

Zum Bau des Massraumes.

Von

Fr. Graberg.

Klar ist im Geiste nur, was
der Mensch tätig begreift.

Im Jahr 1854 leitete Riemann seinen Vortrag: »Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«*), mit folgenden Worten ein:

»Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie gibt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung notwendig, noch a priori, ob sie möglich ist. Diese Dunkelheit wurde weder von den Mathematikern noch von den Philosophen gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem auch die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb«.

Seit 40 Jahren hat aber die Wissenschaft den dogmatischen Vortrag überlieferter Begriffe mehr und mehr zurücktreten lassen, um die Entwicklung der Begriffe

*) Riemann's Math. Werke. Herausgg. v. Weber, pg. 254.

aus der eigenen Erfahrung des Lernenden zu fördern, weil die Empfindungen und Vorstellungen, welche die Tätigkeit des Menschen herbeiführt, die einzig sichere Grundlage seiner Begriffe, seines Denkens bilden. So werden auch die Begriffe des Raumes und der Constructionen im Raume aus der Erfahrung gewonnen. Dieselben entwickeln sich nämlich aus den Vorstellungen, welche wir von Tastbewegungen der Hand, des Blickes und der Werkzeuge ableiten. Nebst den Wahrnehmungen zeitweiser Begrenzung, der Grösse, begleiten solche Tastbewegungen vorab auch die Wahrnehmungen der Richtungen, nach welchen dieselben stattfinden.

Grössenbestimmung aber reicht zur genauen Erkenntniss räumlicher Objecte: der Bodengestalt, von Natur- und Handwerkserzeugnissen, nicht aus; das richtige Verständniss des räumlichen Zusammenhanges solcher Gestalten, das Vermögen dieselben genau nachzubilden, wird allein vollständig erworben durch Einübung geordneter Tastbewegungen der Hand, des Blickes und der Werkzeuge, weil wir nur dadurch die Vorstellungen der Bewegungsrichtungen wirklich beherrschen lernen.

Das Dunkel, das die wirkliche Bedeutung der Raumbegriffe solchen verhüllt, die sich nur an deren Nominaldefinitionen und an wörtlich gefasste Axiome halten, verschwindet mit der tatsächlichen Darstellung der Linien und Flächen, welche jenen Raumbegriffen zu Grunde liegen. Darunter ist nicht bloss wirkliche Versinnlichung der Linien und Flächen durch Modell oder Zeichnung zu verstehen, sondern es kann solche Darstellung auch dadurch stattfinden, dass man sich die betreffenden Tastbewegungen in bestimmter Ordnung vollzogen denkt.

Unerlässlich ist jedoch, dass man sich dabei der **Bewegungen** im Zusammenhang erinnere, nicht etwa bloss der Namen oder Bezifferung combinirter Linien und Flächen. Es genügt auch nicht die Vorstellung einzelner Lagenverhältnisse, sondern der Bewegungsvorgang muss als Ganzes gegenwärtig sein, damit man sich ein vollständiges Bild von den Raumverhältnissen einer mechanischen Einrichtung, eines Organismus verschaffen kann.

Die Geometrie der Lage nimmt die Gestalten als fertig gegeben an und ordnet dieselben systematisch, beim Bau des Massraumes dagegen, gehen wir **organisatorisch** zuwerke, indem wir die Gestalten durch Verbindung und Bewegung von Richtungen und Flächen hervorbringen. Nicht nur in einem System von Lagen- und Grössenverhältnissen besteht uns daher der Massraum, sondern er ist ein Organismus von Bewegungsvorstellungen, der unsere Blickbewegung, unser Augenmass und damit zugleich die Tastbewegungen der Hand und der Werkzeuge regelt, wie die Grammatik ein Organismus ist, der den Gebrauch der Sprache regelt.

Desgleichen begründen die Ausführung von Bewegungen und die Verbindung ihrer Richtungen die räumlichen Massverhältnisse, nicht aber die Ordnung von Grössenverhältnissen durch den Wort- oder Zahlenbeweis. So haben sich die Kunstfertigkeiten durch Verbindung und Ordnung der Erfahrungstatsachen, welche sie an die Hand gaben, zu technischen Wissenschaften ausgebildet, während anderseits Physik, Chemie und andere Naturwissenschaften durch Leitung des Instrumentenbaues, verschiedener Fabrikationszweige und Anstalten im Begriffe stehen sich mit den Künsten zu verschmelzen.

Als »Hypothese« erklärt Riemann »alles zu den Erscheinungen Hinzugedachte«^{*)}. Wir bewegen uns (bezw. die Hand, den Blick, ein Werkzeug) in bestimmter Richtung, wenn wir uns ein bestimmtes Ziel setzen. »Richtung« ist also eine Vorstellung, welche die Bewegung begleitet, mithin, gleich der Grösse, eine Hypothese, welche der Geometrie, sagen wir genauer, der Raumerkenntniss zu Grunde liegt. Fassen wir die Richtung beim Beginn der Bewegung in's Auge, so werden wir deren Grösse am Schlusse derselben inne. Grösse ist eine zählbare Auffassung von Bewegungsacten, Richtungsvorstellungen müssen die sichere Ausführung der Bewegungen leiten.

Weil unsere Tastorgane, die Haut und die Netzhaut, sich in Flächen ausbreiten, so stellen wir uns die Richtungen unserer Tastbewegungen durch Flächen verbunden vor. Ueberdies besteht auch die mechanische Bearbeitung der Stoffe in der Herstellung und Umgestaltung von Flächen. Aus Gespinnstfasern werden Flächen geflochten und gewoben; von Steinen, Balken und Brettern baut man Wände und Dächer; aus Thon und Glas bildet man Gefässe; das Metall wird in Flächen getrieben, geschmiedet und geprägt, die Gussformen stellen Verbände von Flächen dar. Die Fläche, als Verband von Richtungen, dient daher beim räumlichen gestalten als Bauelement, indem sie manigfaltige Bewegungsrichtungen zusammenhängend regelt.

Eine ebene Fläche ist ihrer Lage nach durch 2 Richtungen bestimmt. Dreht sich die Ebene um die eine dieser Richtungen als Axe, so regelt sie dabei die

^{*)} a. a. O. pg. 493.

Drehung aller in der Ebene liegenden Richtungen um deren Bindepunkte mit der Axe, wenn die Drehung der anderen bestimmenden Richtung durch die Verschiebung eines Punktes derselben nach einer Richtung ausserhalb der drehenden Ebene bekannt ist. Die Drehung der Ebene steht zu dieser Verschiebung in einem bestimmten Verhältniss, sie wird durch diese Verschiebung gemessen. Indem wir also die Drehaxe der Ebene durch einen Zeigestrahlf mit der zu dieser Axe windschiefen Massrichtung verbinden, stellen wir ein Massverhältniss zwischen den Drehungen der Ebene und den Verschiebungen des Zeigepunktes auf der Massrichtung fest. Dieses Massverhältniss regelt alsdann die Drehung der Ebene.

Der **Bau des Massraumes** stellt die Verhältnisse zwischen den **Bewegungen der Flächen** und den Verschiebungen einzelner Punkte derselben nach Linien in **Masszeichen** dar, welche aus **regelmässiger Verbindung fester und veränderlicher Richtungen** hervorgehen.

Zur genauen Auffassung von Bewegungsvorgängen ist eigene Zeichenübung so unerlässlich wie eigenes Nachrechnen zum Verständniss von Zahloperationen. Die »innere« Vorstellung erwächst aus zielbewussten Zeichenübungen und verknöchert zu starren Abstractionen ohne die stete Verbindung mit der tatsächlichen Anschauung. Da wir also den Leser ohnehin bitten müssen, selber nachzuzeichnen, bietet unsere Tafel nur eine Auswahl von leitenden Masszeichen, geordnet in 2 Zeichenstäbe mit je 3 Feldern, welche fortlaufend von 1—6 beziffert sind.

I. *Massaxen.*

(Feld 1,4)

1. Die Drehung einer Ebene um eine Gerade in ihr, deren Axe, wird im allgemeinen geregelt durch das Gleiten zweier Punkte dieser Ebene auf 2 Geraden ausserhalb derselben, welche somit zur Axe windschief liegen. Der Bindestrahl der beiden gleitenden Punkte ist mit der Axe durch einen Punkt verbunden, der sich während der Drehung auf der Axe verschiebt, eine Punktreihe beschreibt.

2. Massaxen. Jeden Punkt einer Leitgeraden, ausserhalb der drehenden Ebene, verbindet mit der anderen Leitgeraden eine Ebene, welche auf der Drehaxe einen Punkt der Reihe bezeichnet. Wenn jener Zeigepunkt auf der Leitgeraden sich nach deren Richtung verschiebt, messen die Zeigebenen durch die andere Leitgerade die Drehaxe nach der Leitreihe. Die Leitgeraden sind vertauschbar. Jede von ihnen kann als »Massstab« dienen, während sich die Zweigebenen um die andere drehen. Wir nennen deshalb die Leitgeraden Massaxen.

