Ueber den Schnitt zweier Kegel und über eine Steiner'sche Aufgabe betreffend ebene Curven.

Von

Prof. Dr. **A. Beck.**

(Fortsetzung und Schluss.)

XV. Doppelpunkte erster und zweiter Art der gemischten Trasse. Wir kehren nun wieder zum Schnitt zweier beliebigen Kegel zurück und geben zunächst eine directe Bestimmung der Zahlen δ'_{12} und δ''_{12}, welche die Anzahl der Doppelpunkte D'_{12} und D''_{12} erster und zweiter Art in der gemischten Trasse bezeichnen. Dabei lassen wir der Bequemlichkeit halber den untern Index 12 weg, so lange keine Verwechslung zu befürchten ist.

δ' ist die Anzahl der Tangenten von $\mathfrak{C}_1$, welche sich mit zwei zu ihnen homologen Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ in einem Punkt schneiden. Man bilde eine Correspondenz $(x\,x')$ von Strahlen durch P in folgender Weise: x schneidet $\mathfrak{C}_2$ in Punkten, welche, paarweise genommen, $\frac{1}{2}m_2(m_2-1)$ Punkte der Trasse $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{C}_2$ liefern. Von jedem dieser Punkte aus lege man eine Tangente an $\mathfrak{C}_1$ und den Strahl von P aus nach ihrem Berührungspunkt nenne man x'. Zu jedem Strahl x gehören also $\frac{1}{2}m_2(m_2-1)n_1$ Strahlen x'. Nun schneiden sich ferner auf einer beliebigen Tangente von $\mathfrak{C}_1$ μ_2 Paare zu einander homologer Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ ($\mu_2 =$ Ordnungszahl der Trasse $\mathfrak{T}_2$ von von $\mathfrak{C}_2$). Zu einem Strahl x' gehören somit $m_1\mu_2$ Strahlen x.

Jeder Doppelpunkt D' gibt eine Coincidenz, aber auch umgekehrt: zu jeder Coincidenz gehört ein Doppelpunkt D'. Damit ist also δ' als Zahl der Coincidenzen gefunden, nämlich:

$$\delta = m_1\,\mu_2 + \tfrac{1}{2}\,m_2{}^2 n_1 - \tfrac{1}{2} m_2 n_1.$$

Auf dieselbe Weise aber findet man für die Doppelpunkte zweiter Art:

$$\delta'' = m_2\,\mu_1 + \tfrac{1}{2} m_1{}^2 n_2 - \tfrac{1}{2} m_1 n_2.$$

Für die Summe ergibt sich unter Benutzung der nach der frühern Erklärung zu verstehenden Symbole $[m\,\mu]$ und $[m^2 n]$:

$$\delta' + \delta'' = [m\,\mu] + \tfrac{1}{2}[m^2 n] - \tfrac{1}{2}[m\,n].$$

Führt man für μ_1 und μ_2 ihre Werthe ein, so stimmt dieser Ausdruck genau mit dem früher gefundenen überein (VII).

XVI. Die Punkte E auf der gemischten Trasse. Es gibt auf der gemischten Trasse noch eine Gruppe von ausgezeichneten Punkten, die mit E bezeichnet werden mögen und die dadurch definiert sind, dass in jedem Punkt E sich zwei homologe Tangenten der einen Basiscurve und zwei andere zu einander homologe Tangenten der beiden Basiscurven schneiden. Je nachdem die beiden erstern Tangenten zur zweiten oder zur ersten Basiscurve gehören, werden wir den Punkt mit E' oder mit E'' und die betreffende Anzahl mit ε' oder ε'' bezeichnen.

Um ε' zu bestimmen, bilden wir eine Correspondenz $(x\,x')$ zon folgender Art: Ein Strahl x durch P schneide $\mathfrak{C}_2$ in A. Auf der zugehörigen Tangente a bestimme man die Punkte X, von welcher aus zwei andere zu einander homologe Tangenten an $\mathfrak{C}_2$ gehen und von jedem solchen Punkt X lege man eine Tangente an $\mathfrak{C}_1$, deren Berührungspunkt B' einen Strahl x' durch P liefert. Zu einem Strahl x gehören $m_2 n_1$ $(\mu_2 - m_2 + 1)$ Strahlen x' und zu einem Strahl x' gehören $m_1 (n_2 - 2)$ μ_2 Strahlen x. Da keine Coincidenzen in Abzug zn bringen sind, so ist ε' gleich der Anzahl der Coincidenzen:

$$\varepsilon' = \mu_2 [m\, n] - 2\, m_1\, \mu_2 - m_2{}^2\, n_1 + m_2\, n_1.$$

Für die Punkte E'' findet man auf dieselbe Weise:

$$\varepsilon'' = \mu_1 [m\, n] - 2\, m_2\, \mu_1 - m_1{}^2\, n_2 + m_1 n_2.$$

Für die Anzahl aller Punkte E wird

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' = [m\,n](\mu_1 + \mu_2) - 2[m\,\mu] - [m^2 n] + [m\,n].$$

Die Punkte E' (E'') sind offenbar Schnittpunkte der gemischten Trasse $\mathfrak{T}$ mit der Trasse $\mathfrak{T}_2$ $(\mathfrak{T}_1)$; aber sie bilden nicht das ganze System der Schnittpunkte; vielmehr kommen noch hinzu die δ' (δ'') Doppelpunkte erster (zweiter) Art, welche doppelt zu rechnen sind. In der That zeigen die gefundenen Werthe sofort, dass die Beziehungen erfüllt sind:

$$\mu \mu_2 \text{ oder } [m n]\, \mu_2 = \varepsilon' + 2\, \delta'$$

$$\mu \mu_1 \text{ oder } [m n]\, \mu_1 = \varepsilon'' + 2\, \delta''.$$

XVII. Zerfallende Basiscurve. Wenn eine Basiscurve $\mathfrak{C}$ zerfällt in zwei Curven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, so zerfällt ihre Trasse $\mathfrak{T}$ in drei Theile: 1) die Trasse $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{C}_1$, 2) die Trasse $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{C}_2$, 3) die gemischte Trasse $\mathfrak{T}_{12}$ von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, oder symbolisch:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_{12}.$$

Nun lassen sich die Singularitäten von $\mathfrak{T}$ $(\mu\, \nu \ldots)$ einerseits direct ausdrücken durch die Singularitäten von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ nach den Formeln in XII, XIII, XIV; andererseits lassen sich die Singularitäten von $\mathfrak{T}$ darstellen durch die Singularitäten von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_{12}$ und diese lassen sich ausdrücken durch die Singularitäten von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Man hat also eine nützliche Controle dadurch, dass die direct und indirect bestimmten Werthe einander gleich sein müssen.

Bei der indirecten Bestimmung ist zunächst offenbar:

$$\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_{12}, \quad \nu=\nu_1+\nu_2+\nu_{12}$$
$$\iota=\iota_1+\iota_2+\iota_{12}, \quad \varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_{12}.$$

Die dreifachen Punkte der Gesammttrasse bestehen aus den dreifachen Punkten von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ und den Doppelpunkten erster und zweiter Art der gemischten Trasse $\mathfrak{T}_{12}$, durch welche je eine der Trassen $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_1$ hindurchgehen muss. Die Doppelpunkte der Gesammttrasse bestehen aus den Doppelpunkten von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, aus den Doppelpunkten dritter Art der gemischten Trasse, aus den Punkten E der gemischten Trasse, durch welche je eine der Trassen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ hindurchgehen muss, und endlich aus den Schnittpunkten der beiden Trassen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$. Die Doppeltangenten der Gesammttrasse bestehen aus den Doppeltangenten von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_{12}$ und aus den gemeinsamen Tangenten je zweier dieser drei Trassen. Man hat also weiter:

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\delta_{12}'+\delta_{12}''$$
$$\Theta=\Theta_1+\Theta_2+\delta_{12}'''+\varepsilon_{12}+\mu_1\mu_2$$
$$\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_{12}+\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_{12}+\nu_2\nu_{12}.$$

Nun drücke man in diesen 7 Gleichungen alle Singularitäten von $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_{12}$ durch die Singularitäten von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ aus. Dabei ist auf den linken Seiten zu setzen:

$$m=m_1+m_2, \quad n=n_1+n_2, \quad k=k_1+k_2, \quad i=i_1+i_2$$
$$d=d_1+d_2+m_1m_2, \quad t=t_1+t_2+n_1n_2.$$

Man findet dann in der That, dass obige Gleichungen befriedigt werden.

