Sur le système de quatre droites dans l'espace.

Par

J. Franel.

Quatre droites arbitrairement choisies dans l'espace admettent, comme on sait, deux transversales communes. Suivant que ces transversales seront réelles et différentes, réelles mais confondues ou imaginaires nous dirons que la congruence linéaire déterminée par les quatre droites données est hyperbolique, parabolique ou elliptique. Dans le cas d'une congruence parabolique une des quatre droites données est tangente à l'hyperboloïde passant par les trois autres. Si les quatre droites considérées sont des génératrices de même système d'un hyperboloïde elles sont rencontrées par une infinité de transversales.

Soient P_1, P_2, P_3, P_4 et P_1', P_2', P_3', P_4' les sommets de deux tétraèdres; désignons par g_1, g_2, g_3, g_4 les droites joignant les sommets correspondants $P_1\ P_1'$, $P_2\ P_2'$, $P_3\ P_3'$, $P_4\ P_4'$ et par h_1, h_2, h_3, h_4 les intersections des faces correspondantes $P_2\ P_3\ P_4$, $P_2'\ P_3'\ P_4'$ etc.

Nous nous proposons d'établir les deux propositions suivantes qu'on peut envisager comme une généralisation du théorème relatif aux triangles perspectifs:

(I) La congruence linéaire définie par les droites h est de même genre que la congruence linéaire déterminée par les droites g. En particulier les deux transversales communes aux droites h coïncident en même temps que les deux transversales communes aux droites g.

(II) Si les droites g sont des génératrices de même système d'une surface du second degré, les droites h sont également des génératrices de même système d'une surface du second degré.

Les réciproques ne sont évidemment que les propriétés corrélatives.

I.

Nous rappelons tout d'abord un certain nombre de formules, établies ailleurs déjà, mais qui ne paraissent pas encore très-connues malgré leur caractère élémentaire et qui nous seront nécessaires dans la suite.[1])

Comme coordonnées de la droite joignant les deux points $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ nous choisirons les rapports des six quantités

$$p^{(1)} = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2,\ p^{(2)} = \alpha_1 \gamma_2 - \gamma_1 \alpha_2,\ p^{(3)} = \alpha_1 \delta_2 - \delta_1 \alpha_2,$$
$$p^{(4)} = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2,\ p^{(5)} = \delta_1 \beta_2 - \beta_1 \delta_2,\ p^{(6)} = \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2,$$

entre lesquelles subsiste l'identité

$$(1) \quad p^{(1)} p^{(6)} + p^{(2)} p^{(5)} + p^{(3)} p^{(4)} = \sum_{i=1}^{i=3} p^{(i)} p^{(7-i)} = 0.$$

Dans le cas des coordonnées rectangulaires nous définirons les coordonnées de la droite joignant les deux points $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ par les formules

$$p^{(1)} = \alpha_1 - \alpha_2, \quad p^{(2)} = \beta_1 - \beta_2, \quad p^{(3)} = \gamma_1 - \gamma_2,$$
$$p^{(4)} = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \delta_2,\ p^{(5)} = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2,\ p^{(6)} = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2,$$

---

[1]) On pourra consulter, en particulier,

Cayley: On the six Coordinates of a line, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. vol. XI.

F. Klein: Math. Ann. Bd. II.

Pasch: Zur Theorie der linearen Complexe, Journ. v. Crelle, Bd. 75.

Clebsch: Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von Lindemann, Bd. II.

de sorte qu'on aura toujours $\Sigma p^{(i)} p^{(7-i)} = 0$. Quand on aura plusieurs droites à considérer 1, 2, 3, . . . on dénotera leurs coordonnées respectives par $p_1^{(i)}$, $p_2^{(i)}$, $p_3^{(i)}$, . . . en réservant les lettres $p^{(i)}$ pour les coordonnées d'une droite variable 0.

La condition pour que les droites 1 et 2 se coupent s'exprime par l'équation

$$(2) \quad (12) = (21) = \sum_{i=1}^{i=6} p_1^{(i)} p_2^{(7-i)} = 0$$

dont nous désignons, pour abréger, le premier membre par (12) = (21); (12) est ce qu'on appelle l'invariant des deux droites considérées 1 et 2.

Deux droites qui se coupent 1 et 2, c'est-à-dire deux droites telles que (12) = 0 déterminent un faisceau; il est aisé d'obtenir les coordonnées d'un rayon quelconque 0 de ce faisceau en fonction d'un paramètre variable. Ces rayons 0 sont caractérisés par cette propriété de rencontrer toute transversale t des deux droites données de sorte que l'équation $(0\,t) = 0$ devra être une conséquence des deux équations $(1\,t) = 0$ $(2\,t) = 0$, d'où l'on conclut immédiatement

$$(3) \quad p^{(i)} = \lambda_1 p_1^{(i)} + \lambda_2 p_2^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Ces formules définissent d'ailleurs les six coordonnées d'une droite pour une valeur quelconque du rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ car l'équation $\sum_{i=1}^{i=3} p^{(i)} p^{(7-i)} = 0$ est satisfaite quelque soit $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ puisqu'on a, par hypothèse, (12) = 0. A chaque valeur de ce rapport correspond ainsi un rayon du faisceau et réciproquement.