3. Massebenenpare. Jede der beiden Massaxen verbindet ein Massebenenpar mit einander. Stellt das rechtwinklige Axenkreuz $|A_1 A_3 = a_1, A_2 A_4 = a_2|$ die beiden Massaxen $[a_1, a_2]$ dar, so bezeichnen wir die Massebenen:

$$[A_2 A_3 A_4 = \alpha_1; A_3 A_4 A_1 = \alpha_2; A_4 A_1 A_2 = \alpha_3; A_1 A_2 A_3 = \alpha_4]$$

Diese werden durch Kanten in folgender Ordnung verbunden:

$$[\alpha_1 | A_3 A_4 = b_1 [\alpha_2] b_2 = A_4 A_1 | \alpha_3];$$

$$[\alpha_1 | A_3 A_2 = b_4 [\alpha_4] b_3 = A_1 A_2 | \alpha_3]$$

Parbund.

4. Regelstrahlen. Die Drehaxe $|c|$ des Zeigebüschels $|c[\gamma]|$ sei nun zunächst durch ihre Spurpunkte $\cdot b_{2,4}$ mit den Kanten $|b_{2,4}|$ in $[\alpha_{2,4}]$ verbunden.

Dann misst das Zeigebüschel $|c[\gamma]|$ die Gegenkanten $|b_{1,3}|$ nach der Massreihe $|a_1|$ auf $|a_1|$ und bestimmt eine Schar von Regelstrahlen $|b_{1,3}|$, welche mit der Zeigeraxe $|c|$ durch die Punktreihe $|c|$ verbunden ist. Zugleich misst dasselbe Zeigebüschel die Axe $|a_2|$ nach derselben Punktreihe $|a_1|$ und bestimmt dadurch eine zweite Schar von Regelstrahlen $|a_{12}|$, welche auf $|c|$ eine Punktreihe $|c^*|$ bezeichnet.

Jedes Strahlenpar $|b_{1,3}, a_{12}|$ ist durch ein Vierseit $|b_{2,4} b_{1,3}|$ bedingt, das die Zeigebene $[\gamma]$ mit dem Vierflach $[\alpha_1 \dots 4]$ verbindet und stellt in diesem Vierseit ein Par Gegenpolaren dar.

5. Die Pole $\cdot c, c^*$ verbindet mit $|a_{1,2}; b_{1,3}|$ ein zweites Par Gegenpolaren $|b_{12}^*, b_{13}^*|$ einer Zeigebene $[\gamma^*]$. Der Bindestrahl $|A_2 c|$ bezeichnet nämlich auf $[\alpha_2 | b_2 A_3 | c A_3]$ den Richtpunkt $\cdot c'$ der Spur $[\alpha_2 | A_4 c' | a_2 c]$, welche auf $|a_1|$ den Richtpunkt $\cdot a_1^*$ des Regelstrahles $|a_1 | a_{12}^* | a_2|$ anzeigt. Zugleich bezeichnet $|A_2 c^*|$ auf $|b_2 A_3|$ den Richtpunkt $\cdot c'^*$ der Spur $|A_1 b_1^* c'^*|$ und damit $|b_1 | b_{13}^* | b_3|$, den Regelstrahl, der $\cdot c^*$ mit $|b_{1,3}|$ verbindet.

In dem Vierseit $|A_{1,4} A_3 c'|$ ist $|b_1 a_1^*|$ Gegenpolare zu $|A_3 c'|$; in dem Vierseit $|A_{1,4} A_3 c'^*|$ » $|a_1 b_1^*|$ » » $|A_3 c'^*|$. $A_3 | c', c'^*|$ fallen mit $|A_3 b_2|$, der Diagonalen von $|A_{1,4} c' c'^*|$ zusammen, daher treffen sich $|b_1 a_1^*, a_1 b_1^*|$ auf $|b_2|$ in $\cdot b_2$, sind $|a_1, b_1|$ Gegenpolaren des Vierseits $|b_2 b_2^* b_1 b_1^*|$ und liegen $\cdot b_2, a_1^*, b_1^*$ auf demselben Strahle, der Spur der Zeigebene $[c a_{12}^* b_{13}^* = \gamma^*]$.

6. Die Polarebenen $[\mathfrak{b}_{13} \mathfrak{a}_{12}^*, \mathfrak{a}_{12} \mathfrak{b}_{13}^*]$ verbindet eine windschiefe Gegenpolare $|\mathfrak{b}_{24}^*|$ zu $|\mathfrak{b}_{24}|$. Wie $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1^*|$ in $[\alpha_2]$ auf $|\mathfrak{b}_2|$ durch \mathfrak{b}_2^* verbunden sind, so auch $|\mathfrak{b}_3 \mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1^*|$ in $[\alpha_4]$ auf $|\mathfrak{b}_4|$ durch \mathfrak{b}_4^* ; folglich ist $|\mathfrak{b}_{24}^*|$ Bindekante von $[\mathfrak{b}_{13} \mathfrak{a}_{12}^*, \mathfrak{a}_{12} \mathfrak{b}_{13}^*]$.

Dreht sich $[\gamma]$ um $|c|$, so dreht sich zwar die polare Gegenebene $[\gamma^*]$ in entsprechendem Masse, allein $|\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_3| \mathfrak{a}_1^*$ gehen stets durch die Pole $\mathfrak{b}_{2,4}^*$ der festen Strahlen $|A_3 \mathfrak{b}_2, A_1 \mathfrak{b}_4|$. Die Richtung von $|\mathfrak{b}_{24}^*|$ hängt also nur von der Richtung der Zeigeraxe $|c|$ ab und umgekehrt.

7. Jede Zeigebene $[\gamma]$ durch $|c|$ deutet ein *Polarvierfläch* $[\gamma]_4$ an in Bezug auf das Massvierfläch $[\alpha]_4$. In diesem Polarvierfläch ist jede Kante $|c|$ Polarstrahl zu zwei Gegenebenen $\cdot c[\mathfrak{b}_{24}^*]c^*$ und jede Ecke $\cdot c$ Pol einer Gegenebene $[c^* \mathfrak{b}_{24}^*]$.

Auf der Bindekante $|\mathfrak{b}_{24}^*|$ der beiden Gegenebenen $[c \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1^*, c^* \mathfrak{b}_1^* \mathfrak{a}_1]$ treffen sich nämlich die Gegenpolaren $|\mathfrak{b}_{13} \cdot \bar{c} \cdot \mathfrak{a}_{12}|, |\mathfrak{a}_{12}^* \cdot \bar{c}^* \cdot \mathfrak{b}_{1,3}^*|$ und bezeichnen dadurch die Pole \bar{c}, \bar{c}^* in Bezug auf $\mathfrak{b}_{2,4}^*$ weil $|\mathfrak{b}_{13}, \mathfrak{a}_{12}^*; \mathfrak{b}_{13}^*, \mathfrak{a}_{12}|$ Diagonalen der Vierseite in $[c \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1^*, c^* \mathfrak{b}_1^* \mathfrak{a}_1]$ sind.

8. Das Polarvierfläch $[\gamma]_4$ einer Zeigebene $[\gamma]$, welche mit $|\mathfrak{a}_1|$ parallel ist, enthält eine zu $|\mathfrak{a}_1|$ parallele Kante.

Zeigt nämlich $[\alpha_3 | \mathfrak{b}_{23} | \gamma]$ auf $|\mathfrak{a}_2|$ den Richtpunkt $\cdot \mathfrak{a}_2 \cdot$, so ist $|\mathfrak{a}_{12}|$ mit $|\mathfrak{b}_{21}|$ durch den unendlichfernen Zielpunkt $\cdot \mathfrak{a}_1 \cdot$ von $|\mathfrak{a}_1|$ verbunden. Diesem entspricht polar die Mitte von $|A_{13}|$. Ist $[\gamma]$ zugleich parallel zu $|\mathfrak{a}_2|$, so wird $\cdot \mathfrak{a}_2 \cdot$ zum Ziel der Massage $|\mathfrak{a}_2|$ und $|\mathfrak{a}_{21}|$ zur unendlichfernen Zeile von $[\gamma, \mathfrak{a}_1 c^* \mathfrak{b}_1^*]$, folglich ist dann auch $\cdot c^*$ Ziel von $|c|$ und $|\mathfrak{b}_{13}^* |c|$. Ferner ist $|\mathfrak{b}_{12}^* || \mathfrak{a}_1 || \mathfrak{b}_{34}^*|$, daher $[\mathfrak{b}_{13}^* \mathfrak{b}_{24}^* || \mathfrak{b}_{13} \mathfrak{b}_{24}]$ und $|\mathfrak{b}_{24}^* || \mathfrak{b}_{13}|$. Rückt $\cdot \mathfrak{b}_2 \cdot$ in die Mitte von $|A_{14}|$, so wird $\cdot c \cdot$ zur Mitte

von $|\alpha_{12}^*|$ und $|\delta_{13}^* \delta_{24}^*|$ fällt mit der unendlichfernen Zeilebene des Massraumes zusammen.