XVIII. Die Doppelcurve der Developpabeln $\mathfrak{R}$. Man erkennt sofort, dass diese Doppelcurve in drei Theile zerfallen muss. Ein solches Zerfallen tritt ja auch bei der doppelt umschriebenen Developpabeln der Raumcurve $\mathfrak{R}$ ein, indem die beiden gegebenen Kegel selbst, als mehrfache Perspectivkegel von $\mathfrak{R}$, Theile dieser Developpabeln sind.

Es entsteht ein Theil $\mathfrak{D}'$ der Gesammtdoppelcurve als Ort von Schnittpunkten solcher Tangentenpaare von $\mathfrak{R}$, die ihre Berührungspunkte auf derselben Erzeugenden des Kegels $M_1 \mathfrak{C}_1$ haben. Wir wollen von zwei solchen Punkten oder Tangenten von $\mathfrak{R}$ sagen, dass sie einander zugeordnet seien für den Kegel M_1. In jedem Punkt einer zweiten Curve $\mathfrak{D}''$ schneiden sich solche Tangenten, die einander zugeordnet sind für den Kegel M_2 und der dritte Theil $\mathfrak{D}'''$ enthält die Schnittpunkte nicht zugeordneter Tangenten. Jede Doppelcurventangente ist die Schnittlinie der beiden zugehörigen Schmiegungsebenen von $\mathfrak{R}$. — Für diese drei Theile $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$ der Doppelcurve sind nun schon die Ordnungszahlen gefunden, nämlich die drei Zahlen δ', δ'', δ'''. Man kann aber δ' und δ'' noch auf eine zweite Art ableiten und zwar ohne Anwendung des Correspondenzprincips.

Da je zwei homologe Tangentialebenen der gegebenen Kegel sich in einer Tangente von $\mathfrak{R}$ schneiden, so schneidet eine Tangentialebene des ersten Kegels zwei zu ihr homologe Tangentialebenen des zweiten Kegels in zwei Tangenten, die nach der obigen Bezeichnung einander zugeordnet sind für M_1 und sich also in einem Punkt von $\mathfrak{D}'$ schneiden, welcher auf der Schnittlinie der beiden Tangentialebenen des zweiten Kegels liegt. Ersetzt man die Tangentialebene des ersten Kegels der Reihe nach durch ihre homologen des ersten Kegels, so erkennt man, dass je m_1 Punkte von $\mathfrak{D}'$ auf einer Geraden durch M_2 liegen, welche als Schnittlinie zweier zu einander homologen Tangentialebenen des zweiten Kegels eine Erzeugende des Kegels $M_2\mathfrak{T}_2$ ist.

Es ist aber weiter zu bemerken, dass die Curve $\mathfrak{D}'$ den Punkt M_2 zum vielfachen Punkt hat. Denn auf dem Kegel $M_2\mathfrak{C}_2$ gibt es $m_2 n_1$ Erzeugende, welche Tangenten von $\mathfrak{R}$ sind und zwar liegen die Berührungspunkte zu je m_2 auf einer Erzeugenden des Kegels $M_1\mathfrak{C}_1$. Dies gibt also $\frac{1}{2} n_1 m_2 (m_2 - 1)$ Aeste der Curve $\mathfrak{D}'$, welche durch M_2 hindurchgehen und in M_2 stationäre Tangenten haben, da zu allen jenen durch M_2 gehenden Tangenten von $\mathfrak{R}$ stationäre Schmiegungsebenen gehören. Die Doppelcurve $\mathfrak{D}'$ liegt somit auf dem Kegel $M_2\mathfrak{T}_2$ und zwar so, dass durch M_2 $\frac{1}{2} n_1 m_2 (m_2 - 1)$ Aeste mit stationären Tangenten gehen und dass auf jeder Erzeugenden des Kegels m_1 weitere Punkte von $\mathfrak{D}'$ liegen. Analoges gilt für die Curve $\mathfrak{D}''$ und den Kegel $M_1\mathfrak{T}_1$.

Es folgt aber aus dem Vorigen noch, dass durch M_2 auch Aeste von $\mathfrak{D}'''$ hindurchgehen, welche ebenfalls stationäre Tangenten haben. Die Anzahl dieser Aeste ist $\frac{1}{2} m_2^2 n_1 (n_1 - 1)$. Diese stationären Tangenten von $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'''$ geben nach denjenigen Punkten, in welchen sich die Tangenten der Punkte T_2 von $\mathfrak{C}_2$ paarweise schneiden, und zwar gehen die Tangenten von $\mathfrak{D}_1$ nach denjenigen Punkten, in welchen sich die Tangenten zweier zu einander homologen Punkte T_2 schneiden.

Legt man nun eine beliebige Ebene durch M_2, so ist nach dem Vorigen die Anzahl der in derselben liegenden Punkte von $\mathfrak{D}'$, d. h. die Ordnungszahl δ'

$$\delta' = m_1 \mu_2 + \frac{1}{2} n_1 m_2 (m_2 - 1).$$

Dies stimmt aber ganz überein mit dem in (XV) gefundenen Werth.

Jeder der in (XVI) betrachteten Punkte E' der gemischten Trasse liegt auf einer Tangente von $\mathfrak{R}$ und gleichzeitig auf einer Erzeugenden des Kegels $M_2\mathfrak{T}_2$, also gehört er zum Schnitt dieses Kegels mit der Developpabeln $\mathfrak{R}$ und zwar liegt er auf einem abgesonderten Theil $\mathfrak{E}'$ dieses Schnittes. Der vollständige Schnitt besteht aus der doppelt gerechneten Curve $\mathfrak{D}'$ und aus der von den Punkten E' bei variabler Basisebene erzeugten Curve $\mathfrak{E}'$ von der Ordnung ε'.

In jeder Tangentialebene des ersten Kegels liegen m_2 einander zugeordnete Tangenten von $\mathfrak{R}$, die sich in $\frac{1}{2}m_2(m_2-1)$ Punkten von $\mathfrak{D}'$ schneiden. Seien α_1 eine Tangente von $\mathfrak{C}_1$ und $\beta_2\gamma_2$ zwei dazu homologe Tangenten von $\mathfrak{C}_2$. Die drei zugehörigen Tangentialebenen schneiden sich in einem Punkt von $\mathfrak{D}'$ und die Tangente dieses Punktes wird gefunden, indem man in den Punkten $(\alpha_1\beta_2)$, $(\alpha_1\gamma_2)$ die Tangenten an die gemischte Trasse $\mathfrak{T}$ legt und den Schnittpunkt derselben markiert, welcher der Spurpunkt für jene Tangente von $\mathfrak{D}'$ ist. Durch diesen Punkt muss aber auch die Tangente von $\mathfrak{T}_2$ im Punkte $(\beta_2\gamma_2)$ hindurchgehen, da $\mathfrak{D}'$ auf dem Kegel $M_2\mathfrak{T}_2$ liegt. Auf diese Weise erhält man die ganze Spur der Developpabeln $\mathfrak{D}'$.

Irgend eine Tangente α_1 von $\mathfrak{C}_1$ wird von ihren homologen Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ in m_2 Punkten der gemischten Trasse $\mathfrak{T}$ geschnitten und die Tangenten in diesen Punkten an $\mathfrak{T}$ schneiden sich paarweise in $\frac{1}{2}m_2(m_2-1)$ Punkten der Spur der Developpabeln $\mathfrak{D}'$. Dies führt zu einer Verallgemeinerung des Begriffs der Trasse einer Curve. Diese Grundcurve wird geschnitten nicht durch die Strahlen eines Büschels, sondern durch die Tangentenschaar einer andern Curve und die Tangenten der Grundcurve in den so entstehenden Paaren homologer Punkte schneiden sich in Punkten einer neuen Curve. So wird die Curve $\mathfrak{T}$ geschnitten von der Tangentenschaar der Curve $\mathfrak{C}_1$, aber es ist zu beachten, dass in unserm Fall nicht die sämmtlichen Schnittpunkte mit $\mathfrak{T}$ in Betracht kommen, sondern nur diejenigen, in welchen die Tangente von $\mathfrak{C}_1$ von ihren m_2 homologen Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ geschnitten wird. Diese m_2 Punkte mögen als der Tangente von $\mathfrak{C}_1$ zugeordnete Punkte von $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden. Die Spur der Developpabeln $\mathfrak{D}'$ entsteht also, indem man für alle Tangenten von $\mathfrak{C}_1$ die ihnen zugeordneten Schnittpunkte von $\mathfrak{T}$ nimmt, in denselben die Tangenten an $\mathfrak{T}$ legt und die Schnittpunkte der Paare dieser Tangenten markiert.