Considérons maintenant un système de trois droites 1, 2, 3, et soit 0 une génératrice variable de la surface du second degré passant par ces trois droites et appartenant au même système que ces dernières. Ces génératrices 0 sont caractérisées par cette propriété d'être rencontrées par toute transversale t des droites données 1, 2 et 3. L'équation $(0\,t) = 0$ est donc une conséquence des équations $(1\,t) = 0$, $(2\,t) = 0$, $(3\,t) = 0$ de sorte que

$$(4) \quad p^{(i)} = \lambda_1 p_1{}^{(i)} + \lambda_2 p_2{}^{(i)} + \lambda_3 p_3{}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Seulement les paramètres λ ne sont pas arbitraires, ils sont liés par l'équation

$$(5) \quad \lambda_1 \lambda_2 \;(12) + \lambda_2 \lambda_3 \;(23) + \lambda_3 \lambda_4 \;(34) = 0$$

qui exprime que les quantités $p^{(i)}$ sont les coordonnées d'ûne droite. L'équation de condition (5), si l'on y regarde λ_1, λ_2, λ_3 comme les coordonnées homogènes d'un point du plan représente une conique. A chaque génératrice 0 correspond un point de cette conique et réciproquement. Les conditions pour que les quatre droites 0, 1, 2, 3 soient des génératrices de même système d'une surface du second degré peuvent encore s'exprimer en disant que tous les déterminants du 4^{me} ordre de la matrice

$$\left| \begin{matrix} p^{(1)} & p^{(2)} & \ldots & p^{(6)} \\ p_1{}^{(1)} & p_1{}^{(2)} & \ldots & p_1{}^{(6)} \\ p_2{}^{(1)} & p_2{}^{(2)} & \ldots & p_2{}^{(6)} \\ p_3{}^{(1)} & p_3{}^{(2)} & \ldots & p_3{}^{(6)} \end{matrix} \right|$$

sont égaux à 0.[1])

Si les droites données 1, 2, 3 sont dans un même plan l'équation (5) sera satisfaite identiquement, c'est-à-

---

[1]) Voir à ce sujet une question de M. *Lemoine* dans le journal de math. spéciales de Longchamps (question 109); voir aussi plus bas les formules (9), (10) et (11) du 3^{me} parag.

dire pour des valeurs quelconques de λ_1, λ_2, λ_3 et la formule (4) représentera, les paramètres λ étant maintenant arbitraires, une droite quelconque du plan (1 2 3).

La même formule représente évidemment quand les droites 1, 2, 3 passent par un même point (les paramètres étant arbitraires) les rayons de la gerbe ayant ce point pour sommet.

Si deux des droites données, 1 et 2 par-exemple, se coupent on aura $(12) = 0$ et l'équation (5) se décompose dans les deux suivantes:

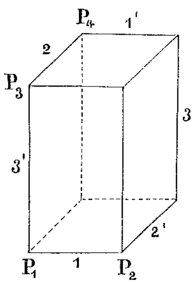
$$\lambda_3 = 0 \text{ et } \lambda_2 \, (23) + \lambda_1 \, (31) = 0.$$

Si l'on suppose d'abord $\lambda_3 = 0$ l'équation (4) se réduit à $p^{(i)} = \lambda_1 \, p_1{}^{(i)} + \lambda_2 \, p_2{}^{(i)}$ formule qui représente les rayons du faisceau (12). Si l'on suppose ensuite $\lambda_2 \, (23) + \lambda_3 \, (31) = 0$ et qu'on fasse $\lambda_1 \, p_1{}^{(i)} + \lambda_2 \, p_2{}^{(i)} = \varrho \, p_4{}^{(i)}$ les quantités $p_4{}^{(i)}$ représenteront les coordonnées d'une droite 4 appartenant au faisceau (12) et l'équation précédente exprime évidemment que ce rayon 4 rencontre la droite donnée 3. L'équation (4) qui peut se mettre sous la forme $p^{(i)} = \varrho \, p_4{}^{(i)} + \lambda_3 \, p_3{}^{(i)}$ représente dès lors les droites du faisceau (34). Dans ce cas particulier notre surface du second degré dégénère donc en deux faisceaux de droites. Nous appliquerons les formules qui précèdent à la démonstration d'un théorème intéressant proposé par M. *E. Genty* aux lecteurs des nouvelles annales de mathématiques (question 1531)[1]. Il s'agit de montrer que le volume du parallélipipède construit sur 3 génératrices quelconques de même système d'un hyperboloïde est constant. Soient 1, 2, 3 les trois géné-

[1]) Voir aussi dans la collection de M. *Laisant* les problèmes de géométrie analytique à 3 dimensions, page 28.

ratrices considérées; en menant par chacune d'elles des plans parallèles à chacune des deux autres on forme le parallélipipède dont nous avons à évaluer le volume V. Rapportons la figure à un système de 3 axes rectangulaires quelconque et soient $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ les coordonnées du sommet P_i (voir la figure).

