Note sur les complexes linéaires.

Par

J. Franel.

Considérons sur deux droites données de l'espace g et g' deux séries de points homographiques et soient x et x', y et y' deux paires quelconques de points correspondants. Les deux transversales $x\,y'$ et $x'\,y$, considérées comme directrices, engendrent une congruence linéaire; nous nous proposons de montrer que le lieu de ces congruences, quand x et y varient, est un complexe linéaire. Choisissons sur la droite g deux points fixes 1 et 2 de coordonnées respectives $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$; soient $1'$ et $2'$ les points correspondants de g', $(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \delta_1')$, $(\alpha_2', \beta_2', \gamma_2', \delta_2')$ leurs coordonnées. Les coordonnées du point variable x auront pour expression

$$\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \; \beta_1 + \lambda\beta_2, \; \gamma_1 + \lambda\gamma_2, \; \delta_1 + \lambda\delta_2$$

et celles du point correspondant x'

$$\alpha_1' + \lambda\alpha_2', \; \beta_1' + \lambda\beta_2', \; \gamma_1' + \lambda\gamma_2', \; \delta_1' + \lambda\delta_2',$$

λ désignant un paramètre arbitraire. En remplaçant λ par une autre valeur μ on obtiendra les coordonnées de deux autres points correspondants y et y'. Nous désignerons par $p_{12}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ les coordonnées de la droite 12 que nous définirons de la manière suivante:

$$p_{12}^{(1)} = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, \; p_{12}^{(2)} = \alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2, \; p_{12}^{(3)} = \alpha_1\delta_2 - \delta_1\alpha_2$$

$$p_{12}^{(4)} = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \; p_{12}^{(5)} = \delta_1\beta_2 - \beta_1\delta_2, \; p_{12}^{(6)} = \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2$$

En vertu de cette définition $p_{12}^{(i)} = -\,p_{21}^{(i)}$.

Les coordonnées des deux transversales xy', yx' sont alors égales respectivement à

$$\left.\begin{array}{l} p^{(i)}_{11'} + \lambda p^{(i)}_{21'} + \mu p^{(i)}_{12'} + \lambda\mu\, p^{(i)}_{22'} \\ p^{(i)}_{1'1} + \lambda p^{(i)}_{2'1} + \mu p^{(i)}_{1'2} + \lambda\mu\, p^{(i)}_{2'2} \end{array}\right. \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

de sorte que la congruence linéaire ayant ces transversales comme directrices est représentée par le système d'équations

$$\sum_{i=1}^{i=6} p^{(7-i)} \left[p^{(i)}_{11'} + \lambda p^{(i)}_{21'} + \mu p^{(i)}_{12'} + \lambda\mu\, p^{(i)}_{22'}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} p^{(7-\ )} \left[p^{(i)}_{1'1} + \lambda p^{(i)}_{2'1} + \mu p^{(i)}_{1'2} + \lambda\mu\, p^{(i)}_{2'2}\right] = 0$$

En ajoutant ces deux équations membre à membre on élimine les **deux** paramètres λ et μ; il vient, en effet

$$\Sigma p^{(7-i)} \left(p^{(i)}_{2'1} - p^{(i)}_{1'2}\right) = 0.$$

Le lieu de nos congruences linéaires est donc bien un complexe linéaire.

Si donc d'un point quelconque de l'espace P ou même la droite l qui rencontre les transversales xy' et yx' le lieu de cette droite l quand x et y varient est un plan. Cette propriété a été énoncée par M. *Neuberg* dans la nouvelle correspondance mathématique de Catalan[1]) (question 122); seulement M. *Neuberg* suppose que le point P est situé sur la surface du second degré engendrée par les génératrices xx'. On voit que cette restriction est inutile.

ZURICH, janvier 1895.

---

[1]) Voir aussi dans la collection de M. *Laisant*, les problèmes de géométrie analytique à 3 dimensions, page 28.