Auf zwei zu einander homologen Tangenten $\beta_2\gamma_2$ von $\mathfrak{C}_2$ liegen m_1 Paare von Punkten auf $\mathfrak{T}$, die je einer Tangente von $\mathfrak{C}_1$ zugeordnet sind. Die Tangentenpaare von $\mathfrak{T}$ in diesen Punktepaaren geben die Spurpunkte solcher Tangenten von $\mathfrak{D}'$, deren Berührungspunkte auf einer Erzeugenden M_2 $(\beta_2\gamma_2)$ des Kegels $M_2\mathfrak{T}_2$ liegen, und diese m_1 Spurpunkte müssen alle auf einer Geraden liegen, nämlich auf der Tangente von $\mathfrak{T}_2$ im Punkte $(\beta_2\gamma_2)$.

Jede Erzeugende des Kegels $M_2\mathfrak{T}_2$ wird von m_1 Tangentialebenen des Kegels $M_1\mathfrak{C}_1$ in m_1 Punkten von $\mathfrak{D}'$ geschnitten. Ist diese Erzeugende eine Doppelerzeugende, so wird sie von $2\,m_1$ Tangentialebenen des Kegels $M_1\mathfrak{C}_1$ in Punkten von $\mathfrak{D}'$ geschnitten. Ist die Erzeugende dagegen eine dreifache, $M_2\Delta_2$, so enthält sie m_1 dreifache Punkte von $\mathfrak{D}'$, in welchen sich je drei in einer Tangentialebene des ersten Kegels liegende einander zugeordnete Tangenten von $\mathfrak{R}$ schneiden. Solche drei Tangenten von $\mathfrak{R}$ treffen die gemischte Trasse in drei Punkten, die auf einer Tangente von $\mathfrak{C}_1$ liegen und die Tangenten von $\mathfrak{T}$ in einer solchen Punktgruppe schneiden sich in drei Punkten, welche die Spurpunkte der Tangenten des dreifachen Punktes von $\mathfrak{D}'$ sind und welche auch auf den Tangenten des dreifachen Punktes $\varDelta_2$ von $\mathfrak{T}_2$ liegen.

XIX. Weitere Beziehungen zwischen den Doppelcurven $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$. Solche ergeben sich, wenn wir die ausgezeichneten Punkte von $\mathfrak{R}$ betrachten.

1) Die Punkte von $\mathfrak{R}$ mit stationären Schmiegungsebenen gehören zur Doppelcurve und zwar wird letztere von der stationären Schmiegungsebene berührt. Zur Doppelcurve $\mathfrak{D}'$ gehören die $m_1 n_2$ Berührungspunkte der Tangenten $M_1 T_1$, aber auf jeder dieser Tangenten auch die $m_2 - 2$ übrigen Punkte, in welchen sie die Raumcurve $\mathfrak{R}$ trifft; diese letztern Punkte gehören auch zur Doppelcurve $\mathfrak{D}'''$ und in jedem derselben haben $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'''$ eine gemeinschaftliche stationäre Tangente, zusammenfallend mit der Tangente von $\mathfrak{R}$.

2) Auf $\mathfrak{R}$ gibt es $m_1 d_2$ solche Doppelpunkte, deren Tangenten in einer Tangentialebene des ersten Kegels liegen. In einem solchen Punkt stossen vier Aeste der Doppelcurve zusammen, indem sie die Schnittlinie der beiden Schmiegungsebenen zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Zwei von diesen Aesten gehören zu $\mathfrak{D}'$, die beiden andern zu $\mathfrak{D}'''$. Diese Punkte sind also für $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'''$ Spitzen mit gemeinschaftlicher Tangente. Auf jeder Doppelerzeugenden des ersten Kegels liegen m_2 Doppelpunkte von $\mathfrak{R}$. Wir betrachten zwei dieser Punkte. Das Tangentenpaar $a\,b$ des einen schneidet das Tangentenpaar $a'\,b'$ des andern in zwei Punkten $(a\,a')$, $(b\,b')$, welche zu $\mathfrak{D}'$ gehören und auf der Schnittlinie der beiden Ebenen $(a\,b)$, $(a'\,b')$ der Doppelpunktstangenten, somit auf einer Erzeugenden des Kegels $M_2 \mathfrak{T}_2$ liegen.

3) Jede Spitze von $\mathfrak{R}$ ist ein einfacher Punkt der Doppelcurve, deren Tangente mit der Spitzentangente zusammenfällt. Auf $\mathfrak{D}'$ liegen diejenigen $m_1 k_2$ Spitzen, deren Schmiegungsebenen Tangentialebenen des ersten Kegels sind. Die Tangente einer solchen Spitze hat $m_2 - 2$ zugeordnete Tangenten in der Schmiegungsebene der Spitze und diese Tangenten von $\mathfrak{R}$ sind Tangenten von $\mathfrak{D}'$ in denjenigen Punkten, in welchen sie die Spitzentangente treffen. Auf jeder Cuspidalerzeugenden des ersten Kegels liegen m_2 Spitzen. Betrachten wir irgend zwei derselben, so erkennen wir, dass die beiden Spitzentangenten sich in einem Punkt von $\mathfrak{D}'$ schneiden, dessen Tangente eine Erzeugende des Kegels $M_2 \mathfrak{T}_2$ ist.

4) Jede Inflexionsebene des ersten Kegels ist Schmiegungsebene in m_2 Punkten der Inflexionserzeugenden. Bezeichnet man für einen dieser Punkte die zwei unendlich benachbarten Tangenten von $\mathfrak{R}$ mit a, b und für einen zweiten mit a', b', so ist a zugeordnet zu a', aber nicht zu b', b zugeordnet zu b', aber nicht zu a'. Daher schneiden sich a und a' in einem Punkt von $\mathfrak{D}'$, ebenso b und b' in dem unendlich benachbarten Punkt von $\mathfrak{D}'$, dagegen sind die Schnittpunkte $(a\,b')$ und $(a'b)$ zwei unendlich benachbarte Punkte von $\mathfrak{D}'''$. Man erhält also einen Punkt, in welchem sich $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'''$ schneiden und zwar der Art, dass die beiden zugehörigen Tangenten mit den zwei Tangenten von $\mathfrak{R}$ in einer Ebene und harmonisch liegen.

XX. Schnittpunkte von $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$. Man betrachte in einer Ebene durch $M_1 M_2$ zwei Erzeugende a_1, b_1 des ersten Kegels und zwei Erzeugende a_2, b_2 des zweiten sammt den zugehörigen Tangentialebenen α_1, β_1, α_2, β_2. Dies gibt vier Punkte von $\mathfrak{R}$, die wir ein Quadrupel auf $\mathfrak{R}$ nennen wollen, nämlich $(a_1 a_2)$, $(a_1 b_2)$, $(b_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ mit den zugehörigen Tangenten $(\alpha_1 \alpha_2)$, $(\alpha_1 \beta_2)$, $(\beta_1 \alpha_2)$, $(\beta_1 \beta_2)$. Diese Tangenten sind Kanten eines Tetraeders und bilden ein windschiefes Viereck, dessen Ecken paarweise auf $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$ liegen und dessen Diagonalen Erzeugende der Kegel $M_1 \mathfrak{T}_1$ und $M_2 \mathfrak{T}_2$ sind. Wir nennen die vier Ecken ein Quadrupel auf $\mathfrak{D}' \mathfrak{D}''$. Durch jede Seite des windschiefen Vierecks geht eine Schmiegungsebene, wodurch wieder ein Tetraeder entsteht. Vier Kanten desselben, die wieder ein windschiefes Viereck bilden, sind die Tangenten des Quadrupels auf $\mathfrak{D}' \mathfrak{D}''$; die Ecken dieses neuen windschiefen Vierecks bilden ein Quadrupel von Punkten auf der Schnittcurve der beiden Developpabeln $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$.

