m+N) \equiv$$
$$\equiv \varphi_k(m) \pmod n$$

unter N eine geeignet gewählte feste ganze Zahl verstanden.

In der That: bezeichnet v ein gemeinsames Multiplum von $n_1, n_2, \ldots n_k$ und nimmt man $N = n \cdot v$, so wird:

$$\varphi_r(m+N) - \varphi_r(m) = \frac{1}{n_r}\left(f_r(m+nv) - f_r(m)\right) =$$
$$n \cdot \frac{v}{n_r} f_r'(m) + n^2 \cdot \frac{v^2}{n_r} \cdot \frac{1}{2} f_r''(m) + \ldots$$

eine durch n teilbare ganze Zahl, für $r = 1, 2, \ldots k$.

Verbindet man diese Thatsache mit den obigen Bemerkungen, so erkennt man, dass sich der Kettenbruch (1) auf die Form bringen lässt:

$$(2) \qquad \left(a_0, a_1, a_2, \ldots a_{j-1}, \overline{\psi_1(m), \psi_2(m), \ldots \psi_h(m)}\right),$$

derart, dass $\psi_1(1)$ ein beliebig gewähltes reguläres Glied des Kettenbruches (1) ist, und dass:

$$\psi_1(m+1) \equiv \psi_1(m), \psi_2(m+1) \equiv \psi_2(m), \ldots \psi_h(m+1) \equiv \psi_h(m) \pmod{n}$$

ist, dass also nach dem Modul n die regulären Glieder des Kettenbruches (2) die periodische Reihe:

$$\overline{\psi_1(1), \psi_2(1), \ldots \psi_h(1)}$$

bilden. Der Index h ist ein geeignet gewähltes Multiplum von k, z. B. $h = N \cdot k$.

5.

Wenn der regelmässige Kettenbruch für die Irrationalzahl x so beschaffen ist, dass seine Teilnenner von einem bestimmten ab eine gewisse Zahl von ineinander geschachtelten arithmetischen Reihen bilden, wenn also x eine Entwicklung der Gestalt:

$$(1) \qquad x = \left(a_0, a_1, \ldots a_{i-1}, \overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots \varphi_k(m)}\right)$$

besitzt, wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ ganze Funktionen von m bezeichnen, so wird man vermuten, dass auch der regelmässige Kettenbruch für jede in der Form:

$$(2) \qquad y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

enthaltene Grösse y eine gewisse Gesetzmässigkeit darbietet. Dabei sollen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen von nicht verschwindender Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm n$ bedeuten.

Die Beantwortung der hiermit gestellten Frage bildet das Hauptziel der vorliegenden Untersuchung. Der Fall $n = 1$ erledigt sich nach dem Satze von Lagrange sofort. Ebenso leicht lässt sich die Frage erledigen für den Fall, wo der Kettenbruch (1) die Ordnung o hat, wo sich also die Funktionen $\varphi_1(m), \ldots \varphi_k(m)$ sämtlich auf Konstante reduzieren. Dann ist (1) ein periodischer

Kettenbruch und folglich x und also auch jede in der Form (2) enthaltene Grösse y eine quadratische Irrationalität. In diesem Falle wird also jedes y ebenfalls eine periodische Entwicklung besitzen, oder, nach der hier gewählten Terminologie, einen Kettenbruch der Gestalt (1) von der Ordnung o liefern. Ich werde hiernach bei der weiteren Untersuchung den Fall, wo der Kettenbruch für x von der Ordnung o ist, ausschliessen dürfen, so dass also unter den Funktionen $\varphi_r(m)$ mindestens eine vorhanden ist, deren Grad eine positive ganze Zahl ist. Dies hat zur Folge, dass unter den Teilnennern des Kettenbruches (1) solche vorkommen, die eine beliebig angenommene Zahl übersteigen. Die Aufgabe, den regelmässigen Kettenbruch für y zu untersuchen unter der Voraussetzung, dass x die Entwicklung (1) liefere, lässt sich zunächst auf eine einfachere zurückführen. Ich bringe zu dem Ende den Kettenbruch (1) auf die Form (2) der vorigen Nummer und zwar so, dass sich die Funktion $\psi_1(m)$ nicht auf eine Konstante reduziert und dass die Teilnenner:

$$\overline{\psi_1(m), \psi_2(m), \ldots \psi_h(m)},$$

welche der Funktion $\psi_1(m)$ und den übrigen etwa vorhandenen Funktionen $\psi_r(m)$, die sich nicht auf Konstante reduzieren, entspringen, sämtlich $2n-1$ übersteigen. Die Grösse x ist jedenfalls aequivalent der Grösse:

$$x^* = \left(\overline{\psi_1(m), \psi_2(m), \ldots \psi_h(m)}\right) \tag{3}$$

und daher jede in der Form (2) enthaltene Grösse y (nach Nr. 1) aequivalent einer in der Form:

$$y^* = \frac{r\,x^* - t}{s}, \quad (r\,s = n) \tag{4}$$

enthaltenen Grösse, wo r, s, t, nicht negative Zahlen bezeichnen und $t < s$ ist.

Nach dem Satze von Lagrange hat jedes y eine gleichendende regelmässige Kettenbruchentwicklung wie das entsprechende y^*. Es ist also nur noch zu untersuchen, nach welchem Gesetze die Teilnenner in der Entwicklung irgend eines y^* fortschreiten.

6.