On a tout d'abord, en vertu de la définition même des coordonnées $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$



$$V = \pm \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \\ p_1^{(3)} & p_2^{(3)} & p_3^{(3)} \end{vmatrix} = \pm \left| p_r^{(s)} \right|$$

D'autre part on a

$$(12) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{vmatrix} = \pm V = (23) = (31)$$

et, par conséquent,

$$2V^3 = \pm 2\,(12)\,(23)\,(31) = \pm \begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) \\ (21) & 0 & (23) \\ (31) & (32) & 0 \end{vmatrix} = \pm \left| (r, s) \right| \quad \begin{pmatrix} r = 1, 2, 3 \\ s = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

si l'on convient, ce qui est permis en vertu de l'équation (1), d'étendre la signification du symbole (r, s) au cas où les deux droites r et s coïncident et de poser $(r, r) = 0$.

Des égalités précédentes on tire finalement

$$2V = \pm \frac{\left| (r, s) \right|}{\left| p_r^{(s)} \right|^2} \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

or si l'on remplace les génératrices données 1, 2, 3 par 3 autres génératrices quelconques de même système, en d'autres termes si l'on remplace les coordonnées $p_1^{(i)}$, $p_2^{(i)}$, $p_3^{(i)}$ respectivement par

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{(1)} p_1^{(i)} + \lambda_2^{(1)} p_2^{(i)} + \lambda_3^{(1)} p_3^{(i)}, \\ &\lambda_1^{(2)} p_1^{(i)} + \lambda_2^{(2)} p_2^{(i)} + \lambda_3^{(2)} p_3^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots 6) \\ &\lambda_1^{(3)} p_1^{(i)} + \lambda_2^{(3)} p_2^{(i)} + \lambda_3^{(3)} p_3^{(i)}, \end{aligned}$$

où les quantités $\lambda_1^{(r)}$, $\lambda_2^{(r)}$, $\lambda_3^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$ doivent naturellement satisfaire à l'équation (5) le numérateur et le dénominateur se reproduisent multipliés par le carré du déterminant $|\lambda_r^{(s)}|$. Ce dernier n'est pas nul, les 3 points $(\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \lambda_3^{(r)})$ $(r = 1, 2, 3)$ étant sur la conique représentée par l'équation (5) et cette conique ne dégénérant pas en deux droites puisque les coëfficients (12), (23), (31) sont différents de 0. Le volume V n'est donc pas altéré, c'est un invariant absolu. Comme les droites 1′, 2′, 3′ sont des génératrices du second système de l'hyperboloïde considéré on voit que le volume du parallélipipède construit sur 3 génératrices quelconques du second système est égal aussi au volume du parallélipipède construit sur 3 génératrices quelconques du premier système.

II.

Une congruence linéaire est l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires. Soient $\Sigma a_i p^{(i)} = 0$ et $\Sigma b_i p^{(i)} = 0$ les équations des deux complexes. Choisissons quatre droites de la congruence 1, 2, 3, 4 linéairement indépendantes c'est-à-dire n'étant pas des génératrices de même système d'une surface du second degré. Les coordonnées d'une autre droite quelconque 0 de la congruence seront de la forme:

$$(1) \qquad p^{(i)} = \lambda_1 p_1^{(i)} + \lambda_2 p_2^{(i)} + \lambda_3 p_3^{(i)} + \lambda_4 p_4^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

où les paramètres λ sont assujettis à l'équation

$$\Sigma \; \lambda_i \; \lambda_k \; (i\,k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

qui exprime que les quantités $p^{(i)}$ sont les coordonnées d'une droite.

Les droites choisies 1, 2, 3, 4 admettent deux transversales réelles ou imaginaires; si t désigne l'une d'elles on aura

$$(1\,t) = 0, \quad (2\,t) = 0, \quad (3\,t) = 0, \quad (4\,t) = 0$$

et par suite aussi, en vertu des équations (1), $(0\,t) = 0$ pour toute droite de la congruence.

Réciproquement si la droite 0 rencontre les deux transversales t et t' communes aux quatre droites 1, 2, 3, 4 ses coordonnées pourront se mettre sous la forme (1). En effet soient $p'^{(i)}$ les coordonnées d'une droite variable $0'$. Les cinq équations linéaires et homogènes en $p'^{(i)}$

$$(00') = 0, \quad (10') = 0, \quad (20') = 0, \quad (30') = 0, \quad (40') = 0$$

admettront deux solutions à savoir les coordonnées des rayons t et t' ce qui exige, comme on sait, que tous les déterminants du 5$^{\text{me}}$ ordre de la matrice

$$\begin{vmatrix} p^{(1)} & \dots & p^{(6)} \\ p_1^{(1)} & \dots & p_1^{(6)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p_4^{(1)} & \dots & p_4^{(6)} \end{vmatrix} \quad \text{soient nuls.}$$

De ces conditions résultent immédiatement les formules (1).