Die Seiten des ersten windschiefen Vierecks der Tangenten von $\mathfrak{R}$ treffen die Basisebene in einem Punktquadrupel, das auf $\mathfrak{T}$ liegt und das umschriebene Viereck der Tangenten von $\mathfrak{T}$ hat zu Ecken zwei Punktepaare auf den Spuren der Developpabeln $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$. Die Seiten des Quadrupels auf $\mathfrak{R}$ treffen die Seiten des Quadrupels auf $\mathfrak{T}$ in Punkten auf der Spur der Ebene des ersten Quadrupels; aber die Diagonalen des einen treffen die Diagonalen des andern im Allgemeinen nicht. Würden sich die Diagonalen paarweise auch noch treffen, so wären die beiden Quadrupel zu einander in centrischer Collineation. Das Collineationscentrum wäre ein Punkt, durch welchen die Tangenten des Quadrupels auf $\mathfrak{R}$ hindurchgehen würden, d. h. ein Punkt Z, welcher ein Doppelpunkt wäre für jede der drei Curven $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$. Nun ist aber die Forderung, dass die beiden Quadrupel centrisch collinear werden, auch einfach dadurch zu erfüllen, dass die Gerade $M_1 M_2$ und die Gerade, welche den Punkt

$(\alpha_1\beta_1)$ auf $\mathfrak{T}_1$ mit dem Punkt $(\alpha_2\beta_2)$ auf $\mathfrak{T}_2$ verbindet, sich treffen.

Auf Grund dieser Betrachtung lässt sich die Anzahl der Punkte Z, welche Doppelpunkte für $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ und $\mathfrak{D}'''$ gleichzeitig sind, bestimmen. Es findet nämlich zwischen den Punkten von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ eine Correspondenz in folgender Art statt: In jedem Punkt X_1 von $\mathfrak{T}_1$ schneiden sich zwei homologe Tangenten von $\mathfrak{C}_1$; zu diesen gibt es m_2 homologe Tangenten auf $\mathfrak{C}_2$ und diese schneiden sich paarweise in $\frac{1}{2}m_2(m_2-1)$ Punkten X_2 auf $\mathfrak{T}_2$. In derselben Weise gehören zu jedem Punkt X_2 auf $\mathfrak{T}_2$ $\frac{1}{2}m_1(m_1-1)$ Punkte X_1 auf $\mathfrak{T}_1$. — Nun sind solche Paare correspondierender Punkte X_1X_2 zu bestimmen, welche mit P auf einer Geraden liegen. Diese Strahlen durch P sind Coincidenzstrahlen einer Correspondenz von Strahlen (x_1x_2) um P, bei welcher offenbar zu jedem Strahl x_1 $\frac{1}{2}\mu_1 m_2(m_2-1)$ Strahlen x_2 und zu jedem Strahl x_2 $\frac{1}{2}\mu_2 m_1(m_1-1)$ Strahlen x_1 gehören. Die Zahl der Coincidenzen und damit die Zahl z der Punkte Z wird hiernach:

$$z=\tfrac{1}{2}\mu_1 m_2(m_2-1)+\tfrac{1}{2}\mu_2 m_1(m_1-1)$$

oder mit symbolischer Bezeichnung:

$$z=\tfrac{1}{2}[m^2\mu]-\tfrac{1}{2}[m\,\mu].$$

Es ist klar, dass diese Punkte auf der Schnittcurve der beiden Kegel $M_1\mathfrak{T}_1$ und $M_2\mathfrak{T}_2$ liegen und dass die drei Paare von Tangenten der Doppelcurven in einem solchen Punkt nach den Gegeneckenpaaren desjenigen vollständigen Vierseits gehen, welches durch die Tangenten von $\mathfrak{T}$ in den Punkten des Quadrupels auf $\mathfrak{T}$ gebildet wird.

Man nehme einen Punkt A auf $\mathfrak{R}$ mit seiner Tangente a. A_1 und A_2 seien zwei andere Punkte von $\mathfrak{R}$, die dem Punkt A zugeordnet sind für M_1 und M_2; ihre Tangenten a_1, a_2 schneiden a in zwei Punkten Y_1 und Y_2, von denen der erste auf $\mathfrak{D}'$, der zweite auf $\mathfrak{D}''$ liegt. $A A_1 A_2$ bilden drei Ecken eines Quadrupels auf $\mathfrak{R}$. Wenn nun die Punkte $Y_1 Y_2$ auf a zusammenfallen, also die 3 Tangenten $a\,a_1 a_2$ durch einen Punkt gehen, so gehen durch ihn alle vier oben betrachteten Ebenen $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$, also auch noch die Tangente im vierten Punkt des Quadrupels und ausserdem die beiden Geraden $(\alpha_1 \beta_1)$, $(\alpha_2 \beta_2)$, welche Erzeugende der Kegel $M_1 \mathfrak{T}_1$, $M_2 \mathfrak{T}_2$ sind. Wir haben dann also einen Punkt Z der vorigen Betrachtung.

Auf diesem Wege kann man zu einer zweiten Bestimmung der Zahl z gelangen. Auf den Curven $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$ entsteht nämlich eine Correspondenz der Punkte $Y_1 Y_2$. Durch jeden Punkt Y_1 (Y_2) gehen zwei Tangenten von $\mathfrak{R}$, von denen jede als a genommen werden kann. Zu jedem Punkt Y_1 gehören daher $2(m_1 - 1)$ Punkte Y_2 und zu jedem Punkt Y_2 gehören $2(m_2 - 1)$ Punkte Y_1. Man nehme nun ein Ebenenbüschel mit beliebiger Axe g und bilde eine Correspondenz von Ebenen $(\xi_1 \xi_2)$ in der Art, dass correspondierende Ebenen $\xi_1 \xi_2$ durch g nach correspondierenden Punkten $Y_1 Y_2$ auf $\mathfrak{D}' \mathfrak{D}''$ gehen. Zu jeder Ebene ξ_1 gehören dann $2\delta'(m_1 - 1)$ Ebenen ξ_2 und zu jeder Ebene ξ_2 gehören $2\delta''(m_2 - 1)$ Ebenen ξ_1. Aber von den Coincidenzen sind diejenigen abzurechnen, welche dadurch entstehen, dass die Tangente a die Axe g des Ebenenbüschels schneidet. Solcher Tangenten a gibt es $N_{12} = \mu_{12} = [m\,n]$ und jede enthält $m_2 - 1$ Punkte Y_1 und $m_1 - 1$ Punkte Y_2, erzeugt also $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ einfache Coincidenzen im Ebenenbüschel, die alle in eine Ebene fallen. — Hat man diese Coincidenzen in Abzug gebracht, so ist die übrig bleibende Zahl durch 4 zu dividieren, weil man jede der vier in einem Punkt Z sich schneidenden Tangenten als a nehmen könnte. Es wird also:

$$z = \tfrac{1}{2}(m_1 - 1)\delta' + \tfrac{1}{2}(m_2 - 1)\delta'' - \tfrac{1}{4}(m_1 - 1)(m_2 - 1)[mn].$$

Setzt man für δ' und δ'' ihre Werthe aus XV ein, so findet man für z denselben Ausdruck wie oben.

Die Diagonalen der Quadrupel auf $\mathfrak{R}$ bilden eine windschiefe Regelfläche, deren Erzeugende die Raumcurve $\mathfrak{R}$ zweimal und ausserdem die Gerade $M_1 M_2$ treffen. Die Erzeugenden dieser windschiefen Regelfläche gehören paarweise als Diagonalen eines Quadrupels zusammen und bilden mit den von ihrem Schnittpunkt nach M_1 und M_2 gehenden Geraden eine harmonische Gruppe; da die letztern beiden Geraden Erzeugende der Kegel $M_1 \mathfrak{H}_1$ und $M_1 \mathfrak{H}_2$ sind, so beschreibt der Diagonalenschnittpunkt die Schnittcurve dieser beiden Kegel.