Indem ich die Bezeichnung ein wenig abändere, habe ich also folgende Aufgabe:

Gegeben ist der regelmässige Kettenbruch:

$$x = \left(\overline{\psi_1\,(m),\ \psi_2\,(m), \ldots .\ \psi_h\,(m)}\right). \tag{1}$$

Gesucht wird der Kettenbruch für:

$$y = \frac{r\,x - t}{s},\ (r \cdot s = n), \tag{2}$$

wo r, s positive ganze Zahlen bedeuten und t zwischen o und $s-1$, also umsomehr zwischen $-r$ und s liegt. Dabei sind die Werte derjenigen Funktionen $\psi_r\,(m)$, die sich nicht auf Konstante reduzieren und zu denen insbesondere $\psi_1\,(m)$ gehört, sämtlich grösser als $2n-1$. Ferner ist allgemein:

$$\psi_r\,(m+1) \equiv \psi_r\,(m)\ (\mathrm{mod}\, n)\ (r = 1, 2, \ldots h). \tag{3}$$

Bei der Behandlung dieser Aufgabe ist es erforderlich, diejenigen Funktionen $\psi_r\,(m)$, die sich nicht auf Konstante reduzieren, von den übrigen zu unterscheiden. Ich will deshalb mit:

$$f_0\,(m), f_1\,(m), \ldots . f_\lambda\,(m)$$

diejenigen Funktionen $\psi_r\,(m)$ bezeichnen, die sich nicht auf Konstante reduzieren, die übrigen werde ich der Reihe nach mit a_0', a_0'', $\ldots\, a_1'$, a_0'', $\ldots$ bezeichnen, so dass sich also die Kettenbruchentwicklung (1) nun so darstellt:

$$x = \left(\overline{f_0\,(m), a_0', a_0'', \ldots f_1\,(m), a_1', a_1'', \ldots f_2\,(m), \ldots} \right. \tag{1'}$$
$$\left.\overline{\ldots f_\lambda\,(m), a_\lambda', a_\lambda'', \ldots}\right).$$

Die Funktion $f_0\,(m)$ ist mit $\psi_1\,(m)$ identisch. Ferner ist zu bemerken, dass von den Gruppen der konstanten Teilnenner einzelne oder auch alle fortfallen können. So wird beispielsweise die erste Gruppe a_0', a_0'' $\ldots$ gar nicht auftreten, wenn $\psi_2\,(m)$ sich nicht auf eine Konstante reduziert.

Zunächst zerlege ich nun den Kettenbruch (1') in folgender Weise:

$$(4)\qquad \begin{cases} x = (f_0(1), a_0', a_0'', \dots x_1) \\ x_1 = (f_1(1), a_1', a_1'', \dots x_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_\lambda = (f_\lambda(1), a_\lambda', a_\lambda'', \dots x') \\ x' = (f_0(2), a_0', a_0'', \dots x_1') \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Es werden also allgemein die Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} x^{(\mu)} &= (f_0(\mu+1), a_0', a_0'', \dots x_1^{(\mu)}) \\ x_1^{(\mu)} &= (f_1(\mu+1), a_1', a_1'', \dots x_2^{(\mu)}) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_\lambda^{(\mu)} &= (f_\lambda(\mu+1), a_\lambda', a_\lambda'', \dots x^{(\mu+1)}) \end{aligned}$$

für $\mu = 0, 1, 2, \dots$ Nach den Betrachtungen der Nr. 2 ergibt sich nun der Reihe nach:

$$(5)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{r\,x - t}{s} = (b_0, b_0', b_0'', \dots y_1) \\ y_1 = \dfrac{r_1 x_1 - t_1}{s_1} = (b_1, b_1', b_1'', \dots y_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_\lambda = \dfrac{r_\lambda x_\lambda - t_\lambda}{s_\lambda} = (b_\lambda, b_\lambda', b_\lambda'', \dots y') \\ y' = \dfrac{r'\,x' - t'}{s'} = (c_0, c_0', c_0'', \dots y_1') \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen findet man die regelmässige Kettenbruchentwicklung von y durch Elimination von $y_1, y_2, y_3, \dots$ u. s. f. Man betrachte nun insbesondere die Grössen:

$$(6)\qquad x, x', x'', \dots$$

und die ihnen entsprechenden:

$$(7)\qquad y = \frac{r\,x - t}{s},\ y' = \frac{r'\,x' - t'}{s'},\ y'' = \frac{r''\,x'' - t''}{s''}, \dots$$

Da es nur eine endliche Anzahl von Zahlentripeln r, s, t gibt, welche den Bedingungen $r \cdot s = n, -r \leqq t \leqq s$ genügen, so wird in den Gleichungen (7) notwendig ein und dasselbe Zahlentripel wiederholt auftreten müssen. Man darf aber annehmen, dass das in der ersten Gleichung (7) vorkommende Tripel wiederholt auftritt. Andernfalls würde man nämlich an Stelle von x die erste Grösse der Reihe $x', x'', \ldots$ betrachten können, deren zugehörige Grösse der Reihe (7) ein wiederholt vorkommendes Zahlentripel entspricht.

Des weiteren darf vorausgesetzt werden, dass schon das zweite Zahlentripel r', s', t' mit dem ersten r, s, t identisch ist, da man dies widrigenfalls dadurch erreichen würde, dass man den Kettenbruch (1) in eine Form bringt, in welcher an Stelle von h ein geeignetes Multiplum von h getreten ist. (Vgl. Nr. 4.)

Wenn aber $y' = \frac{r x' - t}{s}$ ist, so findet der Satz von Nr. 3 Anwendung. Denn die ersten Teilnenner $f_0(1)$ und $f_0(2)$ der Entwicklungen von x und x' unterscheiden sich nach (3) nur um ein Multiplum von n. Die $(\lambda + 2)^{\text{te}}$ Gleichung des Systemes (5) heisst also:

$$y' = \frac{r x' - t}{s} = (c_0, b_0', b_0'', \ldots y_1'),$$

wo $c_0 = b_0 + r^2 \cdot \frac{f_0(2) - f_0(1)}{n}$ ist. Zugleich ist:

$$y_1' = \frac{r_1 x_1' - t_1}{s_1}.$$

Da wiederum die ersten Teilnenner von x_1 und x_1', nämlich $f_1(1)$ und $f_1(2)$, sich um ein Multiplum von n unterscheiden, so findet der Satz von Nr. 3 aufs neue Anwendung u. s. f. Auf diese Weise erkennt man, dass sich die Gleichungen (5) allgemein so darstellen lassen. Man setze:

$$(8) \quad g_0(m) = b_0 + r^2 \cdot \frac{f_0(m) - f_0(1)}{n}, \; g_1(m) = b_1 + r_1^2 \frac{f_1(m) - f_1(1)}{n}, \ldots$$
$$\ldots g_\lambda(m) = b_\lambda + r_\lambda^2 \cdot \frac{f_\lambda(m) - f_\lambda(1)}{n}.$$