9. Die Zeigebene $[\delta]$ durch eine Axe $|d|$, welche nicht mit einem Massaxenpaar verbunden ist, bezeichnen durch ihre Kanten mit den Massebenen $[\alpha_{1..4}]$ 2 feste Punktenpaar $.\delta_{24}, \delta_{13}$, und durch die Gegenpolaren $|c_{13}, \delta_{24}|$ der Vierseite aus jenen Kanten ein veränderliches Punktepar $.\delta, c^*$.

10. Der Regelstrahl $|\delta_{13}^*|$, welcher $.c^*$ mit $|\delta_{13}|$ verbindet, bestimmt mit $|d|$ eine Zeigebene $[\delta^*]$, in welcher die Gegenpolare $|\delta_{24}^*|$ zu $|\delta_{13}^*|$ durch den Bindepunkt $.\delta$ der Gegenpolaren $|\delta_{13}|$ zu $|\alpha_{12}|$ mit der Zeigeraxe $|d|$ geht. Denn $.\delta$ ist Bindepunkt von $|\delta_{13}|$ mit $[d\delta_{13}^*]$, daher geht $|\delta_{13}^* \delta|$ durch den Bindepunkt $|A_1 \delta_1 . \delta_2' . \delta_{12}^* d|$ und bezeichnet in $[\alpha_4]$ der Bindestrahl $|\delta_3^* \delta_4|$ mit $[b_{34}^* d]$ auf $|b_4|$ den Richtpunkt $.\delta_{4d}$ des Regelstrahles $|\delta_{(24)}^* d|$.

Der Bindepunkt $|\delta_{(24)}^* d . \delta^* . \delta_{13}^*|$ liegt auf der Kante von $|\delta_{(24)}^* d \delta_{13}^* | c \delta^* | \delta_{13}^* \delta_{24}^* |$, der windschiefen Gegenpolaren von $|d|$ in Bezug auf $[\alpha]_4$.

11. Liegt das Streckenpar $|\delta_{13}, \delta_{24}|$, welches das Massvierseit $|\delta_{12} \delta_{34}|$ der Zeigebene auf deren Axe $|d|$ begrenzt, **in- oder nebeneinander**, so verschiebt sich das Punktepar $.c^* \delta$ **gegenläufig**. Desswegen fallen $.c^*, \delta$ zweimal zusammen, bilden je einen **Doppelpunkt** und bestimmen durch ihre zusammenfallenden Regelstrahlenpaare zu $|b_{13}, b_{24}|$ eine **Doppellebene**. (Hyperbolische Involution). Greift dagegen das Streckenpar $|\delta_{13}, \delta_{24}|$ **übereinander**, so verschiebt sich $.c^*, \delta$ **gleichläufig**. Desswegen kommen dann keine Doppelpunkte in dem Reihenpar vor. (Elliptische Involution.)

12. Zu jeder Zeigeraxe $|d|$ gibt es eine Parallelebene, deren Regelstrahlen zu $|b_{1,3}, b_{2,4}|$ durch das Ziel von $|d|$ gehen, während die Gegenpolaren derselben in der Mitte der gleich- oder gegenläufigen Reihenpare $|c^*, \delta|$ zusammentreffen. Ist die Mittelebene dieser Gegenpolaren zugleich Doppelsebene, so grenzen jene Reihenpare daselbst aneinander. (Parabolische Intvolution.)

Dreibund. (Feld 4).

13. Dreiteilung der Zeigeraxe. Ziehen wir nur die 3 Regelstrahlen in Betracht, welche eine Zeigebene um eine freie, mit keinem der Massaxenpare verbundene Drehaxe auf diesen Massaxen bezeichnet, so erhalten wir auf dieser Zeigeraxe eine Dreiteilung. Die Zeigebene $[\gamma]$ enthält nämlich die Bindestrahlen $|b_{1,3}, b_{2,4}, a_{1,2}|$ der Axenpare $|b_{1,3}, b_{2,4}, a_{1,2}|$. Auf einer Drehaxe $|d|$ bezeichnen jene Bindestrahlen $\delta_{12,13,24}$.

14. Jeder Strahl $|\delta_{12} p|$, welcher einen dieser Teilpunkte mit dem Bindepunkt $|b_{1,3} \cdot p \cdot b_{2,4}|$ verbindet, liegt in seiner Polarebene $\delta_{12} [b_{1,3}^* b_{2,4}^*]$.

Der Verband $[dA_4 | A_4 \delta_{12} | A_4 a_{1,2}]$ ergibt, dass $|A_4 \delta_{12} \cdot \delta_{12}' \cdot \alpha_4|$ zugleich der Bindepunkt der Spuren dieser Ebenen in $[\alpha_4]$ ist. Der Bindestrahl $A_4 [b_{1,3} | p | b_{2,4}]$ trifft $[\alpha_4]$ in $|A_3 b_3 \cdot p_4 \cdot A_1 b_4|$ und ist vermöge des Kreuzverbandes $|g_2 \cdot \alpha_1 \cdot g_4, b_{1,3} \cdot p \cdot b_{2,4}|$ in $[\gamma]$ die Axe eines Polarbüschels mit der Gegenpolaren $|A_2 a_1 = g_4'|$, mithin zugleich der Polarstrahl zu $[A_4 a_{1,2}]$. Andererseits verbindet den Strahl $|A_4 \delta_{12} = d_{1,2}'|$ mit $|b_{1,2}|$ ein Ebenenpar, das auf $|b_{3,4}|$ die $\delta_{3,4}^*$ der Regelstrahlen $\delta_{12} [b_{3,4}^*]$ bezeichnen. Als Gegenpolare zu $|A_2 a_1|$ im Vierseit $|A_{1,3} A_2 \delta_{1,2}'|$ geht $|b_{3,4}^*|$ durch den Gegenpol $\cdot \alpha_1^*$ zu α_1 .

wo dieselbe mit $|A_2 p_4|$, der Gegenpolaren zu $|b_{3,4}|$, zusammentrifft.

Die Axen der Ebenenbüschel $|A_4 p[\delta_{1,2}]$, $|A_4 \alpha_1^*[b_{3,4}^*]$ sind also mit $|a_2|$ durch $[a_2 \alpha_1^*]$, deren Leitungen $|\alpha_1 \delta_{1,2}', b_{3,4}|$ durch A_2 . verbunden, deren Spurenbüschel $p_4 |b_{1,2}'|, \alpha_1^* |b_{3,4}^*|$ verbindet daher $|b_{3,4}|$, folglich verbindet . der Strahl $|b_{1,2} p|$ die Zeigebene $[\gamma]$ mit $[\delta_{1,2} b_{1,3}^* b_{2,4}^*]$

In $[b_{1,3}^* b_{2,4}^*]$ liegen zugleich die Leitaxen $. p |c_{1,2}|$ der Regale $|d |b_{1,3}, b_{2,4}||^2$, denn dieselben verbinden die Regelstrahlen $|A_1 \delta_2, A_3 \delta_4, \delta_{1,2} b_1^*; A_3 \delta_2, A_1 \delta_4, \delta_{1,2} b_2^*|$. Da nun auch $|p \alpha_1^*|$ in dieser Ebene liegt, so verbinden die Kanten $. p |c_{1,2}^*|$ die Nullebenen $p [b_1 c_1, b_2 c_2]$ der Dreibünde $|d |b_{1,3}; b_{2,4}||$ mit der Nullebene $. p [\alpha_1^* \delta_{1,2}]$ des Dreibundes $|d, \alpha_{1,2}||$. Im Uebrigen lässt sich die zusammenhängende Bewegung der Regelstrahlen einfacher mittelst der Bahnen ihrer gegenseitigen Bindepunkte erkennen, weil in diesen Bahnen die Aenderungswiese der verbundenen Richtungen durch die Wendungen der Tangente und der Schmiegungeebene zum gemeinsamen Ausdruck kommt.

II. Masscurven.

1. Das Büschel der Polarcuren in seiner Massebene.

(Feld. 2,3)

1. Spurenpare $|g|_{1..4}$ der Zeigebene $[\gamma]$ in den Massebenen $[\alpha]_{1..4}$. Die Zeigeraxe $|c|$ hat mit $|a_2|$ den $. \alpha_c$. gemein. Dann geht durch $. \alpha_c$. das Spurenpar $|g_{1,3}|$ in den Massebenen $[\alpha_{1,3}]$ und bezeichnet auf den Nebenaxen $|b|_{1..4}$ die Punkte $|b_1 . b_1 |g_1 |b_4 . b_4|, |b_3 . b_3 |g_3 |b_2 . b_2|$ des Spurenpares $|b_{1,2} = g_2, b_{3,4} = g_4|$ durch die Bindepunkte $[\alpha_2 . c_2 |c |c_4 . \alpha_4]$.