XXI. Die Doppelcurve der Developpabeln $\mathfrak{U}$. Da die Curve $\mathfrak{U}$ ausser den $(m-1)$-fachen Perspectivkegeln M_1 und M_2 noch den zweifachen Perspectivkegel $\mathfrak{U}$ hat, so zerfällt die Doppelcurve ihrer developpabeln Fläche in vier Theile $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{D}_3$, von denen der dritte die Trasse der Basiscurve ist. $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ entsprechen einander in der involutorischen Collineation, $\mathfrak{T}$ entspricht sich selbst Punkt für Punkt und $\mathfrak{D}_3$ entspricht sich selbst in der Art, dass je zwei entsprechende Punkte auf einem Strahl nach Q liegen.

Jede Erzeugende des Kegels $M_2 \mathfrak{T}$ wird von $m-2$ Tangentialebenen des Kegels $M_1 \mathfrak{C}$ in $m-2$ Punkten geschnitten, welche Punkte von $\mathfrak{D}_1$ sind. Durch M_2 gehen ferner, wie man leicht erkennt, $\tfrac{1}{2} n(m-2)(m-3)$ Aeste von $\mathfrak{D}_1$. In einer beliebigen Ebene durch M_2 liegen also $\tfrac{1}{2} n(m-2)(m-3) + \mu(m-2)$ Punkte von $\mathfrak{D}_1$.

Somit ist

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(m-2)(2\mu + mn - 3n)$$
$$= \frac{1}{2}(m-2)(3mn - 6n - k).$$

Offenbar sind die drei Punkte M_1, M_2, Q auch vielfache Punkte von $\mathfrak{D}_3$.

Wir betrachten drei zu einander homologe Punkte A, B, C der Basis sammt ihren Tangenten a, b, c. Nach A gehe vom ersten Kegel die Erzeugende a_1, nach B und C gehen vom zweiten Kegel die Erzeugenden $b_2 c_2$. Dann sind die beiden Punkte $(a_1 b_2)$, $(a_1 c_2)$ von $\mathfrak{U}$ einander zugeordnet für M_1; ihre beiden Tangenten gehen nach den Punkten $(a\,b)$, $(a\,c)$ der Trasse und schneiden sich in einem Punkt D_1 von $\mathfrak{D}_1$. Die Tangente in diesem Punkt als Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen geht nach dem Schnittpunkt der Tangenten der Trasse in den beiden Punkten $(a\,b)$, $(a\,c)$; aber da die Curve $\mathfrak{D}_1$ auf dem Kegel $M_2\,\mathfrak{T}$ liegt und speziell der Punkt D_1 auf derjenigen Erzeugenden dieses Kegels, welche nach dem Punkt $(b\,c)$ geht, so muss die Tangente von $\mathfrak{D}_1$ im Punkte D_1 auch in der Tangentialebene des Kegels $M_2\,\mathfrak{T}$ längs jener Erzeugenden liegen. Man hat also den Satz: Die drei Tangenten der Trasse einer Curve in den Schnittpunkten dreier zu einander homologen Tangenten der Basis gehen durch einen Punkt.

Zu diesem Resultat kann man auch auf folgende Weise gelangen: Von den drei Tangenten a, b, c der Basis gehe man zu ihren unendlich benachbarten Tangenten a', b', c' über, indem man den Strahl p durch den Pol unendlich wenig dreht in die Lage p'. Die Ecken des Dreiseits $a'\,b'\,c'$ sind dann auf $\mathfrak{T}$ unendlich benachbart zu den Ecken des Dreiseits $a\,b\,c$. Da aber die Seiten dieser beiden Dreiseite sich paarweise in drei Punkten auf der

Geraden p' schneiden, so müssen die Paare entsprechender Ecken auf drei Strahlen durch einen Punkt liegen. —

Dies gilt sogar bei jener Verallgemeinerung der Trasse, bei welcher die Strahlen p nicht durch einen festen Punkt gehen, sondern die Tangenten einer andern Curve sind.

Aus den drei Punkten A, B, C der Basis lassen sich noch zwei andere Punkte von $\mathfrak{D}_1$ ableiten, wenn man als Erzeugende des Kegels M_1 die Gerade nach B oder nach C nimmt; ebenso erhält man aus denselben drei Punkten A, B, C drei Punkte von $\mathfrak{D}_2$, die zu den drei Punkten von $\mathfrak{D}_1$ involutorisch entsprechend sind. Nun haben aber diese drei Punkte von $\mathfrak{D}_1$ drei Tangenten mit gemeinschaftlichem Spurpunkt, woraus folgt, dass die Spurcurve der Developpabeln $\mathfrak{D}_1$, identisch mit der Spurcurve der Developpabeln $\mathfrak{D}_2$, eine dreifache ist.

Man hat auch weiter den Satz: Vier homologe Tangenten der Basis bilden ein vollständiges Vierseit, dessen sechs Ecken auf der Trasse liegen; die zugehörigen sechs Tangenten der Trasse bilden die Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen Ecken auf der Spur der Developpabeln $\mathfrak{D}_1$ ($\mathfrak{D}_2$) liegen.

In einem Doppelpunkt Θ von $\mathfrak{T}$ schneiden sich zwei Paare homologer Tangenten der Basis; durch ihn gehen also zwei Tangenten von $\mathfrak{U}$, die weder für M_1 noch für M_2 einander zugeordnet sind, und die zwei ihnen in der Involution entsprechenden Tangenten, für welche dasselbe gilt; diese vier Tangenten gehören auf der Developpabeln $\mathfrak{U}$ zu vier Mänteln, die sich paarweise in sechs Doppelcurvenästen schneiden. Zwei von diesen Aesten gehören zu $\mathfrak{T}$, die vier übrigen zu $\mathfrak{D}_3$ und entsprechen einander involutorisch.

Ein dreifacher Punkt $\varDelta$ der Trasse ist der Spurpunkt von sechs Tangenten der Raumcurve $\mathfrak{U}$. Die Berührungspunkte derselben bilden drei Paare zugeordneter Punkte für M_1, ebenso für M_2 und für Q. $\varDelta$ ist also ein dreifacher Punkt für jede der Doppelcurven $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{T}$ und ausserdem ein sechsfacher Punkt für $\mathfrak{D}_3$. Die sechs Tangenten von $\mathfrak{U}$ durch $\varDelta$ gehören zu sechs Mänteln der Developpabeln $\mathfrak{U}$ und diese schneiden sich in 15 Aesten der Gesammtdoppelcurve, welche sich in der angegebenen Weise auf die einzelnen Doppelcurven vertheilen. Die drei Aeste von $\mathfrak{D}_1$ entsprechen in der Involution den drei Aesten von $\mathfrak{D}_2$, die sechs Aeste von $\mathfrak{D}_3$ entsprechen einander paarweise.

In der Basisebene liegen aber noch andere Punkte der Doppelcurven. Jeder Punkt von $\mathfrak{D}_1$ in der Basisebene muss auch ein Punkt von $\mathfrak{D}_2$ sein.

XXII. Weitere Beziehungen zwischen den Doppelcurven der Developpabeln $\mathfrak{U}$. Jeder Punkt mit stationärer Schmiegungsebene gehört zu einer Doppelcurve. Die Geraden $M_1 T$ berühren $\mathfrak{U}$ in Punkten von $\mathfrak{D}_1$. Jede dieser Geraden trifft aber $\mathfrak{U}$ in $m-3$ Punkten, in welchen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_3$ sich berühren mit stationärer Tangente. Die stationären Schmiegungsebenen, welche in den n Punkten B berühren, geben Punkte von $\mathfrak{T}$, in welchen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}$ sich berühren. Jede Gerade QB berührt $\mathfrak{U}$ in B und die zugehörige Schmiegungsebene, identisch mit der Tangentialebene des Kegels $Q\mathfrak{H}$, ist stationär. Wir betrachten einen Punkt B und seine $m-2$ homologen Punkte T. Die Tangente BQ von $\mathfrak{U}$ wird von den Tangenten $M_2 T$ in Punkten von $\mathfrak{D}_1$ und von den Tangenten $M_1 T$ in Punkten von $\mathfrak{D}_2$ getroffen; die Tangenten in diesen Punkten sind stationär und gehen nach den Schnittpunkten der Tangente von $\mathfrak{H}$ in B mit den Tangenten von $\mathfrak{C}$ in den Punkten T.