Notre congruence se compose donc de tous les rayons qui rencontrent à la fois les deux transversales t et t'. Ceci suppose que ces deux transversales sont distinctes. Examinons maintenant le cas où elles coïncident; l'une des quatre droites 1, 2, 3, 4 est alors tangente à la surface du second degré déterminée par les trois autres. Cherchons tout d'abord la condition pour qu'il en soit ainsi.

Les droites 1, 2, 3 déterminent un hyperboloïde dont les génératrices (du système auquel appartiennent 1, 2, 3) sont représentées par les formules

$$p^{(i)} = \mu_1 p_1^{(i)} + \mu_2 p_2^{(i)} + \mu_3 p_3^{(i)} \tag{3}$$

où μ_1, μ_2, μ_3 satisfont à l'équation

$$\mu_1 \mu_2 (12) + \mu_2 \mu_3 (23) + \mu_3 \mu_1 (31) = 0. \tag{4}$$

La droite 4 rencontre, en général, deux de ces génératrices ; les valeurs correspondantes de μ_1, μ_2, μ_3 s'obtiennent en résolvant l'équation (4) et l'équation

$$\mu_1 (14) + \mu_2 (24) + \mu_3 (34) = 0. \tag{5}$$

Ces équations (4) et (5), si l'on y regarde μ_1, μ_2, μ_3 comme les coordonnées d'un point du plan, représentent une conique et une droite. La condition pour que cette conique et cette ligne droite soient tangentes, c'est-à-dire pour que les transversales t et t' coïncident peut s'écrire sous la forme

$$|(i, k)| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

Cette condition exprime aussi que la transversale t (ou t') appartient à la congruence linéaire considérée à laquelle nous proposons d'appliquer le nom de parabolique.

Il est évident d'ailleurs que dans les formules (1) on peut remplacer les droites 1, 2, 3, 4 par quatre autres rayons de la congruence pourvu que ces derniers soient linéairement indépendants. En particulier donc notre congruence parabolique sera représentée par les équations

$$p^{(i)} = \lambda_1 p_1^{(i)} + \lambda_2 p_2^{(i)} + \lambda_3 p_3^{(i)} + \lambda' p'^{(i)} \tag{7}$$

$p'^{(i)}$ désignant les coordonnées de la transversale unique t. Puisqu'on a

$$(1\,t) = 0, \quad (2\,t) = 0, \quad (3\,t) = 0$$

la relation entre λ_1, λ_2, λ_3, λ' se réduit à

$$(8) \qquad \lambda_1 \lambda_2 \; (12) + \lambda_2 \lambda_3 \; (23) + \lambda_3 \lambda_1 \; (31) = 0$$

qui ne contient pas λ', de sorte que λ' pourra prendre des valeurs arbitraires indépendantes de λ_1, λ_2, λ_3.

Si donc on fait, pour abréger,

$$\lambda''\, p''^{(i)} = \lambda_1\, p_1{}^{(i)} + \lambda_2\, p_2{}^{(i)} + \lambda_3\, p_3{}^{(i)}$$

les quantités $p''^{(i)}$ seront les coordonnées d'une certaine droite l; cette droite l est une génératrice quelconque de l'hyperboloïde déterminé par les droites 1, 2, et 3 et appartenant au même système que ces dernières; elle rencontre, par-conséquent, la droite l en un point déterminé M. Les droites de notre congruence sont alors représentées par les formules

$$(9) \qquad p^{(i)} = \lambda''\, p''^{(i)} + \lambda'\, p'^{(i)}.$$

Si l'on attribue à λ_1, λ_2, λ_3 des valeurs déterminées satisfaisant à l'équation (8) puis qu'on fasse varier λ' l'équation (9) représentera un faisceau de rayons ayant M comme sommet et située dans le plan (t, l). Quand λ_1, λ_2, λ_3 varient le point M se déplace sur t et le plan (t, l) qui est le plan tangent en M à l'hyperboloïde (1, 2, 3) tourne autour de t. La série des points de contact M est homographique au faisceau des plans tangents. Il en résulte que notre congruence linéaire parabolique se compose d'une infinité de faisceaux de droites ayant leurs sommets sur t et dont les plans passent par t, les sommets et les plans de ces faisceaux formant deux séries homographiques.

Si dans l'équation (2) on regarde λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 comme les coordonnées d'un point de l'espace on aura établi une correspondance univoque entre les rayons d'une congruence linéaire et les points d'une surface du second ordre. Aux points d'une conique tracée sur la surface correspondent les génératrices d'un hyperboloïde appartenant à la congruence; aux points d'une génératrice de la quadrique correspondent les rayons d'un faisceau de la congruence. Le sommet de ce faisceau est évidemment sur l'une des directrices t ou t' et son plan passe par l'autre. Ces directrices seront réelles ou imaginaires en même temps que les génératrices de la quadrique et suivant le signe du déterminant $|(i\,k)|$ que nous appellerons le déterminant des quatre droites 1, 2, 3, 4. Si la congruence linéaire est parabolique la surface correspondante est un cône et la directrice unique de la congruence correspond au sommet du cône.