Dann erhält man das unendliche System der Gleichungen (5), indem man die nachstehenden Gleichungen (5') für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ bildet:

$$(5') \quad \begin{cases} y^{(\mu)} = (g_0(\mu+1), b_0', b_0'', \ldots y_1^{(\mu)}) \\ y_1^{(\mu)} = (g_1(\mu+1), b_1', b_1'', \ldots y_2^{(\mu)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_\lambda^{(\mu)} = (g_\lambda(\mu+1), b_\lambda', b_\lambda'', \ldots y^{(\mu+1)}) \end{cases}$$

Hiernach ist die regelmässige Kettenbruchentwicklung von y diese:

$$(9) \quad y = (\overline{g_0(m), b_0', b_0'', \ldots, g_1(m), b_1', b_1'', \ldots g_2(m), \ldots g_\lambda(m), b_\lambda', b_\lambda'', \ldots}),$$

also genau von derselben Gestalt, wie die Entwicklung von x. Beachtet man, dass die Funktion $g_r(m)$ nach (8) eine ganze Funktion des nämlichen Grades, wie die Funktion $f_r(m)$ ist, beachtet man ferner die am Schluss der vorigen Nummer gemachten Bemerkungen, so sieht man, dass nunmehr folgender Satz bewiesen ist:

Wenn der regelmässige Kettenbruch für die Irrationalzahl x so beschaffen ist, dass seine Teilnenner von einem bestimmten ab eine arithmetische Reihe oder mehrere ineinander geschachtelte arithmetische Reihen bilden, so hat der regelmässige Kettenbruch für:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

wo α, β, γ, δ irgend vier ganze Zahlen von nicht verschwindender Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ bezeichnen, stets dieselbe Beschaffenheit. Und zwar besitzt, abgesehen von Reihen der Ordnung 0, jede in der Entwicklung von y auftretende arithmetische Reihe dieselbe Ordnung, wie eine derjenigen Reihen, die in der Entwicklung von x auftreten.

Nach der oben eingeführten Bezeichnungsweise besitzen also insbesondere die beiden Kettenbrüche für x und y dieselbe „Ordnung“.

7.

Besitzt die Irrationalzahl x eine regelmässige Kettenbruchentwicklung von der im vorigen Satze erwähnten Beschaffenheit und will man aus derselben die Entwicklung von:

(1) $$y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \quad (\alpha\delta-\beta\gamma=\pm n)$$

herleiten, so lässt sich das Verfahren der vorhergehenden Nummer nicht unmittelbar anwenden. Denn dieses setzt voraus, dass die Relation zwischen y und x die besondere Gestalt $y=\frac{rx-t}{s}$ besitze und dass überdies die im Beginn der Nr. 6 angegebenen Bedingungen für die Entwicklung von x erfüllt seien. Auf diesen Fall lässt sich aber der allgemeinste Fall zurückführen. Dies geschieht auf Grund der folgenden Betrachtung.

Es sei:

(2) $$x=(a_0, a_1, \ldots a_{i-1}, x_1)=\frac{p\,x_1+p'}{q\,x_1+q'}$$

ein regelmässiger Kettenbruch, über dessen Beschaffenheit ich zunächst keinerlei Voraussetzung mache. Ferner hänge y mit x durch die Gleichung (1) zusammen.

Nun stelle man den regelmässigen Kettenbruch

(3) $$\frac{\alpha p+\beta q}{\gamma p+\delta q}=(b_0, b_1, \ldots b_{j-1})$$

her, wobei $j\equiv i \pmod 2$ oder $j\equiv i+1 \pmod 2$ sein soll, je nachdem $\alpha\delta-\beta\gamma=+n$ oder $=-n$ ist.

Endlich bestimme man y_1 so, dass die Gleichung

(4) $$y=(b_0, b_1, \ldots b_{j-1}, y_1)=\frac{P y_1+P'}{Q y_1+Q'}$$

besteht. — Zunächst will ich nun untersuchen, in welchem Zusammenhange y_1 und x_1 stehen. Unter der offenbar zulässigen Annahme, dass $\gamma p+\delta q$ positiv sei, ist:

(5) $$\alpha p+\beta q=rP, \quad \gamma p+\delta q=rQ$$

wo r den positiven grössten gemeinsamen Teiler der Zahlen $\alpha p+\beta q, \gamma p+\delta q$ bezeichnet.

Die Elimination von x und y aus den Gleichungen (1), (2) und (4) ergibt nach kurzer Rechnung (welche der in Nr. 2 ausgeführten ganz ähnlich ist):

(6) $$y_1 = \frac{r x_1 - t}{s},$$

wo s und t ganze Zahlen, $r \cdot s = n$ und:

(7) $$t = s \cdot \frac{Q'}{Q} - r \cdot \frac{\gamma p' + \delta q'}{\gamma p + \delta q}$$

ist. Der Faktor von r lässt sich auf die Form bringen

$$\frac{\gamma p' + \delta q'}{\gamma p + \delta q} = \frac{q' + \varepsilon}{q},$$

wo

$$\varepsilon = \pm \frac{\gamma}{q\left(\gamma \frac{q}{p} + \delta\right)} = \pm \frac{\gamma}{q(\gamma x + \delta) \pm \frac{1}{q x_1 + q'}}$$

unbegrenzt abnimmt, wenn die Anzahl i der Teilnenner des Kettenbruches (2) (und folglich auch q) unbegrenzt zunimmt. Sobald daher die Zahl dieser Teilnenner eine gewisse Grenze überschreitet, wird t zwischen $-r$ und s liegen. Zugleich wird dann, sofern $x_1 > 2n$ ist, nach Gleichung (6) $y_1 > 1$, und folglich (4) die regelmässige Entwicklung von y darstellen.

Wenn nun insbesondere der Kettenbruch x die im Satze der vorigen Nummer näher bezeichnete Beschaffenheit hat, so leuchtet ein, dass man durch geeignete Wahl der Anfangs-Teilnenner $a_0, a_1 \dots a_{i-1}$ die in der Darstellung (2) auftreten, stets erreichen kann, dass auf die Grössen x_1 und $y_1 = \frac{r x_1 - t}{s}$ das Verfahren der vorigen Nummer anwendbar wird.

8.