2. Massreihen $|b|_{1..4}$ auf den Nebenaxen $|b|_{1..4}$. Dreht sich die Zeigebene $[\gamma]$ um $|c|$, so misst sie durch ihre Spuren $|g|_{1..4}$ auf den Nebenaxen $|b|_{1..4}$ die Punkt-reihen $|b|_{1..4}$; auf der Hauptrichtung $|a_1|$ die Punkt-reihe $|a_1|$.

3. Die Bindepunkte $|b_{13} \cdot \pi \cdot b_{24}|$ liegen in der Polarebene $[a_1 a_c^*]$ zu $|a_2 \cdot a_c \cdot c|$. Polarebene $[a_1 a_c^*]$ zu $\cdot a_c$. In jeder der beiden $[\alpha]_{1,3}$ bildet die Spur $|g|_{1,3}$ mit $|a_2|$ und einem Nebenaxenpar $|b|$ ein Vierseit. Ein solches zeigen auch z. B. in $[\alpha_1]$ die Strahlenpare $\cdot A_2 |A_3, b_1|, \cdot A_4 |A_3, b_4|$. Ist $|A_2 b_1 \cdot p_1 \cdot A_4 b_4|$, so stellt $|A_3 p_1|$ den Polarstrahl zu $|A_3 a_c|$ in Bezug auf $|b|_{1,4}$ dar. Der Bindepunkt $|A_3 p_1 \cdot a_c^* \cdot a_2|$ bestimmt daher mit $|a_1|$ die Polarebene $[a_1 a_c^*]$ zu $\cdot a_c$ in Bezug auf $[\alpha]_{2,4}$.

4. Die Bindepunkte $|b_{13} \cdot \pi \cdot b_{24}|$ liegen in der Polarebene $[a_1 a_c^*]$. Durch $[\gamma \cdot a_1 \cdot a_1]$ geht der Regelstrahl $|a_c a_1|$, dessen Gegenpolare $|a_c^* a_1^*|$ liegt in der Polarebene $[a_c^* a_1^*]$ zu $\cdot a_c$, auf derselben befindet sich auch der Bindepunkt $|b_{13} \cdot \pi \cdot b_{24}|$, gezeigt durch den Verband:

$$|b_1 b_{13} | A_3 p_3 [a_c^* a_1] p_1 A_1 | b_{24} b_2 | ; | A_3 p_3 \cdot \pi \cdot p_1 A_1 |.$$

5. $\cdot a_{1c}^*$ deutet den Verband zweier zusammenfallenden Regelstrahlen $|b|_{13,24}$ an. Geht die Zeigebene durch $|a_2|$ so fallen in dieser Massaxe zwei Regelstrahlen $|b|_{13,24}$ zusammen. Der Bindepunkt $|a_2 \cdot a_c^* \cdot a_c^* a_1|$ deutet also den Verband dieser beiden Strahlen an.

7. $\cdot a_c^* \cdot \pi$ sind die beiden einzigen Punkte des Strahles $|a_c^* \pi|$, welche die Regale $\|b_{1,3}, b_{2,4} |c|^2$ mit $[a_c^* a_1]$ verbinden. Denn einzig $|a_c^* a_1^*|$ steht der $|a_c a_1|$ polar gegenüber und diese ist durch die Zeigebene $[c a_1]$ bestimmt.

7. $|p|_{13}$ beschreibt ein Strahlbündel um den Bindepunkt $|A_2 c_2 \cdot p \cdot A_4 c_4|$, wenn $|a_c^* \pi|$ ein solches um $.a_c^*$ durchläuft. In dem Vierseit $|A_{1,3} a_c^* \pi|$ ist $|p|_{13}$ Gegenpolare zu $|a_c^* \pi|$, zugleich verbindet $|p|_{13}$ das Ebenenpar $[A_2 g_2, A_4 g_4]$ mit $[a_c^* a_1]$; desgleichen $|A_2 c_2 \cdot p \cdot A_4 c_4|$ die $|p|_{13}$ mit $[a_2 c]$. Dieser Bindepunkt $.p$ ist allen Richtungen von $|p|_{13}$ gemein, weil $|Ac|_{2,4}$ Axen der Ebenenbündel $|Ag|_{2,4}$ sind. Vermöge der Polarität $.a_1^*, a_1$ entspricht also jedem Strahle $|a_c^* a_1^*|$ ein Strahl $|p a_1|$.

8. **Bindekanten der Berührebenenpaare mit $[a_1 a_c^*]$.**
 $.p |A_{1,3}|$ verbinden die Berührebenenpaare der Regale $\|b_{1,3,2,4} c\|$ zu $.A_{1,3}$ mit $[a_c^* a_1]$. $|A_1 c_2|$ ist in $[a_2]$ der Regelstrahl $|b|_{13}$ zu $.A_1$, $|A_1 A_2|$ die Leitaxe durch $.A_1$ in dem Regal $\|b_{1,3} c\|^2$, deshalb $|A_2 c_2|$ in $[a_2 c]$ die Spur der Berührebene $[A_2 A_1 c_2]$ an dieses Regal. Desgleichen ist $|A_4 c_4|$ die Spur der Berührebene $[A_4 A_1 c_4]$ an das Regal $\|b_{2,4} c\|^2$. Folglich bezeichnet $|A_2 c_2 \cdot p \cdot A_4 c_4|$ die Richtung der Bindekante $[A_2 A_1 c_2 | A_1 p | A_4 A_1 c_4]$. Aus gleichen Gründen bezeichnet $[A_2 A_3 c_2 | A_3 p | A_4 A_3 c_4]$ die Bindekante der beiden Berührebenen zu $.A_3$. Das Dreieck $A_1 A_3 p$ liegt in $[a_c^* a_1]$, daher verbinden $.p |A_{1,3}|$ zugleich jene Berührebenenpaare mit dieser Polarebene zu $.a_c$.

9. Die Berührebenenpaare der Regale $\|b_{1,3}, b_{2,4} |c\|^2$ zu $.\pi$ sind mit $[a_c^* a_1]$ gleichfalls durch dieselbe Kante $|p \tau|$ verbunden. $|A_{1,3} |c_2|$ in $[a_2]$ enthalten die Planpunkte der Leitaxen von $\|b_{1,3}, b_{2,4} |c\|^2$, ebenso enthalten in $[a_4]$ die $|A_{1,3} |c_4|$ die Planpunkte derselben Leitaxen. $|a_2|$ ist gemeinsamer Regelstrahl beider vorgenannten Regale, deshalb liegen die Leitaxen durch $.\pi$ für beide Regale in $[a_2 \pi]$, welche in $[a_{2,4}]$ die Spuren $.a_1^* |A_{4,2}|$ zeigt.

$|A_1 c_2 \cdot c_{21} | a_1^* A_4 | c_{23} \cdot A_3 c_2 |$ bezeichnen mithin die Leitaxen $\cdot \pi | c_{21}, c_{23} |$. Die Bindekanten $[A_1 c | c_{21} [a_2 a_1^*] c_{23} | c A_3 |$ treffen sich in $\cdot a_c \cdot$ und bilden ein Vierseit mit $\cdot a_1^* | A_{2,4} |$. In diesem ist $| a_c \pi |$ Polare zu $\cdot a_1^* \cdot$. Zugleich ist $| a_c \pi |$ in der Zeigebene $[\gamma]$ Polare zu $[\gamma \cdot a_1 \cdot a_1]$ bezüglich des Vierseits $| g |_1 \dots 4$.

In $[\alpha_2]$ bilden also $| c_{21} b_1, c_{23} b_2 |$ das Seitenpar eines Vierseits, für welches $| a_1 a_1^* |$ die Polare des Bindepunktes $| b_{12} \cdot \pi_2' \cdot c_{21} c_{23} |$ ist. Deshalb treffen sich $| b_1 c_1 b_2 c_3 |$ auf $| a_1 a_1^* = a_1 |$ in $\cdot t \cdot$; desgleichen treffen sich $| b_3 c_{43}, b_4 c_{41} |$ in $[\alpha_4]$ auf $| a_1 |$ in $\cdot t \cdot$. Die genannten Geraden sind die Spuren der Berührebenen $\cdot \pi [c_{13} b_1, c_{24} b_3]$ in $[\alpha_{2,4}]$. $| t \pi |$ liegt in $[a_c^* a_1]$ und verbindet also mit dieser jene beiden Berührebenen.

Die Leitaxen $\cdot a_c^* | c_1, c_3 |$ liegen in der Polarebene $[a_2 a_1 c^*]$ zu $[a_2 c^* \cdot a_{1c} \cdot a_1]$, wie die von $\cdot \pi \cdot$ in der Polarebene $[a_2 a_1^*]$ zu $\cdot a_1 \cdot$. Da $| a_2 |$ gemeinsamer Strahl beider Regale $\| b_{13}, b_{24} | c|^2$ ist, so stellt $[a_2 a_1 c^* | a_c^* a_{1c}^* | a_c^* a_1]$ zugleich die Bindekante dieser zusammenfallenden Berührebenen mit der $[a_c^* a_1]$ dar.