Un complexe linéaire est déterminé par 5 droites 1, 2, . . 5 pourvu qu'elles soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire pourvu qu'elles ne fassent pas partie d'une congruence linéaire. Les coordonnées d'un rayon quelconque du complexe sont alors déterminées par les formules

$$(10)\qquad p^{(i)} = \lambda_1\, p_1{}^{(i)} + \lambda_2\, p_2{}^{(i)} + \lambda_3\, p_3{}^{(i)} + \lambda_4\, p_4{}^{(i)} + \lambda_5\, p_5{}^{(i)}$$

où les λ sont liés par l'équation

$$(11)\qquad \Sigma\, \lambda_i\, \lambda_k\, (i\,k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots 5)$$

qui exprime que les $p^{(i)}$ sont les coordonnées d'une droite. A chaque rayon du complexe linéaire correspond ainsi un point de la surface du second degré, dans l'espace à quatre dimensions, que représente l'équation (11) et réciproquement et de cette correspondance univoque découlent immédiatement les constructions connues du complexe linéaire[1]).

Ce dernier est dit spécial lorsque tous ses rayons rencontrent une même droite t (l'axe du complexe). Les cinq équations

$$(1\,t) = 0, \quad (2\,t) = 0, \ldots \quad (5\,t) = 0$$

ont alors une solution commune de sorte que le déterminant $|(i\,k)|$ $(i, k = 1, 2, \ldots 5)$ est égal à 0. L'équation $|(i\,k)| = 0$ montre que l'axe t fait partie du complexe; la surface du second degré représentée par l'équation (11) a dans ce cas un point conique ou singulier auquel correspond précisément l'axe du complexe.

Si dans l'équation $|(i\,k)| = 0$ on regarde les coordonnées $p_5^{(i)}$ comme variables elle représentera un complexe du 2^me ordre lieu des rayons qui ont avec les droites données 1, 2, 3, 4 une transversale commune. Ce complexe se décompose évidemment en deux complexes linéaires spéciaux ayant pour axes les deux directrices de la congruence linéaire (1, 2, 3, 4).

Des formules établies dans ce paragraphe et des équations d'équilibre d'un système de forces résultent immédiatement les propositions suivantes:[2])

---

[1]) Voir, par-exemple,

Reye, Géom. de position, trad. 0 chemin, vol. II, 10^me leçon.

Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liliengeometrie, erster Teil.

[2]) Voir *Möbius*, Lehrbuch der Statik.

Sturm, Annali di Matem. sér. II, vol. 7, page 226.

Darboux, Note insérée dans la mécanique de Despeyrons, 1^er volume.

Appell, Traité de mécanique rationnelle, 1^er volume, page 137 et suivantes.

Pour qu'on puisse diriger suivant quatre droites des forces se faisant équilibre il faut et il suffit que ces quatre droites soient des génératrices de même système d'une surface de second ordre.

Pour qu'on puisse diriger suivant 5 droites des forces se faisant équilibre il faut et il suffit que ces cinq droites appartiennent à une congruence linéaire.

Pour qu'on puisse diriger suivant 6 droites des forces se faisant équilibre il faut et il suffit que ces six droites appartiennent à un complexe linéaire.[1])

III.

Passons maintenant à la démonstration de nos deux théorèmes. Soient $P_1, P_2, P_3, P_4, P_1', P_2', P_3', P_4'$ les sommets des deux tétraèdres considérés, α_i, β_i γ_i, δ_i les coordonnées du sommet P_i et

$$(1)\quad \alpha'_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik}\,\alpha_k\,,\quad \beta'_i = \sum_k a_{ik}\,\beta_k\,,\quad \gamma'_i = \sum_k a_{ik}\,\gamma_k$$

$\delta'_i = \sum_k a_{ik}\,\delta_k$ celles du sommet P_i'.

La droite $P_i P_i'$ sera désignée par g_i, ses coordonnées par $g_i^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots 6)$ et l'invariant des deux droites g_i, g_j par $(g_i g_j) = (g_j g_i)$ comme précédemment. Les coordonnées de l'arête $P_r P_s$ qui sont définies par les formules du premier paragraphe seront, par raison de symetrie, dénotées $p_{rs}^{(i)}$:

---

[1]) Par cette expression il suffit nous voulons dire que suivant 4, 5 ou 6 droites appartenant respectivement au même système de génératrices d'une surface du second degré, à une congruence linéaire ou à un complexe linéaire on peut toujours diriger 4, 5 ou 6 forces se faisant équilibre.