Auf jeder Doppelerzeugenden des Kegels $M_1\mathfrak{C}$ liegen $m-2$ Doppelpunkte von $\mathfrak{U}$. Die Tangenten a, b eines derselben schneiden die Tangenten a', b' eines andern in Punkten von $\mathfrak{D}_1$, welche auf einer Erzeugenden des Kegels $M_2\mathfrak{T}$ liegen. Nun ist aber ein Doppelpunkt der Basis selbst auch ein Doppelpunkt von $\mathfrak{U}$, jedoch mit dem Unterschied, dass die Ebene seiner beiden Tangenten a'' b'' durch Q geht; die beiden Punkte $(a\,a'')$, $(b\,b'')$ gehören also zu $\mathfrak{D}_1$, aber ihre Verbindungslinie ist die Schnittlinie einer Tangentialebene des Kegels $M_2\mathfrak{C}$ mit der Tangentialebene des Kegels $Q\,\mathfrak{H}$. Die $m-2$ Doppelpunkte auf den Doppelerzeugenden des Kegels $M_2\mathfrak{C}$ ($M_1\mathfrak{C}$) sind gemeinsame Spitzen für $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_3$ ($\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_3$); die d Doppelpunkte der Basis sind gemeinsame Spitzen für $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{D}_3$.

Für $k(m-2)$ Spitzen geht die Schmiegungsebene durch M_1; sie sind einfache Punkte von $\mathfrak{D}_1$, deren Tangente in die Spitzentangente fällt. In der Schmiegungsebene der Spitze liegen noch $m-3$ andere Tangenten von $\mathfrak{U}$; dieselben sind Tangenten von $\mathfrak{D}_1$ in den Schnittpunkten mit der Spitzentangente. $\mathfrak{U}$ hat aber noch k Spitzen in der Basisebene; dieselben werden einfache Punkte von $\mathfrak{T}$, deren Tangente in die Spitzentangente von $\mathfrak{C}$ fällt. Auf einer Cuspidalerzeugenden des ersten Kegels liegen noch $m-2$ weitere Spitzen von $\mathfrak{U}$. Wir betrachten irgend eine derselben. Ihre Schmiegungsebene ist eine Tangentialebene des Kegels $M_2\mathfrak{C}$; die Schmiegungsebene der Spitze in der Basisebene geht durch Q. Es ist also klar, dass die Tangenten dieser beiden Spitzen sich schneiden in einem Punkt von $\mathfrak{D}_1$ und dass die Tangente dieses Punktes die Schnittlinie der eben genannten Schmiegungsebenen ist. Dieser Punkt gehört aber auch gleichzeitig zu $\mathfrak{D}_2$, weil durch ihn noch eine andere Spitzentangente von $\mathfrak{U}$ geht, die zu der frühern involutorisch entsprechend ist. Jede Spitzentangente von $\mathfrak{C}$ wird also von ihren $m-2$ homologen Tangenten in $m-2$ Punkten geschnitten, welche gleichzeitig auf $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ liegen.

Nun schneidet aber die Spitzentangente von $\mathfrak{C}$, da sie die Trasse berührt, diese letztere in $\mu-2$ Punkten; von diesen haben wir $m-2$ soeben kennen gelernt; durch jeden der $\mu-m$ übrig bleibenden Punkte gehen also zwei einander involutorisch entsprechende Tangenten von $\mathfrak{U}$, welche zur Spitzentangente weder für M_1 noch für M_2 zugeordnet sind; jeder dieser $\mu-m$ Punkte ist somit ein Doppelpunkt von $\mathfrak{D}_3$.

Endlich ist zu bemerken, dass die k Spitzentangenten in der Basisebene sich zu zweien in $\frac{1}{2}k(k-1)$ Punkten schneiden, welche ebenfalls Punkte von $\mathfrak{D}_3$ sind und zwar einfache, deren Tangenten also nach Q gehen müssen.

Jede Inflexionsebene des ersten Kegels ist Schmiegungsebene für die $m-1$ Punkte von $\mathfrak{U}$, welche auf der Inflexionserzeugenden liegen und die in ihr liegenden Tangenten von $\mathfrak{U}$ schneiden sich paarweise in $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Punkten, welche Schnittpunkte von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_3$ sind, wobei die zugehörigen Tangenten mit den beiden Tangenten von $\mathfrak{U}$ in einer Ebene und harmonisch liegen. Die Inflexionsebenen des Kegels $Q\mathfrak{H}$ sind Schmiegungsebenen von $\mathfrak{U}$ in zwei involutorisch einander entsprechenden Punkten; die beiden zugehörigen Tangenten schneiden sich auf der Basisebene in einem Punkt von $\mathfrak{T}$, der auch gleichzeitig auf $\mathfrak{D}_3$ liegt und zwar so, dass die Tangente von $\mathfrak{D}_3$ nach Q geht. Die Anzahl dieser Punkte ist demnach (X)

$$J = (m-2)(3n+k) - \tfrac{3}{2} m (m-1).$$

Nach diesen Betrachtungen können wir nun von jeder der drei Doppelcurven $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ angeben, wie viele ihrer Punkte in der Basisebene liegen.

Von $\mathfrak{D}_1$ (und $\mathfrak{D}_2$) liegen in der Basisebene die folgenden Punkte: 1) Je drei Punkte in jedem $\varDelta$ von $\mathfrak{T}$. 2) Je $m-2$ einfache Punkte auf jeder Spitzentangente von $\mathfrak{C}$. Wir haben somit für die Ordnungszahlen δ_1, δ_2 von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$:

$$\delta_1 = \delta_2 = 3\varDelta + (m-2)k = \tfrac{1}{2}(m-2)(3mn - 6n - k).$$

Diese Gleichung könnte man umgekehrt zur Bestimmung von $\varDelta$ benutzen, da δ_1 schon bestimmt ist.

Von $\mathfrak{D}_3$ liegen in der Basisebene die folgenden Punkte: 1) Je vier Punkte in jedem Punkt Θ von $\mathfrak{T}$; 2) je sechs Punkte in jedem Punkt $\varDelta$ von $\mathfrak{T}$; 3) je drei Punkte in jedem der d Doppelpunkte von $\mathfrak{C}$; 4) je $2(\mu - m)$ Punkte auf jeder Spitzentangente von $\mathfrak{C}$; 5) je ein Punkt auf jeder Inflexionstangente von $\mathfrak{H}$; 6) $\frac{1}{2}k(k-1)$ Punkte in den Schnittpunkten von je zwei Spitzentangenten von $\mathfrak{C}$. Für die Ordnungszahl δ_3 von $\mathfrak{D}_3$ ergibt sich hiernach:

$$\begin{aligned}\delta_3 &= 4\Theta + 6\varDelta + 3d + 2(\mu - m)k + (m-2)(3n+k) - \tfrac{3}{2}m(m-1) + \tfrac{1}{2}k(k-1)\\ &= 2m^2n^2 - 6mn^2 - 3m^2n + 7mn + \tfrac{9}{2}n^2 - \tfrac{9}{2}n.\end{aligned}$$

Nun ist uns aber die Ordnungszahl der Gesammtdoppelcurve bekannt, nämlich die Zahl δ_e der Doppelpunkte in der Spur der Developpabeln $\mathfrak{U}$ auf beliebiger Ebene (XI). Die eben gefundenen Werthe von $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ müssen also der Bedingungsgleichung genügen:

$$\delta_e = \delta_1 + \delta_2 + \mu + \delta_3.$$

Man findet in der That, dass diese Gleichung befriedigt wird.

XXIII. Zerfallende Trassen. Wir behandeln noch die Frage: Unter welchen Umständen zerfällt die gemischte Trasse zweier Curven oder die Trasse einer Curve? Unsere Fundamentalfigur (II) gibt einen Fingerzeig zur Beantwortung dieser Frage, denn in dieser Figur findet sich das Zerfallen einer Trasse mehrfach verwirklicht.