Eine besonders interessante Anwendung gestatten die gefundenen Resultate auf die Basis e der natürlichen Logarithmen. Bezeichnet u eine unbeschränkt veränderliche Grösse, so besteht nach Lambert bekanntlich die Gleichung:

(1) $$\frac{e^u - 1}{e^u + 1} = \left(0, \frac{2}{u}, \frac{6}{u}, \frac{10}{u}, \dots\right) = \left(0, \overline{\frac{4m-2}{u}}\right)$$

Der hier auftretende Kettenbruch wird ein regelmässiger, dessen Teilnenner eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, so oft u der reciproke Wert oder das Doppelte des reciproken Wertes einer positiven ganzen Zahl ist. Da jede linear-gebrochene Funktion von $\frac{e^u-1}{e^u+1}$ eine eben solche Funktion von e^u ist, so folgt aus dem Satze der Nr. 6:

Bezeichnet g eine positive ganze Zahl, bedeuten ferner $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend vier ganze Zahlen von nicht verschwindender Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, so sind die regelmässigen Kettenbrüche für die Grössen:

$$\frac{\alpha\cdot\sqrt[g]{e}+\beta}{\gamma\cdot\sqrt[g]{e}+\delta} \quad\text{und}\quad \frac{\alpha\cdot\sqrt[g]{e^2}+\beta}{\gamma\cdot\sqrt[g]{e^2}+\delta}$$

so beschaffen, dass ihre Teilnenner von einem bestimmten ab eine arithmetische Reihe oder mehrere ineinander geschachtelte arithmetische Reihen 0^{ter} und erster Ordnung bilden.

Die Herstellung dieser Kettenbrüche aus dem Kettenbruch von Lambert geschieht nach der oben entwickelten Methode und möge für einige einfache Fälle durchgeführt werden.

Es sei:

$$x = \frac{e-1}{e+1} = (0, 2, 6, 10, \ldots) = (0, \overline{4m-2}), \tag{2}$$

und hieraus die Entwicklung von:

$$y = \frac{x+1}{-x+1} = e \tag{3}$$

abzuleiten. Nach Nr. 7 hat man zunächst zu setzen:

$$x = (0, 2, x_1) = \frac{x_1}{2x_1+1}\left(=\frac{p\,x_1+p'}{q\,x_1+q'}\right); \tag{4}$$

sodann ist der Kettenbruch zu bilden:

$$\frac{\alpha p+\beta q}{\gamma p+\delta q} = \frac{1+2}{-1+2} = 3 = (2, 1)$$

und y_1 aus der Gleichung:

$$y = (2, 1, y_1) = \frac{3y_1+2}{y_1+1} \tag{5}$$

zu bestimmen. Die Elimination von x, y aus (3), (4) (5) liefert nun:

$$(6) \qquad y_1 = \frac{x_1 - 1}{2},$$

und hier tritt jetzt das Verfahren von Nr. 6 in Kraft. Die Teilnenner von:

$$x_1 = (6, 10, \ldots) = (\overline{4\,m + 2})$$

bilden (mod 2) eine periodische Reihe bestehend aus dem einen Gliede 0. Den Gleichungen (4) von Nr. 6 entsprechend, ist also zu setzen:

$$(7) \quad x_1 = (6, x_1'), \ x_1' = (10, x_1''), \ldots \ x_1^{(\mu)} = (f(\mu+1), x_1^{(\mu+1)}), \ldots$$
$$(f(m) = 4\,m + 2).$$

Hieraus ergeben sich der Reihe nach die den Gleichungen (5) von Nr. 6 entsprechenden Gleichungen:

$$(8) \qquad y_1 = \frac{x_1 - 1}{2} = (2, 1, 1, y_1'), \quad y_1' = \frac{x_1' - 1}{2} = (4, 1, 1, y_1''), \ldots$$

Da schon y_1' mit x_1' in demselben Zusammenhange steht, wie y_1 mit x_1, so braucht man die Rechnung nicht weiter fortzusetzen. Allgemein wird, den Gleichungen (5′) von Nr. 6 entsprechend,

$$(9) \qquad y_1^{(\mu)} = (g(\mu+1), 1, 1, y_1^{(\mu+1)}),$$

wo $\quad g(m) = b_0 + r^2 \cdot \dfrac{f(m) - f(1)}{n} = 2 + 1^2 \cdot \dfrac{4\,m + 2 - 6}{2}$, also

$$(10) \qquad g(m) = 2\,m$$

ist. Hiernach wird die regelmässige Entwicklung von y_1 gleich $(\overline{2\,m, 1, 1})$ und hieraus schliesslich in Rücksicht auf (5):

$$(11) \qquad y = e = (2, \overline{1, 2\,m, 1}). \ ^{1)}$$

---

1) Die regelmässige Kettenbruchentwicklung der Zahl e ist, wie Herr Rudio in seiner interessanten Schrift: Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung (mit einer Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels) Leipzig 1892, bemerkt, schon von Euler in der Abhandlung „De fractionibus continuis dissertatio“ (Comment. Acad, Petrop. T. IX pag. 120) mitgeteilt worden.

In entsprechender Weise erhält man aus dem Kettenbruch:

$$(12)\qquad x=\frac{e^2-1}{e^2+1}=(0,1,3,5,\ldots)=(0,\overline{2m-1})$$

die Entwicklung von:

$$(13)\qquad y=\frac{x+1}{-x+1}=e^2.$$

Man findet der Reihe nach:

$$(14)\qquad \begin{cases} x=(0,1,3,x_1)=\dfrac{3x_1+1}{4x_1+1} \\ y=(7,y_1) \end{cases}$$

Hieraus:

$$(15)\qquad y_1=\frac{x_1}{2}.$$

Sodann, indem man

$$x_1=(5,x_2),\, x_2=(7,x_3),\, x_3=(9,x_1'),$$

und allgemein:

$$(16)\quad x_1^{(\mu)}=(f_0(\mu+1),x_2^{(\mu)}),\, x_2^{(\mu)}=(f_1(\mu+1),x_3^{(\mu)}),\, x_3^{(\mu)}=(f_2(\mu+1),x_1^{(\mu+1)})$$

setzt, wo:

$$f_0(m)=6m-1,\; f_1(m)=6m+1,\; f_2(m)=6m+3$$

ist,

$$y_1=\frac{x_1}{2}=(2,1,1,y_2),\, y_2=\frac{x_2-1}{2}=(3,y_3),\, y_3=2x_3=(18,y_1'),$$
$$y_1'=\frac{x_1'}{2},\ldots$$