10. **Die Polarcurve, hervorgehend aus dem collinearen Verband von Drei-, Vier- und Sechseiten der Bindepunkte mit Drei-, Vier- und Sechseiten der Bindekanten.** Das Dreiseit der Bindepunkte $\cdot A_1 A_3 a_c^* \cdot$ ist mit dem Dreiseit der Bindekanten $| A_1 p, A_3 p, a_c^* a_{1c}^* |$ durch die Gegenpolare zu $| p a_c^* |$ in $[a_c^* a_1]$ verbunden. Das Vierseit $| a_2, c, A_2 c_4, A_4 c_2 |$ zeigt $| a_{1c} p a_c^* |$ als Polarstrahl zu $\cdot a_c \cdot$ im Büschel $\cdot a_{1c} | A_{2,4} |$. Andererseits ist in der Polarebene $[a_c^* a_1]$ zu $\cdot a_c \cdot$ die $| a_c^* p |$ Gegenpolare zu $| a_{1c} t_1 t_3 |$ bezüglich des Vierseits $| A_{1,3} a_c^* p |$. und diese verbindet das Dreiseit $\cdot A_{1,3} a_c^* \cdot$ mit dem Dreiseit $| A_1 p, A_3 p, a_c^* a_{1c}^* |$, indem $| A_3 a_c^* \cdot t_1 \cdot A_1 p; A_1 a_c^* \cdot t_3 \cdot A_3 p |$.

11. Desgleichen verbindet das Dreiseit der Bindepunkte $.A_{1,3}\pi$. mit dem Dreiseit der Bindekanten $|A_1 p, A_3 p, \pi t|$ eine Gegenpolare zu $|p \pi|$ in $[a_c^* a_1]$. Ist $|A_1 c_2, c_1 | A_4 a_1^* | c_3, A_3 c_2|$, so verbinden $|c_1 b_3, c_3 b_4|$ die Berührebenen $. \pi [c_1 b_1, c_3 b_2]$ mit den Berührebenen $[b_3 c_2, b_4 c_2]$ zu $.A_{1,3}$., daher treffen $|c_1 b_4, c_3 b_4|$ die $|A_{1,3} | p$. in $|A_1 p . t_1 | \pi t | t_3 . p A_3|$. $|A_3 t_1, A_1 t_3|$ sind Spuren von $[t_1 b_1, t_3 b_2]$ in $[a_c^* a_1]$. $.A_4 | t_{1,3}$ verbinden dieses Ebenenpar mit $[A_4 \pi t]$, welche $|t \pi_4'|$ zur Spur in $[\alpha_4]$ hat.

Anderseits liegen $.A_4 | t_{1,3}$ in $.A_4 [c_1 b_3, c_3 b_4]$ und treffen $[\alpha_4]$ auf den Spuren $|b_{3,4} | a_1^*$.. Zugleich verbindet $[\pi t A_4]$ mit $[a_2 a_1^*]$ der Strahl $|A_4 \pi|$.

$[a_2 a_1^*]$ ist Polarebene zu $|b_{3,4} . a_1 . a_1|$ bezüglich $|a_2 [A_{1,3}]$, folglich sind $.b_{3,4}$. Pole bezüglich $|a_2 [a_1 . a_1^*]$, mithin $.a_1^* | b_{3,4}|$ Polarstrahlen bez. $.a_1^* | a_1, A_2|$, ferner auf $[\pi t A_4 | \pi_4' t | \alpha_4]$ die $.t'_{1,3}$. Pole bez. $.\pi_4', t$., endlich auf $|\pi t|$ auch $.t_{1,3}$. Pole bez. $.\pi, t$. Deshalb treffen sich $|A_3 t_1, A_1 t_3|$ auf $|p \pi|$ in $.\xi$.

Die Dreiseite $|A_{1,3} \pi, p t_{1,3}|$ liegen also in dem Büschel $.\xi$. und sind deshalb durch $|t t_{1,3}|$ collinear verbunden, welche gezeigt wird, wie folgt:

$$|A_{1,3} . t . t_{1,3}|, |A_1 \pi . t_3 . A_3 p|, |A_3 \pi . t_1 . A_1 p|.$$

$|t_{1,3}|$ erweist sich somit in dem Vierseit $|p \pi A_{1,3}|$ als Gegenpolare zu $|p \pi|$ wie oben $|a_1 c^* t_{1,3}|$ in dem Vierseit $|p a_c^* A_{1,3}|$ Gegenpolare zu $|p a_c^*|$ war.

12. Das Poldreiseit $|p_{1,3} a_2^*|$ verbindet das Vierseit der Bindepunkte $\{A_{1,3} a_c^* \pi\}$ mit dem Vierseit der Bindekanten $|A_1 p, A_3 p . a_c^* a_1 c^*, \pi t|$. Der Verband: $[A_4 c_1 b_3 | a_1^* p_3 [a_c^* a_1] p_1 a_1^* | b_4 c_3 A_4]$ zeigt, dass die Bindepunkte $|A_1 p . t_1 | \pi t | t_3 . p A_3|$ auf $a_1^* | p_{3,1}|$ liegen.

$|a_c^* a_{1c} \cdot t_{c\pi} \cdot \pi t|$ liegt auf $|p p_{13}|$, weil dieser Strahl die Gegenpolare zu $|a_c^* \pi|$ im Vierseit $|A_{1,3} \cdot a_c^* \pi|$ ist.

13. Die Polarcurve $(\pi_c)^2$ in $[a_c^* a_1]$ verbindet die Regale $\|b_{1,3}; b_{2,4}|c|^2$. Dreht sich die Zeigebene $[\gamma]$ um $|c|$, so beschreibt der Bindepunkt $|b_{1,3} \cdot \pi \cdot b_{2,4}|$ eine Polarcurve $(\pi_c)^2$ in $[a_c^* a_1]$, welche durch $.A_{1,3} \cdot a_c^*$ geht und $|A_1 p, A_3 p, a_c^* a_{1c}^*|$ zu Tangenten hat. Desgleichen stellt auch $|\pi t|$ eine Tangente an die Curve dar.

Bei dieser Drehung von $[\gamma]$ um $|c|$ beschreibt $|p_{13}|$ ein Strahlbüschel um $.p$ in $[a_c^* a_1]$, das nach der Punktreihe $[\gamma \cdot a \cdot a_1]$ bemessen wird. Jeder Strahl $|p_{13}|$ dieses Büschels bezeichnet auf $.a_c^* |A_{1,3}, a_{1c}^*|$ die Richtpunkte $.p_{3,1}, t_{c\pi}$ für die Zeigestrahlen $|A p|_{3,1}$ und die Tangente $|\pi t_{c\pi}|$.

14. Jede Zeigeraxe $|c|$ in $[a_2 a_{1c}]$ bedingt ein Vierseit von Bindepunkten $.A_{1,3}, a_c^*, c$ und zugleich ein Vierseit von Bindekanten $.p |A_{1,3}|, .a_{1c}^* |a_c^*, c|$, welche zusammen eine Polarcurve bestimmen.

Ausser den bisher besprochenen $.A_{1,3}, a_c^*$, gehört nämlich auch $|c \cdot c \cdot a_c^* a_1|$ auf $|a_c^* a_{1c}|$ der Polarcurve $(\pi_c)^2$ an, weil $|c|$ gemeinsame Leitaxe der Regale $\|b_{1,3}, b_{2,4}\|^2$ ist. Da $.c$ auf $|a_c^* p a_{1c}|$ liegt, geht die in $.c$ die Polarcurve berührende Bindekante der Berührebenen an die beiden Regale durch $.a_{1c}^*$, den Gegenpol zu $.a_{1c}$ bez. $.A_{1,3}$.

Eine Zeigeraxe $|c|$ in $[a_2 a_{1c}]$ bezeichnet also zunächst auf dem Dreiseit $|A_{2,4}, a_{1c}|$ die $.a_c, c_{2,4}$. Durch die Kreuzung $|A_2, c_2, p \cdot A_4 c_4|$ ergeben sich $|a_2 \cdot a_c^* |p a_{1c}|c \cdot c|$ nebst dem Tangentenpar $.p |A_{1,3}|$. Mittelst der Kreuzungen: $\|A_{1c} \cdot p_{1c} \cdot A_3 a_c^*; A_3 c \cdot p_{3c} \cdot A_1 a_c^*|$ erhält

man $|p_{1,3c} \cdot a_{1c}^* \cdot a_1|$, welcher das Tangentenpar $\cdot a_{1c}^* | a_c^*, c |$ bestimmt.