(2) $\quad p_{rs}^{(1)} = \alpha_r \beta_s - \beta_r \alpha_s, \; p_{rs}^{(2)} = \alpha_r \gamma_s - \gamma_r \alpha_s,$ etc.

On aura donc $p_{rs}^{(i)} = - p_{sr}^{(i)}$ et, si l'on convient d'étendre cette définition au cas où les indices r et s sont égaux $p_{rr}^{(i)} = 0$. L'invariant des deux arêtes $P_1 P_2$, $P_3 P_4$ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

que nous désignerons, pour abréger, par (1 2 3 4). Des formules (1) on tire les valeurs des coordonnées de la droite g_i:

(3) $$g_i^{(r)} = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} \; p_{ik}^{(r)} \qquad (r = 1, 2 \; . \; . \; . \; 6)$$

d'où

$$(g_i g_j) = \sum_{r=1}^{r=6} g_i^{(r)} \; g_j^{(7-r)} = (a_{ik} \, . \, a_{jl} - a_{il} \, . \, a_{jk}) \; (i \, k \, j \, l)$$

les nombres i, k, j, l, quand i et j sont différents étant identiques, à l'ordre près, aux nombres 1, 2, 3, 4. On pourra donc faire

(4) $$(g_i g_j) = (1\;2\;3\;4) \; (a_{im} \; a_{jn} - a_{in} \; a_{jm})$$

les nombres m et n, identiques à k et l, étant choisis dans un ordre tel que la permutation $i\,m\,j\,n$ des nombres 1 2 3 4 soit une permutation paire ou de la première classe.

Le déterminant D des quatre droites g_i a donc pour expression

(5) $$D = (1\;2\;3\;4)^4 \; \left| (a_{im} a_{jn} - a_{in} a_{jm}) \right| \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Cherchons maintenant les coordonnées des droites h_i intersections des faces correspondantes des deux tétraèdres. Les coordonnées de la droite h_1 située dans les deux plans $P_2\,P_3\,P_4$, $P_2'\,P_3'\,P_4'$ seront, d'après les équations (4) du premier paragraphe de la forme

$$h_1^{(r)} = \mu_{12}\,p_{34}^{(r)} + \mu_{13}\,p_{42}^{(r)} + \mu_{14}\,p_{23}^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots 6).$$

Exprimons que cette droite rencontre les deux arêtes $P_2'\,P_3'$, $P_2'\,P_4'$; il viendra

$$0 = \mu_{12}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}) + \mu_{13}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + \mu_{14}\,(a_{21}\,a_{34} - a_{31}\,a_{24}),$$
$$0 = \mu_{12}\,(a_{21}\,a_{42} - a_{41}\,a_{22}) + \mu_{13}\,(a_{21}\,a_{43} - a_{41}\,a_{23}) + \mu_{14}\,(a_{21}\,a_{44} - a_{41}\,a_{24}),$$

d'où l'on conclut que les quantités μ_{12}, μ_{13}, μ_{14} sont proportionnelles aux mineurs A_{12}, A_{13}, A_{14} du déterminant

(6) $$d = |\,a_{ik}\,| \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

qui correspondent aux éléments a_{12}, a_{13}, a_{14}.

On pourra donc faire

(7) $$\begin{aligned} h_1^{(r)} &= A_{12}\,p_{34}^{(r)} + A_{13}\,p_{42}^{(r)} + A_{14}\,p_{23}^{(r)}, \\ -\,h_2^{(r)} &= A_{23}\,p_{41}^{(r)} + A_{24}\,p_{13}^{(r)} + A_{21}\,p_{34}^{(r)}, \\ h_3^{(r)} &= A_{34}\,p_{12}^{(r)} + A_{31}\,p_{24}^{(r)} + A_{32}\,p_{41}^{(r)}, \\ -\,h_4^{(r)} &= A_{41}\,p_{23}^{(r)} + A_{42}\,p_{31}^{(r)} + A_{13}\,p_{12}^{(r)}, \end{aligned} \qquad (r = 1, 2, \ldots 6)$$

d'où $(h_1\,h_2) = (A_{13}\,.\,A_{24} - A_{14}\,.\,A_{23})\;(1\;3\;2\;4)$ et généralement $(h_i\,h_j) = (A_{im}\,A_{jn} - A_{in}\,A_{jm})\;(1\;2\;3\;4)$ les quatre nombres i, m, j, n, quand i et j sont différents formant une permutation paire des nombres 1, 2, 3, 4.

Le déterminant Δ des quatre droites h_i est donc égal à

$$(1\;2\;3\;4)^4\;|\;(A_{im}\,A_{jn} - A_{in}\,A_{jm})\;| \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

c'est-à-dire en vertu d'une propriété bien connue des déterminants adjoints égal à $d^4\,.\,D$.

L'équation

(8) $\Delta = d^4\,.\,D$ montre que les déterminants D et Δ s'annulent en même temps et sont toujours de même

signe. Les congruences linéaires déterminées d'une part par les droites g et d'autre part par les droites h sont donc bien de même genre, c'est-à-dire en même temps hyperboliques, paraboliques ou elliptiques comme il s'agissait de l'établir.