Daher wird allgemein:

$$(17)\qquad y_1^{(\mu)}=(g_0(\mu+1),1,1,y_2^{(\mu)}),\quad y_2^{(\mu)}=(g_1(\mu+1),y_3^{(\mu)}),$$
$$y_3^{(\mu)}=(g_2(\mu+1),y_1^{(\mu+1)}),$$

wobei:

$$g_0(m)=2+\frac{f_0(m)-f_0(1)}{2}=3m-1,\, g_1(m)=3+\frac{f_1(m)-f_1(1)}{2}=3m,$$
$$g_2(m)=18+4\cdot\frac{f_2(m)-f_2(1)}{2}=12m+6$$

gesetzt ist. Aus (14) und (17) ergibt sich nun:

$$y = e^2 = (7, \overline{3\,m - 1, 1, 1, 3\,m, 12\,m + 6}) \tag{18}$$

Einige weitere Beispiele für den Satz dieser Nummer entnehme ich meiner in der Einleitung erwähnten Notiz. Es ist:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{e+1}{3} &= (1, 4, \overline{5, 4\,m - 3, 1, 1, 36\,m - 16, 1, 1, 4\,m - 2, 1, 1,} \\ &\qquad \overline{36\,m - 4, 1, 1, 4\,m - 1, 1, 5, 4\,m, 1}) \\ \frac{e+1}{4} &= (0, 1, 13, \overline{4\,m + 1, 16\,m + 12}) \\ 2\,e^2 &= (14, \overline{3\,m - 2, 3, 1, 3\,m - 2, 48\,m - 12, 13\,m - 1, 1, 3,} \\ &\qquad \overline{3\,m, 48\,m + 12}). \end{aligned}\right. \tag{19}$$

9.

Rechnet man zwei Irrationalzahlen in dieselbe Klasse, wenn die eine sich als lineare (ganze oder gebrochene) Funktion der anderen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen lässt, oder — was offenbar auf dasselbe hinauskommt — wenn zwischen den beiden Irrationalzahlen eine bilineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten stattfindet, so kann man den Satz von Nr. 6 auch so aussprechen: Falls die regelmässige Kettenbruchentwicklung der Irrationalzahl x so beschaffen ist, dass die Teilnenner von einem bestimmten ab eine arithmetische Reihe oder mehrere in einander geschachtelte arithmetische Reihen bilden, so findet das Gleiche für jede Irrationalzahl y statt, die in dieselbe Klasse wie x gehört. Zugleich sind die Ordnungen der arithmetischen Reihen bei beiden Irrationalzahlen die nämlichen. Ausgenommen ist die Ordnnng 0, die bei der einen Entwicklung fehlen, bei der anderen auftreten kann. Es erhebt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen man umgekehrt daraus, dass zwei Irrationalzahlen x, y Kettenbruchentwicklungen von der genannten Beschaffenheit liefern, schliessen kann, dass die beiden Zahlen in dieselbe Klasse gehören.

Diese Frage wird, wenigstens für eine Reihe von Fällen, durch einen Satz entschieden, den ich zunächst aussprechen und dann beweisen will. Der Satz lautet:

Wenn die Teilnenner der unendlichen regelmässigen Kettenbrüche

$$(1)\qquad x = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)$$

$$(2)\qquad y = (b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots)$$

schliesslich über alle Grenzen wachsen, wenn also $\lim\limits_{k=\infty} a_k = \lim\limits_{k=\infty} b_k = \infty$ ist, so kann nur dann zwischen x und y eine bilineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen, falls es möglich ist, die positiven ganzen Zahlen r und s und die Indices i und j so zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$(3)\quad b_j = \frac{r}{s}\, a_i,\ b_{j+1} = \frac{s}{r}\, a_{i+1},\ b_{j+2} = \frac{r}{s}\, a_{i+2},\ b_{j+3} = \frac{s}{r}\, a_{i+3}, \ldots \text{ in inf.}$$

stattfinden. Sind diese Gleichungen erfüllt, so ist y eine ganzzahlige (gebrochene) lineare Funktion von x, deren Determinante $\pm r\, s$ ist.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme ich an, es sei:

$$(4)\qquad y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},\quad \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \pm\, n,$$

wo x und y die durch die Kettenbrüche (1) und (2) definierten Irrationalitäten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier ganze Zahlen, n eine positive ganze Zahl bezeichnen. Nun sei der Teilnenner a_{i-1} so gewählt, dass alle auf ihn folgenden Teilnenner $a_i,\ a_{i+1}, \ldots$ die Zahl $2\,n - 1$ überschreiten. Setzt man dann:

$$(5)\qquad x = (a_0,\ a_1, \ldots a_{i-1},\ x_1)$$

und wählt überdies den Index i so gross, dass die Betrachtung von Nr. 7 anwendbar ist, so hat man:

$$(6)\qquad y = (b_0, b_1, \ldots b_{j-1}, y_1)$$

und zugleich:

$$(7)\qquad y_1 = \frac{r_1 x_1 - t_1}{s_1},$$

wo $r_1\, s_1 = n$ ist, r_1 und s_1 positive ganze Zahlen und t_1 eine zwischen $-r_1$ und s_1 liegende ganze Zahl bezeichnen.