15. Jeder Zeigestrahl $|p|$ durch $\cdot p$. deutet durch seine Bindepunkte $\cdot p_{1,3}$. mit $\cdot A_1 | a_c^*, c | A_3$. ein Punktepar $\cdot \pi_{i,j}$. an und enthält sowohl den Bindepunkt $\cdot P$. des Sehnenpares $|a_c^* \pi_j, c \pi_i|$ als denjenigen der Bindestrahlen $|t_{1j} t_{3i}, t_{1a} t_{3c}|, |t_{1c} t_{3a}, t_{1i} t_{3j}|$. Als **Pascallinie** des Sechsseits $|A_{1,3}, a_c^* c, \pi_{ij}|$ verbindet also $|p|$ die **2 Brianchonpunkte** der beiden Sechseite aus den Tangenten der bezeichneten Punkte.

Die Ordnung des Verbandes bleibt unverändert, wenn man $|c|$ als Regelstrahl, $|a_2|$ dagegen als Leitaxe auffasst, indem alsdann nur die Punktepare $\cdot c_{2,4}, A_{2,4}$. ihre Bedeutung vertauschen, der Bindepunkt $|A_2 c_2 \cdot p \cdot A_4 c_4|$ aber derselbe bleibt. Deshalb sind dann auch $[a_2 c | a_{1c} p | a_1 p]$ und $[a_2 \cdot a_c^* | a_{1c} p | c \cdot c]$ dieselben. Die Seitenpare $\cdot a_c^* | A_{1,3} | c$. verbinden die Gegenpolaren $\cdot p | a_{1c}, a_{1c}^* |$. Jeder Strahl $|A_3 p_{3ac}|$ hat in dem Vierseit $|A_1 p p_{3(a,c)}|$ zur Gegenpolaren $|p A_1|$, den Polarstrahl zu $|p A_3|$ bez. $\cdot p | a_{1c}, a_{1c}^* |$. Zugleich ist $|A_3 p|$ Polarstrahl zu $|A_3 A_1|$ bez. $A_3 | a_c^*, c |$, daher wird das Gegenseitenpar $\cdot p | p_{3(a,c)} |$ auf diesen Richtungen die Gegenpolare $|A_1 p_{1ac}|$ zu $|p A_3|$ in dem Vierseit $|A_3 p p_{1(a,c)}|$ bezeichnen. Folglich deutet der Zeiger $|p p_{a_{31}}|$ auf $\cdot a_c^* | A_{1,3} |$ dasselbe Strahlenpar $|A_3 p_{3ac} \cdot \pi \cdot A_1 p_{1ac}|$ an, wie der Zeiger $|p p_{c_{31}}|$ auf $\cdot c | A_{1,3} |$. Dieselbe Polarcurve $(\pi_c)^2$ in $[a_c^* a_1]$ verbindet also die Regale $\|b_{1,3}, b_{2,4} \| a c \|^2$ und $\|b_{1,3}, b_{2,4} \| c a_2 \|^2$. Dabei verbinden die Nebenaxen $\|b_{1,4}, b_{2,4} \|_a$ die Massaxen $|a_{1,2}|$, die Nebenaxen $\|b_{1,3}, b_{2,4} \|_c$ dagegen $|a_1, c|$.

Derselbe Zeiger $|p|$ aus $\cdot p$. deutet nun auf $\cdot a_c^* | A_{1,3} | c$. die Richtstrahlen für zwei Punkte $\cdot \pi_{i,j}$. der Polarcurve $(\pi_c)^2$ an. Die Sehnen $|a_c^* \pi_i, c \pi_j|$ sind

zwei in $\cdot p_{11}$ verbundene Punktreihen. Durch $\cdot p_{11}$ geht der Bindestrahl $|A_1 c|$ der Strahlbüschel $\cdot A_1 |a_{1c} p_{11}|$, $\cdot c |p_{33} p_{11}|$. Diese Büschel der Tangenten zu $\cdot A_1, c$ werden daher durch $|a_{1c} p_{33}|$ verbunden, indem diese Grenzpunkte den Strahlen $\cdot a_c^* |a_{1c} p_{33}|$ entsprechen.

Zugleich messen jene beiden Tangentenbüschel auf $\cdot p_{11} |p_{33}, a_{1c}|$ ein zweites Par gleichfalls durch $\cdot p_{11}$ verbundener Punktreihen, deren Bindestrahlen durch $\cdot A_3$ gehen, wie diess bei den Strahlen $|A_1 a_{1c}, c p_{33}, p A_3|$ der Fall ist. Durch Vertauschung des Tangentenbüschels $\cdot a_c^*$ gegen das von $\cdot c$ ergibt sich ebenso, dass auch die Tangentenpare $|a_c^*, A_3|$ durch die Polare $|a_{1c} p_{33}|$ zu $\cdot p_{11}$ verbunden sind.

17. Die Bindepunkte $|A_1 c, x_1 | a_{1c} p_{33} | p_1 \cdot tg | A_1, c |$, $|A_3 a_c^*, x_3 | a_{1c} p_{33} | p_3 \cdot tg | A_3, a_c^* |$ sind in zweifachem Sinne Pole eines Punktsystemes auf der Polaren $|a_{1c} p_{33}|$ zu $\cdot p_{11}$; in beiderlei Sinn bilden $\cdot a_{1c}, p_{33}$ ein drittes Par Pole des Punktsystemes.

Das Sehnenpar $|A_1 c, A_3 a_c^*|$ bildet nämlich einerseits mit dem Tangentenpar $|A_3, c|$ ein Vierseit mit den Gegenpolaren $|a_{1c} p_{11}, A_3 c|$, anderseits mit dem Tangentenpar $|A_1, a_c^*|$ ein solches mit den Gegenpolaren $|a_{1c} p_{11}, A_1 a_c^*|$. Die Tangentenpolare $|A_3 a_c^*, A_1 c|$ sind in $\cdot p_{3,1}$ auf $|a_{1c} p_{33}|$ verbunden und dadurch ist zugleich der Verband der genannten Vierseite hergestellt. Hieraus ergibt sich, dass $\cdot p_{11} |A_1 p_1, A_3 p_3|$ Polarstrahlen eines Systemes sind.

Dieses Strahlssystem geht bekanntlich in das System conjugirter Durchmesser über, wenn die Tangentenpare parallel sind, deren Bindepunkte auf der unendlich fernen Zeile der $[a_c^* a_1]$ liegen und deren Pol zum Mittelpunkt der Polarcurve wird.

Besitzt ein solches System conjugirter Durchmesser ein Par Doppelstrahlen, so stellt jeder von diesen einen Durchmesser und zugleich ein Tangentenpar mit unendlich fernen Berührungspunkten, einen Zielstrahl (Asymptote) vor. Die Polarcurve, Hyperbel, besteht alsdann aus einem Bogenpaar, dessen Schenkel in entgegengesetztem Sinn in's Unendliche reichen. In solchem Zusammenhang ist es gerechtfertigt, von einem hyperbolischen Strahlsystem conjugirter Durchmesser zu sprechen. Im Allgemeinen aber zeigt uns die Anschauung nur Strahl- und Punktsysteme, welche sich in Doppелеlementen kreuzen oder begrenzen oder ohne solche verlaufen.

Kreuzende Strahlsysteme eines Poles p_{11} zeigen, dass dessen Polare Punktepaare mit den betreffenden Polarcurven gemein hat.

18. Jeder Durchmesser einer Polarcurve ist der Mittelstrahl für die Punktsysteme seiner Gegenpolaren in Bezug auf die Curve. Damit z. B. $|A_1 c|$ zum Durchmesser der Polarcurve werde, müssen die Tangenten in A_1, c parallel mit der Polaren $|a_{1c} p_{33}|$, folglich $|A_1 c . x_1 . a_{1c} p_{33}|$ der Mittelpunkt des Punktsystemes auf dieser Polaren zu p_{11} sein. Damit zugleich $|A_3 p_{11} a_c^*|$ Polare zu x_1 sei, muss diese Berührsehne gleichfalls parallel zu $|a_{1c} p_{33}|$ und p_{11} die Mitte von $|A_3 a_c^*|$ sein. Wenn $|A_1 c|$ ein Durchmesser der Polarcurve, so sind demnach alle Gegenpolaren $|a_{1c} p_{33}, A_3 a_c^*|$ mit dem Tangentenpar zu A_1, c parallel und die Strecken $|A_3 a_c^*|$ werden von dem Durchmesser $|A_1 c|$ gehälftet. Mithin findet man den Mittelpunkt der durch $A_{1,3} a_c^*, p$ bezeichneten Curve auf dem Mittelstrahle $|p m_2|$, wenn $|A_1 m_2 = m_2 A_3|$ ist.

19. Die Mittelcurve des Büschels $(A_{1,3} \text{tg } \alpha_c^*)^2$. (Feld 3.)

Die Mittelpunkte aller Polarcurven durch $A_{1,3} \alpha_c^*$, deren Pole p_2 zu $|A_{1,3}|$ auf $|\alpha_c^* \alpha_{1c}|$ liegen, befinden sich auf einer neuen Polarcurve durch $\alpha_c^*, \alpha_{1c}^*$ und die Mitten $m_{1,2,3}$ des Dreiseits $|A_{1,3} \alpha_c^*|$.