Le déterminant Δ s'annule aussi quand d est nul; dans ce cas les quatre sommets P_i' et, par-suite, les quatre droites h_i sont dans un même plan.

Reste à démontrer le second théorème.

Si les droites g_i sont des génératrices de même système d'une surface du second ordre on pourra déterminer quatre multiplicateurs σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, différents de 0 et tels que $\sigma_1\, g_1^{(r)} + \sigma_2\, g_2^{(r)} + \sigma_3\, g_3^{(r)} + \sigma_4\, g_4^{(r)} = 0$ $(r = 1, 2, \ldots 6)$. En remplaçant les $g_i^{(r)}$ par leurs valeurs ces équations deviennent

$$\begin{aligned} 0 = & (\sigma_1\, a_{12} - a_{21}\, \sigma_2)\, p_{12}^{(r)} + (\sigma_1\, a_{13} - a_{31}\, \sigma_3)\, p_{13}^{(r)} \\ & + (\sigma_1\, a_{14} - a_{41}\, \sigma_4)\, p_{14}^{(r)} + (\sigma_2\, a_{23} - a_{32}\, \sigma_3)\, p_{23}^{(r)} \\ & + (\sigma_2\, a_{24} - a_{42}\, \sigma_4)\, p_{24}^{(r)} + (\sigma_3\, a_{34} - \sigma_4\, a_{43})\, p_{34}^{(r)}. \end{aligned}$$

Si les coëfficients $\sigma_1\, a_{12} - a_{21}\, \sigma_2$, $\sigma_1\, a_{13} - a_{31}\, \sigma_3$, ... n'étaient pas tous nuls les six arêtes du tétraèdre P_1, P_2, P_3, P_4 appartiendraient à un complexe linéaire. Or cinq quelconques de ces arêtes déterminent un complexe linéaire spécial auquel la sixième arête n'appartient évidemment pas. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Pour que les quatre droites g soient des génératrices de même système d'une surface du second degré il faut et il suffit que l'on puisse déterminer 4 grandeurs σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 différentes de 0 (ou plus exactement leurs rapports) satisfaisant aux six équations:

$$(9)\quad \begin{aligned} \sigma_1\, a_{12} - a_{21}\, \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_1\, a_{13} - a_{31}\, \sigma_3 &= 0, \\ \sigma_1\, a_{14} - a_{41}\, \sigma_4 &= 0, \\ \sigma_2\, a_{23} - a_{32}\, \sigma_3 &= 0, \\ \sigma_2\, a_{24} - a_{42}\, \sigma_4 &= 0, \\ \sigma_3\, a_{34} - a_{43}\, \sigma_4 &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on suppose, par-exemple, qu'aucune des quantités a_{ik}, où i et k sont différents, n'est égale à 0; en d'autres termes si l'on suppose qu'aucune des droites g_i n'est située dans l'une des faces du tétraèdre P_1, P_2, P_3, P_4 les conditions pour que les équations (9) soient compatibles pourront se mettre sous la forme

$$(10)\quad \begin{aligned} a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{21}\, a_{32}\, a_{13} &= 0, \\ a_{13}\, a_{34}\, a_{41} - a_{31}\, a_{43}\, a_{14} &= 0, \\ a_{21}\, a_{14}\, a_{42} - a_{12}\, a_{41}\, a_{24} &= 0. \end{aligned}$$

A ces équations on peut ajouter celle-ci:

$$(11)\quad a_{23}\, a_{34}\, a_{42} - a_{32}\, a_{43} \,.\, a_{24} = 0$$

qui est une conséquence des précédentes.

La première de ces équations exprime que les plans menés par les arêtes $P_1\ P_4$, $P_2\ P_4$, $P_3\ P_4$ et par les droites respectives g_1, g_2, g_3 se coupent suivant la même droite l_4. Il est clair que les quatre droites ainsi obtenues sont les génératrices du second système de notre surface passant respectivement par les sommets P_1, P_2, P_3, P_4. Si $a_{12} = 0$ on aura aussi, en vertu de la première des équations (9) $a_{21} = 0$ et pour que les équations restantes soient compatibles il faudra, en outre, que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

$$\begin{aligned} a_{13} \,.\, a_{34} \,.\, a_{41} - a_{31} \,.\, a_{43} \,.\, a_{14} &= 0, \\ a_{23} \,.\, a_{34} \,.\, a_{42} - a_{32} \,.\, a_{43} \,.\, a_{24} &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas g_1 est située dans le plan $P_1\ P_3\ P_4$

et g_2 dans le plan $P_2 P_3 P_4$; l'arête $P_3 P_4$ est une génératrice du second système.