Jetzt sei:

$$(8)\qquad x_1 = (a_i, x_2),\ x_2 = (a_{i+1}, x_3),\ x_3 = (a_{i+2}, x_4), \ldots$$

Nach dem Verfahren von Nr. 2 folgen aus diesen Gleichungen der Reihe nach die anderen:

$$(9)\begin{cases} y_1 = \dfrac{r_1 x_1 - t_1}{s_1} = (b_j, b_{j+1}, \dots b_{h-1}, y_2), \dfrac{r_1 a_i - t_1}{s_1} = (b_j, b_{j+1}, \dots b_{h-1}), \\ y_2 = \dfrac{r_2 x_2 - t_2}{s_2} = (b_h, b_{h+1}, \dots b_{l-1}, y_3), \dfrac{r_2 a_{i+1} - t_2}{s_2} = (b_h, b_{h+1}, \dots b_{l-1}), \\ y_3 = \dfrac{r_3 x_3 - t_3}{s_3} = (b_l, b_{l+1}, \dots \quad y_4), \dfrac{r_3 a_{i+2} - t_3}{s_3} = (b_l, b_{l+1}, \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Alle Zahlentripel r, s, t, die hier auftreten, genügen denselben Bedingungen, wie das erste r_1, s_1, t_1. Es können also nur eine endliche Zahl verschiedener Zahlentripel auftreten. Von jedem der überhaupt vorkommenden Zahlentripel nehme ich an, dass es unendlich oft auftritt. Diese Annahme ist gestattet; denn, falls sie nicht erfüllt wäre, könnte man i durch einen geeignet gewählten grösseren Index ersetzen und dadurch erreichen, dass die in endlicher Anzahl auftretenden Zahlentripel herausfallen. Ich betrachte nun alle diejenigen Gleichungen (9), in denen ein und dasselbe Zahlentripel, z. B. r_1, s_1, t_1 auftritt. Unter den entsprechenden Teilnennern $a_i, \dots$ der Entwicklung von x kommen gewiss unendlich viele vor, die (mod n) kongruent sind. Aber ich darf und will annehmen, dass jede Zahlklasse (mod n), die unter den Teilnennern $a_i \dots$ überhaupt vertreten ist, unendlich oft vertreten ist. Dies ist wiederum durch geeignete Verfügung über den Index i stets zu erreichen. Greift man nun unter den Teilnennern, welche demselben Tripel, etwa r_1, s_1, t_1 entsprechen, ein System solcher heraus, die (mod n) kongruent sind, etwa die Teilnenner $a_i, a_k, \dots$, so hat man ihnen entsprechend die Gleichungen:

$$\frac{r_1 a_i - t_1}{s_1} = (b_j, b_{j+1}, \dots b_{h-1}), \frac{r_1 a_k - t_1}{s_1} = \left(b_j + \frac{r_1 (a_k - a_i)}{s_1}, b_{j+1}, \dots b_{h-1}\right), \dots$$

Würde nun $\dfrac{r_1 a_i - t_1}{s_1}$ nicht eine ganze Zahl sein, also der Kettenbruch $(b_j, b_{j+1}, \dots b_{h-1})$ mehr als einen Teilnenner aufweisen, so würden die Zahlen $b_{j+1}, \dots b_{h-1}$ unendlich oft unter den Teilnennern von y wiederkehren. Dies widerspricht aber der Annahme $\lim\limits_{k=\infty} b_k = \infty$. Folglich ist $\dfrac{r_1 a_i - t_1}{s_1}$ und aus den entsprechenden Gründen jede der Zahlen $\frac{r_2 a_{i+1} - t_2}{s_2}$, $\frac{r_3 a_{i+3} - t_3}{s_3}, \ldots$ eine ganze Zahl. Die Gleichungen (9) lauten dementsprechend:

$$
(9') \qquad \begin{cases} y_1 = \frac{r_1 x_1 - t_1}{s_1} = (b_j, y_2), & \frac{r_1 a_i - t_1}{s_1} = b_j, \\ y_2 = \frac{r_2 x_2 - t_2}{s_2} = (b_{j+1}, y_3), & \frac{r_2 a_{i+1} - t_2}{s_2} = b_{j+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

Setzt man nun in die erste Gleichung $x_1 = a_i + \frac{1}{x_2}$, so findet man:

$$
y_2 = \frac{s_1}{r_1} x_2,
$$

d. h. es ist $r_2 = s_1$, $s_2 = r_1$, $t_2 = o$. Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung durch Substitution von $x_2 = a_{i+1} + \frac{1}{x_3}$, dass die dritte Gleichung:

$$
y_3 = \frac{s_2 x_3}{r_2} = \frac{r_1 x_3}{s_1}
$$

lautet u. s. f. Da das erste Tripel sich wiederholt, so muss auch notwendig $t_1 = o$ sein und die Gleichungen (9') gewinnen also schliesslich, wenn der Einfachheit halber noch r für r_1 und s für s_1 geschrieben wird, die Gestalt:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{r x_1}{s} = (b_j, y_2), & \frac{r a_i}{s} &= b_j, \\
y_2 &= \frac{s x_2}{r} = (b_{j+1}, y_3), & \frac{s a_{i+1}}{r} &= b_{j+1}, \\
y_3 &= \frac{r x_3}{s} = (b_{j+2}, y_4), & \frac{r a_{i+2}}{s} &= b_{j+2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Hiermit ist der erste Teil des obigen Satzes bewiesen. Der zweite Teil ergibt sich auf die leichteste Weise. Ist nämlich:

$$
b_j = \frac{r}{s} a_i, \; b_{j+1} = \frac{s}{r} a_{j+1}, \; b_{j+2} = \frac{r}{s} a_{i+2}, \ldots
$$

so bestätigt man sofort, dass zwischen den Grössen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (a_i, a_{i+1}, \ldots) \\
y_1 &= (b_j, b_{j+1}, \ldots)
\end{aligned}
$$

die Relation $y_1 = \frac{r}{s} x_1$ besteht. Da aber $x = (a_0, a_1, \ldots)$ aequivalent zu x_1 und $y = (b_0, b_1, \ldots)$ aequivalent zu y_1 ist, so folgt aus $y_1 = \frac{r}{s} x_1$ eine Relation der Gestalt $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, wo $\alpha \delta - \beta \gamma = \pm r s$ ist.