Jede Tangente zu A_1 bezeichnet auf $\alpha_c^* | \alpha_{1c}, \alpha_{1c}^* |$ zwei Pole $p_{2,3}$ der Sehnen $A_1 | A_3, \alpha_c^* |$ einer Polarcurve des Büschels $(A_{1,3}, \text{tg } \alpha_c^* \alpha_{1c}^*)^2$ und das Strahlenpar $|m_2 p_2, m_3 p_3|$ verbindet der Mittelpunkt m_i dieser Curve. Die Gegenseiten $|A_1 m_3, m_2 m_i; A_1 m_2, m_3 m_i|$ des Vierseits $|A_1 m_i m_{2,3}|$ messen eine Gerade der $[\alpha_c^* \alpha_1]$ involutorisch. Insbesondere ist jeder durch α_c^* gehende Strahl $|s|$ einmal Gegenpolare zu $|A_1 p_2|$, nämlich dann, wenn der Bindepunkt $|A_{1,3} m_i m_3 m_i|$, der eine Punktreihe auf $|A_{1,3}|$ beschreibt, zum Gegenpol von s_1 bezüglich A_1, m_2 wird, indem $|A_{1,3} s_1 s|$ und $|A_1 p_2, \alpha_c^* s_1|$ Gegenpolaren eines Vierseits $|p_{2,3}, \alpha_c^* m_i|$ sind. Jedem Strahl $|A_1 p_2|$ entspricht somit ein bestimmter Gegenpunkt m_i zu α_c^* .

Solche Begründung der Polarcurve stellt den Bewegungsvorgang genauer dar als die Zuhülfenahme der Projectivität der Strahlbüschel $m_{2,3}$, welche zudem Einmischung von Doppelverhältnissen voraussetzt.

Ueberdies bezeichnet man mit den projectiven Strahlbüscheln nur einen Teil der in's Auge zu fassenden Linien, mit dem Vierseit aber ist der ganze Bewegungsapparat angezeigt.

Auf jedem durch α_c^* gehenden Strahle $|s|$ liegt also noch ein Punkt der Polarcurve $(\mu)^2$ der m_i ; auf $|\alpha_c^* \alpha_{1c}^*|$ ist α_{1c}^* dieser Punkt, auf $|\alpha_c^* \alpha_{1c}|$ dagegen α_c^* selbst. Dieser Strahl ist mithin gemeinsame Tan-

gente der Polarcuren $(\pi, \mu)^2$. Auf $\alpha_c^* | A_{1,3} |$ sind $m_{3,1}$ als ergänzende Parpunkte zu betrachten, während m_2, α_{1c}^* ein drittes Punktepar des Sehnendreiecks $|\alpha_c^* A_{1,3} |$ darstellt.

20. Das Strahlbüschel $\alpha_c^* | \alpha_{1c} |$ deutet ein Curvenbüschel $(\alpha_c^* m_{1,2,3})^2$ an, in welchem je 2 Curven einander polar entsprechen.

Die polare Vertauschbarkeit der Strahlenpare $\alpha_c^* | \alpha_{1c}, \alpha_{1c}^* |$ bedingt eine solche der Pole $p_{2,3}$, welche dieselbe Tangente aus A_1 auf jenem Strahlenpar bezeichnet. Jede Tangente durch A_1 deutet daher mittelst der Pole $p_{2,3}$ und der entsprechenden Strahlenpare aus $m_{2,3}$ ein Punktepar m_1, m_1^* an, welche den polaren Mittelcurven $(\mu, \mu_1)^2$ angehören, weil die Tangentenpare $\alpha_c^* | \alpha_{1c}, \alpha_{1c}^* |$ Polarstrahlen bezüglich $\alpha_c^* | A_{1,3} |$ sind.

Alle Curvenpare $(\mu, \mu^*)^2$ des Büschels $(\alpha_c^* m_{1,2,3})^2$ haben $|\alpha_c^* m_2 \cdot \mathfrak{M} \cdot m_{1,3} |$ zum gemeinsamen Mittelpunkt.

Die Tangentenpare an den Gegenecken $\alpha_c^* \cdot m_2, m_{1,3}$ des Sehnensparallelogrammes sind parallel und die Tangenten in $m_{1,3}$ den Tangenten in α_c^* polar zugeordnet, bez. der Parallelen zu $\alpha_c^* | A_{1,3} |$ durch \mathfrak{M} .

Von jedem Par polarer Mittelcurven ist jedesmal die den Zwischenstrahl $|\alpha_c^* \alpha_{1c}^* |$ berührende **Hyperbel**, die andere, $|\alpha_c^* \alpha_{1c} |$ berührende, **Ellipse**.

Zieht man durch \mathfrak{M} Parallele zu dem Tangentenpar von α_c^* , so bilden dieselben mit den Durchmessern $\mathfrak{M} | \alpha_c^*, m_1 |$ das einmal ein hyperbolisches, das anderemal ein elliptisches Strahlsystem conjugirter Durchmesser.

21. Die Mittelcurve als Masscurve für die Curvenbüschel $(\pi = A_{1,3} \text{ tg } \alpha_c^*)^2$.

Elliptische Mittelcurven deuten stets Büschel **hyperbolischer** Polarcuren $(\pi)^2$, **hyperbolische** Mittelcurven dagegen durch einen Ast **hyperbolische**, durch den andern dagegen **elliptische** Polarcuren $(\pi)^2$ an; den **Zielstrahlen** (Asymptoten) der Mittelhyperbel entspricht das **Parabelpar** im Büschel $(\pi)^2$.

Ein Mittelstrahl durch m_2 bezeichnet auf $a_c^* | a_{1c}, a_{1c}^* |$ die Pole p, p^* der Sehne $| A_{13} |$ bezüglich (π, π^*) und stellt daher für beide Curven den zur Richtung $| A_{13} |$ conjugirten Durchmesser dar; folglich bezeichnet jener Mittelstrahl zugleich auf (μ, μ^*) die Mittelpunkte μ_i, μ_i^* der beiden p, p^* entsprechenden Polarcuren (π, π^*) . Die Strahlen $A_1 | p, \mu_i; p^*, \mu_i^* |$ sind jedesmal Tangente und Durchmesser der betreffenden Polarcurve zu A_1 , stellen mithin je ein Par conjugirter Durchmesser von (π, π^*) dar. $| A_{13} |$ selbst bezeichnet die Richtung des zu $m_2 | \mu_i, \mu_i^* |$ conjugirten Durchmessers, zieht man durch A_1 Parallele zu $m_2 | \mu_i, \mu_i^* |$, so kann man an dem Strahlbüschel A_1 die gegenseitige Lage der Durchmesserpare erkennen und darnach die Art ihrer polaren Zuordnung beurteilen.

Die Ellipse $(\mu)^2$ wird von ihren parallelen Tangenten in a_c^*, m_2 eingeschlossen, von denen die erstere zugleich die Bahn von p bildet. Die Parallele zu $| m_2 p |$ durch A_1 schliesst in diesem Fall mit $| A_{13} |$ das Strahlenpar $A_1 | p, \mu_i |$ stets entweder ein oder aus; das Strahlensystem der conjugirten Durchmesser von Curven $(\pi)^2$, deren Mittelpunkte auf $(\mu)^2$ liegen, ist mithin stets hyperbolisch.

Da a_c^*, m_2 in der Hyperbel $(\mu^*)^2$ einen Durchmesser begrenzen, so gehören dieselben verschiedenen Aesten dieser Curve an. Bei allen Punkten des Astes

$(\alpha_c^*)^2$ ist das System der conjugirten Durchmesser in μ^* . hyperbolisch; bei denen des Astes $(m_2)^2$ dagegen wird dieses System elliptisch. Die Zielstrahlen der Hyperbel (μ^*) deuten die beiden Grenzfälle parabolischer Strahlensysteme an.

Wir gelangen endlich zum vollen Ueberblick über den räumlichen Umfang der Bedeutung unseres Masszeichens, wenn wir, den bisher beweglich gedachten α_{1c} . festhaltend, umgekehrt α_c . auf $|a_2|$ verschieben. Dann durchläuft der Mittelpunkt \mathfrak{M} . des Curvenbüschels $(\alpha_c^* m_{1,2,3})^2$ die Bindekante $[a_2 m_2 | \mathfrak{M} | m_{1,3} a_{2z}]$, wo α_{2z} . den Zielpunkt von $|a_2|$ bedeutet und zugleich anzeigt, dass $|\mathfrak{M} || a_2 |$.