Wir wollen die in der Bildebene liegenden Projectionen von Punkten und Curven durch Beifügung von Klammern von den Originalpunkten und -Curven im Raum unterscheiden. Dann zeigt die Figur, dass $(\mathfrak{R}')$ und $(\mathfrak{R}'')$, als ebene Basiscurven aufgefasst, für den Punkt (Q) als Pol eine gemischte Trasse geben, von welcher die frühere Curve $\mathfrak{T}_{12}$ ein Theil sein muss und zwar wird dieser Theil dadurch erhalten, dass man auf den Strahlen durch (Q) nur solche Punktepaare der beiden Curven $(\mathfrak{R}')$, $(\mathfrak{R}'')$ bei der Construction benutzt, welche Projectionen von involutorisch entsprechenden Punkten der Raumcurven sind, also von Punkten, die paarweise auf Geraden durch den Punkt Q im Raum liegen. Wir wollen die so ausgewählten Punktepaare als Paare zugeordneter Punkte bezeichnen. In diesem engern Sinn hat ein Punkt von $(\mathfrak{R}')$ nur einen einzigen zugeordneten Punkt auf $(\mathfrak{R}'')$, während er im weitern Sinn $m_1 m_2$ homologe Punkte hat. Würde man die Construction der Trasse auf alle Paare homologer Punkte ausdehnen, so würde man ausser der Curve $\mathfrak{T}_{12}$ noch einen weitern abgesonderten Theil erhalten.

Ein zweites Beispiel einer zerfallenden gemischten Trasse zeigt die Figur, wenn wir $\mathfrak{C}_1$ und $(\mathfrak{R}')$ als Basiscurven und (M_1) als Pol nehmen. Hier hat jeder Punkt von $(\mathfrak{R}')$ nur einen zugeordneten Punkt auf $\mathfrak{C}_1$, dagegen hat jeder Punkt auf $\mathfrak{C}_1$ jetzt m_2 zugeordnete Punkte auf

($\mathfrak{R}'$). Aus der Figur ist klar, dass $\mathfrak{T}_{12}$ sich wieder als ein Theil der vollständigen gemischten Trasse ergeben muss.

Ein drittes Beispiel enthält die Figur in der gemischten Trasse der beiden Curven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{H}_{12}$ für den Pol P.

Es ist nun klar, dass in diesen Beispielen die Ursache des Zerfallens der gemischten Trasse darin liegt, dass auf den Strahlen durch den Pol eine engere Auswahl zugeordneter Punkte existiert und zwar tritt dieselbe dadurch ein, dass die Basiscurven Projectionen von Curven im Raum sind, welche auf einem und demselben Kegel liegen und dass der Pol die Projection der Kegelspitze ist. Der Fall im zweiten und dritten Beispiel, dass beide Basiscurven Projectionen von einer und derselben Raumcurve von zwei verschiedenen Centren aus sind und der Pol der Spurpunkt der Verbindungslinie beider Centren ist, lässt sich offenbar auf den erstern zurückführen.

Analoge Schlüsse gelten für das Zerfallen der Trasse einer Curve. Hier kann man sagen: Die Trasse einer Curve zerfällt, wenn diese Basiscurve die Projection einer Raumcurve ist, welche einen mehrfachen Perspectivkegel besitzt und wenn die Projection der Kegelspitze der Pol ist. Auf jedem Strahl durch den Pol liegen so viele zu einander homologe Punkte, als die Ordnungszahl der Basis angibt, dagegen nur so viele einander zugeordnete Punkte, als der Grad der Vielfachheit des Perspectivkegels beträgt.

Ein interessantes Beispiel hiefür bieten die beiden Doppelcurven $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$ der Developpabeln $\mathfrak{R}$ und wir können die vorige Betrachtung dazu benutzen, die Ordnungszahlen δ' und δ'' nochmals nach einer andern Methode zu bestimmen. Wir können nämlich sagen: Die Projection $(\mathfrak{D}')$ von $\mathfrak{D}'$ ist ein Theil der zerfallenden Trasse von $(\mathfrak{R})$ für (M_1) als Pol. So lässt sich δ' dadurch finden, dass man die Ordnungszahl dieses Theiles der Trasse von $(\mathfrak{R})$ ermittelt. Wir verwenden dazu das Chasles'sche Correspondenzprincip, jedoch in der Art, dass wir nur die einander zugeordneten, nicht die einander homologen Punkte zur Bildung einer Correspondenz benutzen.

Im vorliegenden Fall liegen auf jedem Strahl durch den Pol m_2 einander zugeordnete Punkte. Um die Anzahl der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden g mit $(\mathfrak{D}')$ zu bestimmen, bilden wir auf g eine Correspondenz $(X X')$ von Punkten. Von jedem Punkt X ziehen wir eine Tangente an die Basis und in jedem ihrem Berührungspunkt zugeordneten Punkt legen wir ebenfalls die Tangente, welche auf g einen Punkt X' herausschneidet. Zu jedem Punkt X oder X' gehören $N_{12}\,(m_2 - 1)$ Punkte X' oder X.

Von der Zahl $2\,N_{12}\,(m_2 - 1)$ der Coincidenzen sind folgende abzurechnen, welchen keine Punkte von $(\mathfrak{D}')$ entsprechen: 1) $\mathfrak{R}$ hat $m_1 k_2$ Spitzen, deren Schmiegungsebenen durch M_1 gehen; jeder solche Punkt liefert auf der Bildebene eine Coincidenz, welche kein Punkt von $(\mathfrak{D}')$ ist. 2) Durch M_1 gehen $m_1 n_2$ Erzeugende, welche Tangenten von $\mathfrak{R}$ sind; auf der Bildebene entstehen dadurch ebenfalls einfache Coincidenzen, welche keine Punkte von $(\mathfrak{D}')$ liefern. 3) Durch (M_1) gehen an $(\mathfrak{R})$ n_1 Tangenten (Umrisserzeugende), welche $(\mathfrak{R})$ in je m_2 Punkten berühren. Die in einen Berührungspunkt fallenden unendlich benachbarten Punkte sind nicht einander zugeordnet, da die Berührung nur im Bilde, nicht im Raum stattfindet; dagegen sind die Berührungspunkte einander zugeordnet, wodurch $n_1 m_2(m_2-1)$ Coincidenzen entstehen, welche ebenfalls keine Punkte von $(\mathfrak{D}')$ liefern. Endlich ist klar, dass die Zahl der übrig bleibenden Coincidenzen durch 2 zu dividieren ist; denn bei der Construction von X' zu X ist ersichtlich, dass, wenn X' unendlich nahe an X fällt, noch ein zweiter Punkt X' unendlich nahe fallen muss, da man von X mit zwei verschiedenen Tangenten ausgehen kann, welche diese zwei zu X unendlich benachbarten Punkte X' liefern. Man findet somit

$$2\delta_{12}' = 2N_{12}(m_2-1) - m_1 k_2 - m_1 n_2 - n_1 m_2 (m_2 - 1)$$

oder wenn man für N_{12} seinen Werth einführt (IV):

$$2\delta'_{12} = m_1(2m_2 n_2 - 3n_2 - k_2) + m_2^2 n_1 - m_2 n_1,$$

was mit dem in (XV) gefundenen Werth übereinstimmt.

XXIV. Zerfallende Schnittcurve zweier Kegel. Unsere Fundamentalfigur (II) weist eine merkwürdige Reciprocität auf in der Beziehung der Curven $(\mathfrak{R}')$, $(\mathfrak{R}'')$ zu den Curven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$. Sie zeigt einerseits die Construction zweier Punkte A', A'' von $(\mathfrak{R}')$, $(\mathfrak{R}'')$ aus den zwei Punkten A_1, A_2 der Basiscurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ sammt dem Punkt A der Trasse, andererseits aber stellt sie auch gleichzeitig mit denselben Linien die Construction zweier Punkte A_1, A_2 vor auf den Schnittcurven der beiden Kegel $M_1(\mathfrak{R}')$ und $M_2(\mathfrak{R}'')$, sowie $M_1(\mathfrak{R}'')$, und $M_2(\mathfrak{R}')$ sammt dem Punkt A der Trasse, wobei als Spurpunkt der Geraden $M_1 M_2$ jetzt der Punkt Q aufzufassen ist. Es ist aber klar, dass die Curven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ dabei nur Theile der vollständigen Schnittcurve dieser neuen Kegel darstellen, dass also ein Zerfallen der Schnittcurve eintritt.