Der obige Satz lässt sich, wie ich nun zeigen will, noch auf eine andere, sehr bemerkenswerte Form bringen. Die Gleichungen (3) können stets und nur dann durch zwei positive ganze Zahlen r und s befriedigt werden, wenn

$$a_i a_{i+1} = b_j b_{j+1}, \quad a_{i+1} a_{i+2} = b_{j+1} b_{j+2}, \ldots \text{ in inf.}$$

ist, wenn also die beiden Zahlenreihen:

$$\begin{gathered} a_0 a_1, \ a_1 a_2, \ a_2 a_3, \ldots \\ b_0 b_1, \ b_1 b_2, \ b_2 b_3, \ldots \end{gathered}$$

nach Abtrennung der ersten i bezw. der ersten j Glieder identisch sind. Es folgt also:

Wenn die Teilnenner der unendlichen regelmässigen Kettenbrüche:

$$x = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \tag{1}$$

$$y = (b_0, b_1, b_2, \ldots) \tag{2}$$

schliesslich über alle Grenzen wachsen, so wird stets und nur dann zwischen x und y eine bilineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen, falls die beiden Zahlenreihen:

$$a_0 a_1, \ a_1 a_2, \ a_2 a_3, \ldots \tag{10}$$

$$b_0 b_1, \ b_1 b_2, \ b_2 b_3, \ldots, \tag{11}$$

abgesehen von einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern, identisch sind.

Sind die beiden Zahlenreihen (10) und (11), nachdem man von der ersten die ersten i Glieder, von der zweiten die ersten j Glieder abgetrennt hat, thatsächlich identisch, so findet man dann die zwischen x und y bestehende bilineare Relation, indem man x_1 und y_1 aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= (a_0, a_1, \ldots a_{i-1}, x_1), \\ y &= (b_0, b_1, \ldots b_{j-1}, y_1), \\ b_j x_1 &= a_i y_1 \end{aligned}$$

eliminiert. Dies geht unmittelbar aus der vorhergehenden Untersuchung hervor.

Die oben aufgeworfene Frage, wann die Grössen x und y, deren regelmässige Kettenbruchentwicklungen von der Form:

$$x = \left(a_0, a_1, \ldots a_{i-1}, \overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots \varphi_k(m)}\right) \tag{12}$$

$$y = \left(b_0, b_1, \ldots b_{j-1}, \overline{\psi_1(m), \psi_2(m), \ldots \psi_l(m)}\right) \tag{13}$$

sind, in dieselbe Klasse gehören, d. h. wann zwischen ihnen eine bilineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten besteht, wird nun immer dann durch den vorstehenden Satz entschieden, wenn unter den ganzen Funktionen $\varphi(m)$ und $\psi(m)$ sich keine auf eine Konstante reduziert.

Denn in diesem Falle wachsen die Teilnenner von x und y schliesslich über alle Grenzen. Wenn die Anzahl k der Funktionen $\varphi(m)$, wie das nach den Bemerkungen von Nr. 4 gestattet ist, als eine gerade Zahl vorausgesetzt wird, so hat der Kettenbruch für y, falls zwischen x und y eine bilineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten stattfindet, bei geeigneter Bestimmung der Indices i und j die Gestalt

$$y = \left(b_0, b_1, \ldots b_{j-1}, \overline{\frac{r}{s}\varphi_1(m), \frac{s}{r}\varphi_2(m), \frac{r}{s}\varphi_3(m), \ldots \frac{s}{r}\varphi_k(m)}\right)$$

Hieraus ergibt sich leicht eine Beziehung zwischen den Anzahlen der arithmetischen Reihen, aus denen sich die Teilnenner von x und y zusammensetzen, wobei für einen Kettenbruch der Gestalt (12) unter der „Anzahl“ der arithmetischen Reihen der Minimalwert zu verstehen ist, den die Zahl k der Funktionen $\varphi(m)$ für den Kettenbruch annehmen kann.

Ist die Anzahl der arithmetischen Reihen für einen der beiden Kettenbrüche eine ungerade Zahl, so ist sie für den andern notwendig das Doppelte dieser ungeraden Zahl, es sei denn, dass $\frac{r}{s} = 1$ ist, also die arithmetischen Reihen für beide Kettenbrüche völlig identisch sind: Wenn also die Teilnenner für die Entwicklungen von x und y je eine ungerade Anzahl von arithmetischen Reihen bilden, die für die eine Entwicklung nicht völlig dieselben sind wie für die andere, so kann zwischen x und y keine bilineare

Relation mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen. Beispielsweise kann keine derartige Relation zwischen $\frac{e-1}{e+1} = (0, \overline{4\,m - 2})$ und $\frac{e^2-1}{e^2+1} = (0, \overline{2\,m + 1})$ stattfinden, was übrigens auch aus der zweiten Form des Satzes dieser Nummer unmittelbar erhellt. Die Zahlen $\frac{e-1}{e+1}$ und $\frac{e^2-1}{e^2+1}$, und folglich auch die Zahlen e und e^2 gehören daher nicht derselben Klasse an, woraus hervorgeht, dass e nicht Wurzel einer ganzzahligen Gleichung dritten Grades ist. Wenn auch die neueren von Hilbert, dem Verfasser und Gordan gegebenen Beweise [1]) für die Transcendenz der Zahl e sehr einfach sind und insbesondere der Gordansche Beweis nur ganz elementare Hülfsmittel beansprucht, so ist es vielleicht doch nicht ohne Interesse, dass man aus den Kettenbruchentwicklungen von e und e^2 unmittelbar schliessen kann, dass e nicht Wurzel einer ganzzahligen Gleichung ersten, zweiten oder dritten Grades ist.

10.

Wenn die Teilnenner des regelmässigen Kettenbruches für die Irrationalzahl x von einem bestimmten ab eine arithmetische Reihe oder mehrere in einander geschachtelte arithmetische Reihen bilden, so besitzen auch gewisse andere Kettenbruchentwicklungen derselben Zahl ein ähnlich einfaches Bildungsgesetz. Ich will hier nur die Entwicklung nach „nächsten Ganzen", die wegen ihrer starken Konvergenz ein besonderes Interesse bietet, betrachten. Dabei muss ich mich aber, um nicht zu weitläufig zu werden, damit begnügen, die Methode anzugeben, nach welcher man das Bildungsgesetz der Entwicklung nach nächsten Ganzen für die hier betrachteten Irrationalzahlen in jedem besonderen Falle bestimmen kann. Der Leser wird aus den beigefügten Beispielen das allgemeine Gesetz für diese Entwicklungen leicht abstrahieren.