Si l'on a, à la fois, $a_{12} = 0$, $a_{34} = 0$ on aura aussi $a_{21} = 0$, $a_{43} = 0$; les six équations (9) se réduisent à quatre et pour qu'elles soient compatibles il faudra que l'on ait

$$(12) \qquad a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{24} \cdot a_{41} = a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{42} \cdot a_{14}.$$

Les génératrices g_1, g_2, g_3, g_4 sont situées dans les plans respectifs $P_1 P_3 P_4$, $P_2 P_3 P_4$, $P_3 P_1 P_2$, $P_4 P_1 P_2$. Si l'on appelle Q_1, Q_2 les points d'intersection de g_1 et g_2 avec l'arête $P_3 P_4$ et Q_3, Q_4 les points d'intersection de g_3 et g_4 avec l'arête $P_1 P_2$ on verra sans peine que l'équation (12) exprime l'égalité des rapports anharmoniques $(P_3 P_4 Q_1 Q_2)$ et $(Q_3 Q_4 P_1 P_2)$. Les deux arêtes $P_1 P_2$, $P_3 P_4$ sont, dans ce cas, des génératrices du second système de la surface du second degré passant par les droites g.

Semblablement pour que les droites h_i soient des génératrices de même système d'une surface du second degré il faut et il suffit que les six équations suivantes soient compatibles:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \varrho_1 A_{12} - \varrho_2 A_{21} &= 0, \\ \varrho_1 A_{13} - \varrho_3 A_{31} &= 0, \\ \varrho_1 A_{14} - \varrho_4 A_{41} &= 0, \\ \varrho_2 A_{23} - \varrho_3 A_{32} &= 0, \\ \varrho_2 A_{24} - \varrho_4 A_{42} &= 0, \\ \varrho_3 A_{34} - \varrho_4 A_{43} &= 0. \end{aligned}$$

Notre problème est donc ramené à celui-ci:

Montrer que si les équations (9) sont compatibles les équations (13) le sont aussi. A cet effet multiplions les six équations (9) par les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ obtenue}$$

en supprimant les deux premières lignes dans le déterminant d, c'est-à-dire par les facteurs respectifs

$$\begin{array}{lll} (a_{33}\, a_{44} - a_{34}\, a_{43}) & (a_{34}\, a_{42} - a_{32}\, a_{44}) & (a_{32}\, a_{43} - a_{42}\, a_{33}) \\ (a_{31}\, a_{44} - a_{34}\, a_{41}) & (a_{33}\, a_{41} - a_{31}\, a_{43}) & (a_{31}\, a_{42} - a_{41}\, a_{32}) \end{array}$$

et ajoutons membre à membre. Il vient

$$\sigma_1\, A_{21} - \sigma_2\, A_{12} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{A_{12}}{\sigma_1} - \frac{A_{21}}{\sigma_2} = 0.$$

Il faut remarquer que les multiplicateurs précédents ne sont pas tous nuls si l'on suppose d différent de 0, ce qui est permis car si $d = 0$ les quatre droites h_i sont dans un même plan.

Des équations (9) résultent de la même manière les équations

$$\frac{A_{13}}{\sigma_1} - \frac{A_{31}}{\sigma_3} = 0,$$

$$\frac{A_{14}}{\sigma_1} - \frac{A_{41}}{\sigma_4} = 0,$$

$$\frac{A_{23}}{\sigma_2} - \frac{A_{32}}{\sigma_3} = 0,$$

$$\frac{A_{24}}{\sigma_2} - \frac{A_{42}}{\sigma_4} = 0,$$

$$\frac{A_{34}}{\sigma_3} - \frac{A_{43}}{\sigma_4} = 0.$$

Les équations (13) sont donc bien compatibles, elles sont satisfaites en prenant

$$\varrho_i = \frac{1}{\sigma_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Notre second théorème est ainsi complètement démontré.

Dans ce qui précède nous avons supposé chacun des facteurs σ différent de 0; si $\sigma_4 = 0$ les trois droites g_1, g_2, g_3 appartiennent au même faisceau, la surface du second degré passant par les droites g dégénère en deux faisceaux de rayons. Les deux triangles $P_1\ P_2\ P_3$ et $P_1'\ P_2'\ P_3'$ sont alors dans le même plan et sont, en outre perspectifs; les côtés correspondants se coupent en trois points R_3, R_1, R_2 situés sur une droite l. Cette dernière droite rencontre h_3, h_1, h_2 précisément aux points R_3, R_1, R_2, elle est donc une génératrice de la surface du second degré passant par h_3, h_1, h_2. Le plan $P_1\ P_2\ P_3$ rencontre cette surface suivant une seconde droite qui appartient au même système que h_1, h_2, h_3 et qu'on pourra prendre pour h_4, celle-ci étant complètement indéterminée dans le plan $P_1\ P_2\ P_3$. On peut donc considérér le théorème comme encore vrai dans ce cas limite.

Parmi les couples de tétraèdres jouissant de la propriété énoncée dans notre second théorème nous citerons un tétraèdre et son conjugué par rapport à une surface quelconque du second degré[1]).

ZURICH, janvier 1895.

---

[1]) Voir *Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc., page 153.