Wir denken uns zwei Kegel durch räumliche Leitcurven $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ gegeben. Die Construction der Schnittcurve geschieht dann, indem man Ebenen durch $M_1 M_2$ legt, welche die Leitcurven in zwei Punktgruppen schneiden, die wir wieder als homolog bezeichnen werden. Ein Zerfallen im Schnitt der beiden Kegel tritt nun ein, wenn innerhalb solcher zu einander homologen Punktgruppen noch eine engere Zuordnung der Punkte beider Gruppen stattfindet. Dies geschieht, wenn die beiden Leitcurven einen gemeinschaftlichen einfachen oder mehrfachen Perspectivkegel K haben, dessen Spitze auf der Geraden $M_1 M_2$ liegt. Wir nennen dann zwei Punkte der beiden Leitcurven einander zugeordnet, wenn sie auf derselben zeugenden dieses Kegels K liegen.

Von der Gesammtschnittcurve der beiden Kegel löst sich dann ein Theil $\mathfrak{S}$ ab, der dadurch entsteht, dass man von M_1 und M_2 die Geraden nach den Paaren zugeordneter Punkte A_1, A_2 zieht und ihren Schnittpunkt markiert. Die zugehörige Tangente von $\mathfrak{S}$ ist die Schnittlinie der beiden zugehörigen Tangentialebenen und ist hier einfach durch den Punkt V bestimmt, in welchem sich die beiden Tangenten schneiden, die man in A_1 und A_2 an die Leitcurven legt. Es entsteht also hier gleichzeitig noch eine weitere Raumcurve $\mathfrak{B}$ durch diese Schnittpunkte zugeordneter Tangenten und da zwischen den beiden Curven $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{B}$ eine eindeutige Correspondenz der Punkte stattfindet, so müssen nach dem Riemann'schen Satz die beiden Curven von gleichem Geschlecht sein. Die Curve $\mathfrak{B}$ liegt auf der developpabeln Fläche der Curve $\mathfrak{S}$.

Sei der gemeinschaftliche Perspectivkegel K von der Ordnung m und sei er für die erste Leitcurve r_1-fach, für die zweite r_2-fach; dann ist die Ordnungszahl von $\mathfrak{S}$ $= m r_1 r_2$. Dabei sind die Kegel M_1, M_2 als einfache Perspectivkegel ihrer Leitcurven $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ vorausgesetzt. Da die vollständige Schnittcurve von der Ordnung $m^2 r_1 r_2$ ist, so kommt zu der Curve $\mathfrak{S}$ noch eine Curve $\mathfrak{R}$ hinzu von der Ordnung $m r_1 r_2 (m-1)$. Man lege durch $M_1 M_2$ eine Tangentialebene an den Kegel K. Dieselbe enthält zwei unendlich benachbarte Erzeugende von K, auf welchen wir ein Paar zugeordneter Punkte A_1, A_2 und die ihnen unendlich benachbarten zugeordneten Punkte B_1, B_2 der Leitcurven betrachten wollen. Nun schneiden sich die beiden Geraden $M_1 A_1$, $M_2 A_2$ in einem Punkt von $\mathfrak{S}$, ferner die beiden Geraden $M_1 B_1$, $M_2 B_2$ in dem unendlich benachbarten Punkt von $\mathfrak{S}$; es schneiden sich aber auch die beiden Geraden $M_1 A_1$, $M_2 B_2$ und ebenso die beiden Geraden $M_1 B_1$, $M_2 A_2$, wodurch zwei unendlich benachbarte Punkte der Curve $\mathfrak{R}$ entstehen. Damit haben wir einen gemeinschaftlichen Punkt der Curven $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ gefunden und man erkennt, dass die beiden zugehörigen Tangenten mit den beiden Kegelerzeugenden, welche sich in ihm schneiden, in einer Ebene und harmonisch liegen.

Die beiden Leitcurven können die vollständigen Schnittcurven des Kegels K mit zwei Flächen F_1, F_2 von den Ordnungen r_1, r_2 sein. Die Schnittcurve dieser beiden Flächen, eine Raumcurve $\mathfrak{F}$ von der Ordnung $r_1 r_2$, schneidet dann den Kegel K in $m r_1 r_2$ Punkten, welche den beiden Leitcurven gemeinschaftlich sind und welche daher auch zur Curve $\mathfrak{S}$ gehören.

Sind die beiden Flächen F_1, F_2 Ebenen, also $r_1 = r_2 = 1$, so ist $\mathfrak{S}$ von der Ordnung m; die Curve $\mathfrak{F}$ ist eine gerade Linie, auf welcher m Punkte von $\mathfrak{S}$ liegen; eine Ebene, welche durch diese Gerade und einen beliebigen

Punkt von $\mathfrak{S}$ gelegt wird, würde $m+1$ Punkte von $\mathfrak{S}$ enthalten; $\mathfrak{S}$ ist also eine ebene Curve.

Diesen speciellen Satz hat Steiner im 1. Bd. des Crelle'schen Journals aufgestellt. Die Tangentialebenen des Kegels K durch die Gerade $M_1 M_2$ geben gemeinschaftliche Punkte von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$; da $\mathfrak{S}$ eine ebene Curve ist, so treffen die Tangenten von $\mathfrak{S}$ in diesen gemeinschaftlichen Punkten die Gerade $M_1 M_2$ alle in demselben Punkt, folglich müssen die Tangenten von $\mathfrak{R}$ in diesen gemeinschaftlichen Punkten die Gerade $M_1 M_2$ ebenfalls in einem und demselben Punkt treffen, der zum vorigen harmonisch liegt in Bezug auf M_1 und M_2.

XXV. Gleichung der Trasse einer Curve. Die Aufstellung dieser Gleichung stösst im Allgemeinen auf unüberwindliche Eliminationsschwierigkeiten. Es mögen zum Schluss die folgenden beiden einfachen Fälle angeführt werden, in welchen ich die Gleichung der Trasse aufgestellt habe:

1) Die Basiscurve sei von dritter Ordnung, habe im Coordinatenanfangspunkt eine Spitze und die unendlich ferne Gerade zur Inflexionstangente. Wenn die Spitzentangente in die y-Axe fällt und der Berührungspunkt der unendlich fernen Inflexionstangente in der Richtung der Geraden $a x + b y = 0$ liegt, so ist die Gleichung der Basis:

$$x^2 + (a x + b y)^3 = 0.$$

Die Ordnungszahl der Trasse wird nach der Formel in (XII): $\mu = 4$. Nimmt man aber den Pol unendlich fern auf der x-Axe, also auf der unendlich fernen Inflexionstangente, so erniedrigt sich die Ordnungszahl auf $\mu = 3$. Als Gleichung der Trasse erhält man in diesem Fall:

$$2 x - 9 a (a x + b y)^2 [3 a^2 (a x + b y) + 1] = 0.$$

Man sieht daraus, dass die Spitze der Basis ein einfacher Punkt der Trasse ist, dessen Tangente mit der Spitzentangente zusammenfällt.

2. Die Basis sei von dritter Ordnung, habe im Coordinatenanfangspunkt einen Doppelpunkt, dessen Tangenten zur x-Axe symmetrisch liegen, und eine unendlich ferne Inflexionstangente, deren Berührungspunkt in der Richtung der y-Axe liege. Die Gleichung der Basis ist:

$$a x^2 + b y^2 + x^3 = 0.$$

Die Ordnungszahl der Trasse wird nach (XII) $\mu=6$, erniedrigt sich aber auf $\mu = 5$, wenn der Pol wieder auf der x-Axe unendlich fern angenommen wird. Die Gleichung der Trasse wird dann:

$$a x^3 (5a + 9x)^2 + 2b y^2 (a + 3x)^3 = 0.$$

Man erkennt daraus sofort, dass der Doppelpunkt der Basis eine Spitze der Trasse ist.

Riga, Juni 1893.

Nach Vollendung dieser Arbeit bekomme ich durch das soeben erschienene Heft 2, Bd. XXII des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik Kenntniss davon, dass die Steiner'sche Curve von Herrn J. C. Kluyver behandelt worden ist: Twaalfde vraagstuk beantwoord; Niew Archief XVII.

Wie ich aus dem im Jahrbuch enthaltenen Referat ersehe, enthält diese Arbeit ebenfalls die Bestimmung aller Singularitäten der Curve.