Bezeichnet zunächst x eine beliebige Zahl, so erhält man ihre Entwicklung nach nächsten Ganzen aus der Gleichungskette:

$$(1) \qquad x = \alpha_0 \pm \frac{1}{x_1},\ x_1 = \alpha_1 \pm \frac{1}{x_2},\ \ldots\ x_i = \alpha_i \pm \frac{1}{x_{i+1}},\ \ldots,$$

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 43.

die nach der Massgabe zu bilden ist, dass allgemein α_i die der Grösse x_i nächstliegende ganze Zahl sein soll und in der Gleichung $x_i = \alpha_i \pm \frac{1}{x_{i+1}}$ das obere oder untere Zeichen gelten soll, je nachdem α_i kleiner oder grösser als x_i ist. Der Kettenbruch für x, den man durch Elimination von $x_1, x_2, \ldots$ erhält, möge wieder durch die in Klammern geschlossene Reihe der Teilnenner bezeichnet werden, wobei jedoch, wenn in der Gleichung $x_i = \alpha_i \pm \frac{1}{x_{i+1}}$ das untere Zeichen gilt, der betreffende Teilnenner α_i einen oberen Punkt erhalten soll.

Durch die folgende Betrachtung erkennt man nun, dass man aus der regelmässigen Entwicklung der Zahl x:

(2) $$x = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

ihre Entwicklung nach nächsten Ganzen unmittelbar ableiten kann. Man bilde die Gleichungen:

(3) $$x = a_0 + \frac{1}{\xi_1},\ \xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2}, \ldots\ \xi_k = a_k + \frac{1}{\xi_{k+1}}, \ldots$$

Ist $a_1 \geqq 2$, so fällt offenbar die erste der Gleichungen (1) mit der Gleichung $x = a_0 + \frac{1}{\xi_1}$ zusammen, und allgemeiner werden die Gleichungsketten (1) und (3) soweit koincidieren, als unter den Teilnennern $a_1, a_2, \ldots$ die Zahl 1 nicht auftritt. Wenn aber a_k der erste Teilnenner ist, welcher den Wert 1 hat, so erkennt man aus den Gleichungen:

$$\xi_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\xi_k},\ \xi_k = 1 + \frac{1}{x'},$$

wo Bequemlichkeit halber x' für ξ_{k+1} geschrieben ist, dass an der k^{ten} Stelle in der Gleichungskette (1) die Gleichung:

$$\xi_{k-1} = a_{k-1} + 1 - \frac{1}{x' + 1}$$

steht. Denn von den beiden Zahlen a_{k-1} und $a_{k-1} + 1$, zwischen welchen ξ_{k-1} liegt, ist $a_{k-1} + 1$ die nächstliegende. Wenn also in der Reihe $a_1, a_2, \ldots$ das erste Glied, welches den Wert 1 hat, a_k ist, so darf man aus der Gleichung:

(4) $$x = (a_0, a_1, \ldots a_{k-1}, 1, x')$$

schliessen, dass:

$$(5) \qquad x = (a_0, a_1, \ldots \dot{a}_{k-1} + 1, x' + 1)$$

ein Teil der Entwicklung von x nach nächsten Ganzen ist.

Wendet man diese Bemerkung wiederholt an, zunächst auf die regelmässige Entwicklung von $x' + 1 = (a_{k+1} + 1, a_{k+2}, \ldots)$ u. s. f., so wird man nach und nach zu der Entwicklung von x nach nächsten Ganzen in ihrer ganzen Ausdehnung gelangen. [1])

Es sei beispielsweise aus der regelmässigen Entwicklung von $x = \sqrt{13}$:

$$x = (3, \overline{1, 1, 1, 1, 6})$$

die Entwicklung dieser Zahl nach nächsten Ganzen abzuleiten. Man hat dann folgende Gleichungen zu bilden:

$$x = (3, 1, x'), x' + 1 = (2, 1, x''), x'' + 1 = (2, 6, 1, x').$$

Aus diesen findet man der Reihe nach:

$$x = (\dot{4}, x' + 1), x' + 1 = (\dot{3}, x'' + 1), x'' + 1 = (2, \dot{7}, x' + 1),$$

sodass die Entwicklung von $\sqrt{13}$ nach nächsten Ganzen lautet:

$$\sqrt{13} = (\dot{4}, \overline{\dot{3}, 2, \dot{7}}).$$

Offenbar wird allgemein, wenn die regelmässige Entwicklung von x periodisch ist, wenn also x eine quadratische Irrationalität ist, auch die Entwicklung von x nach nächsten Ganzen eine periodische sein. (Vgl. Minnigerode. Ueber eine neue Methode, die Pell'sche Gleichung aufzulösen, Göttinger Nachrichten aus dem Jahre 1873.) Als weitere Beispiele betrachte ich die Entwicklungen der Zahlen e und e^2. Transformiert man nach der obigen Methode

---

[1]) Eine eingehende Untersuchung der Kettenbruchentwicklung nach nächsten Ganzen hat der Verfasser in Bd. 12 der Acta mathematica (1889) veröffentlicht. Mit Hülfe der oben angegebenen Transformation der regelmässigen Kettenbruchentwicklung in die nach nächsten Ganzen lassen sich manche Sätze, die für die erstere Entwicklung gelten, auf die letztere übertragen. Indessen dürfte es schwierig sein, auf diesem Wege die a. a. O. bewiesenen tiefer liegenden Sätze über die Entwicklung nach nächsten Ganzen, insbesondere den merkwürdigen Zusammenhang dieser Entwicklung mit einer nach ganz anderem Gesetze gebildeten zu entdecken.

die regelmässigen Kettenbrüche für diese Zahlen (vgl. Nr. 8) in die nach nächsten Ganzen fortschreitenden, so findet man:

$$e = \left(\dot{3}, \dot{4}, \overline{2, 2\,\dot{m} + 3}\right)$$

$$e^2 = \left(\dot{7}, \overline{3\,\dot{m}, 2, 3\,m, 12\,m + 6}\right),$$

zwei Gleichungen, welche die bemerkenswerte Thatsache enthalten, dass auch die Entwicklungen der Zahlen e und e^2 nach nächsten Ganzen ein sehr einfaches Bildungsgesetz aufweisen.

Zürich, den 9. Dezember 1895.