Das Zielstrahlenpar $\mathfrak{M} [z, z^*]$ der Mittelhyperbel $(\mu^*)^2$, welche α_{1z} . entspricht, wird bestimmt nach den Paaren conjugirter Strahlen $\alpha_c^* | m_2 \alpha_{1c}^*, \alpha_{1z} \alpha_{1c} |$ und bezeichnet nach Parallelverschiebung von α_c^* . in \mathfrak{M} . die festen z, z^* . auf $|a_1|$, weil auch die Punktepaare des Masssystemes $| m_2 \alpha_{1c}^*, \alpha_{1z} \alpha_{1c} |$ als unveränderlich angenommen werden. $|\mathfrak{M} [z, z^*]|$ sind somit die beiden Zielebenen, in welchen sich die Zielstrahlen der Mittelhyperbeln um z, z^* . drehen, während α_c . die Massaxe $|a_2|$ durchläuft.

II. Das Büschel der Terzcurven in seinem Masskegel.

(Feld 5, 6.)

22. Das Regal $|| a_{1,2} ||^2$ der windschiefen Gegenpolaren $| \alpha_{1,2}^* |$ zu $| a_1 \cdot a_1 [\delta] a_2 \cdot a_2 |$, in welchem die Sehnen $| \xi \zeta^* |$ Leitaxen sind.

Ist die Drehaxe $|d|$ der Zeigebene $|\delta|$ mit keiner Massaxe verbunden, so liegen die Bindepunkte $| b_{1,3} \cdot \xi \cdot b_{2,4} |$ auf einer Regelfläche $|| a_{1,2} ||^2$,

deren Strahlen $|a_{1,2}^*|$ den durch $|a_1, a_1[\delta] a_2, a_2|$ bezeichneten bezüglich $A_{1,3}, A_{2,4}$ polar entsprechen.

Da sich nämlich beide Bindepunkte der Zeigebene mit $|a_{1,2}|$ auf diesen Massaxen verschieben, so messen die windschiefen Gegenpolaren $|a_{1,2}^*|$ durch $|b_{1,3} \cdot \xi \cdot b_{2,4}|$ zu $|a_{1,2}|$ auf $|a_{1,2}|$ die Punktreihen $|a_{1,2}^*|$, welche zu denjenigen von $|a_{1,2}|$ bezüglich $A_{1,3}, A_{2,4}$ polar sind.

Den $A_{1,3}, A_{2,4}$ entsprechen in dem Regal $\|a_{1,2}, a_{1,2}^*\|^2$ die Polarstrahlen $|A_1 a_{21}^*, A_3 a_{23}^*; A_2 a_{12}^*, A_4 a_{14}^*|$ zu $|A_1 b_3, A_3 b_1; A_2 b_4, A_4 b_2|$ bezüglich $|b_{2,3}, b_{4,1}; b_{3,4}, b_{1,2}|$.

23. Zu jedem $\cdot \xi$ findet sich ein polarer Gegenpunkt $\cdot \xi^*$, dessen Zeigerstrahlen $|b_{1,3}, b_{2,4}^*|$ mit den Zeigern $|b_{2,4}, b_{1,3}|$ von $\cdot \xi$ auf $|\delta|$ in $\cdot b_{2,4}, b_{1,3}$ verbunden sind.

Ist $|b_{2,4}|$ mit $|\delta|$ in $\cdot b_{2,4}$ verbunden, so zeigt $[b_{2,4} b_3]$ durch ihre Spur $|A_1 b_1^*|$ auf $|b_1|$ den Richtpunkt der (nach Satz 10) $[\delta]$ polar zugeordneten $[\delta^*]$, welche auf $|b_{2,4}|$ einen Regelstrahl $[b_{2,4}^*]$ bestimmt, der mit $|b_{1,3}|$ in $\cdot b_{1,3}$ verbunden ist. $|b_{1,3}^* \cdot \xi^* \cdot b_{2,4}^*|$ ist der Gegenpol zu $\cdot \xi$.

24. Jede Sehne $|\xi \xi^*|$ verbindet die Regelstrahlen $|A_1 a_{21}, A_3 a_{23}; A_2 a_{12}, A_4 a_{14}|$ und ist somit eine Leitaxe des Regales $\|a_{1,2}, a_{1,2}^*\|^2$.

In $[a_2]$ z. B. bildet das Spurenpar $|b_2 b_1^* \cdot s_2 \cdot b_1 b_2^*|$ der $\cdot \xi [b_{1,3}^* | \xi \xi^* | b_{2,4}^*]$ mit $|b_{1,2}|$ ein Vierseit, in welchem $|b_{1,2} \cdot b_2 \cdot b_{1,2}^*|$ der Pol zu $|A_4 s_2|$ ist, folglich ist dieser Strahl polar zu $|A_4 b_2|$ bezüglich $|b_{1,2}|$ und fällt deshalb mit $|A_4 a_{14}^*|$ zusammen. Daher ist $|\xi \xi^*|$ in $\cdot s_2$ mit diesem Strahle des Regales $\|a_{1,2}, a_{1,2}^*\|^2$ verbunden.

Auf den Leitaxen $|a_{1,2}|$ sind $A_{1,3}, A_{2,4}$ die Punktepare $\cdot \xi \xi^*$, indem die Ebenenpare $|d [A_{1,3}, A_{2,4}]$ mit

$[\alpha_{2,4}, \alpha_{1,3}]$ die Strahlenpare $\cdot b_2 | A_{1,3} | b_4 \cdot, \cdot b_1 | A_{2,4} | b_4 \cdot$ verbinden, während zugleich die Bindepunkte von $|a_{1,2}|$ mit $[\alpha_{1,3}, \alpha_{2,4}]$ in $\cdot A_{1,3}, A_{2,4} \cdot$ die $|A_1 a_{21}^*, A_3 a_{23}^*; A_2 a_{12}^*, A_4 a_{14}^*|$ treffen.

25. Die Ebenenpare $|\xi \xi^* [b_{2,4}, b_{1,3}]$ messen $|d|$ involutorisch.

Die Gegenpolaren $|b_{2,4}, b_{1,3}|$ der Vierseite in den Zeigebenen $[\delta]$ bezeichnen auf $|d|$ ein Punktepar $b_{2,4} \cdot b_{1,3} \cdot$ des Systemes $|b_{1,3}, b_{2,4}|$, welches die Involution bestimmende Punktepar bei Drehung der Zeigebene um $|d|$ unverändert bleibt.

Jede der beiden zu $|d|$ parallelen Zeigebenen bezeichnet durch den Regelstrahl, der dem Zielstrahl zu $|d|$ polar zugeordnet ist, auf dieser Zeigeraxe die Mitte $\cdot b_m \cdot$ des Punktsystems $|b_{1,3}, b_{2,4}|$.

Kreuzen sich die Reihenpare dieses Punktsystemes in den Doppelpunkten $\cdot D_{1,2} \cdot$, so hat $|d|$ dieselben sowohl mit dem Regal $\|a_{1,2}, a_{1,2}^*\|^2$ als mit der Bindecurve (ξ) gemein.

26. Die Bindecurve (ξ) ist eine Curve III. O., eine Terzcurve $(\xi)^3$, denn jede durch $|\xi \xi^* = s|$ gelegte Ebene enthält ausser dieser Leitaxe noch einen Regelstrahl $|a_{1,2}^*|$ des Regales $\|a_{1,2}\|^2$, dessen windschiefe Gegenpolare $|a_{1,2}|$ bezüglich $\cdot A_{1,3}, A_{2,4} \cdot$ die Zeigebene des auf $|a_{1,2}^*|$ liegenden $\cdot \xi \cdot$ anzeigt.

Somit liegen in jeder Ebene durch $|s|$ 3 Punkte der Bindecurve $|d| b_{1,3} (\xi) b_{2,4} \|^2$ und ist dieselbe deshalb eine Terzcurve.

Daraus ergibt sich zugleich, dass $(\xi)^3$ eine Reliefcurve sein muss, die aber im Grundriss als ebene Curve III. O. erscheint, indem der 3. Punkt der Lotebene durch $|s|$ auf dem Grundriss dieser Sehne erscheint.

27. Die Gestalt der Terzcurve $(\xi)^2$ ist im Allgemeinen durch die 6 Punkte $.A_{1,3}, A_{2,4}, D_{1,2}$ bezeichnet. Von diesen können die 2 auf $|d|$ durch die Punktepare $.b_{1,3}, b_{2,4}$ vertreten sein.

Durch die Richtung von $|d|$ ist die Drehungsweise der Zeigebene bestimmt und damit zugleich die Verschiebung der Zeigestrahlen an $|b_{1,3}, b_{2,4}|$, folglich auch die Bewegung von ξ . Die Richtung von $|d|$ in $[\delta]$ ist bestimmt durch $.b_{2,4}$ und bedingt die Lage von $|b_{2,4} \cdot b_{2,4} |d| b_{1,3} \cdot b_{1,3}|$. Greifen die Zwischenstrecken $|b_{2,4}, b_{2,4} b_{1,3}|$ übereinander, so besitzt das Punktsystem, das durch diese Punktepare bezeichnet ist, keine Doppelpunkte $.D_{1,2} \dots$. Liegen jene Zwischenstrecken nebeneinander, so kommen 2 Doppelpunkte auf $|d|$ vor, welche den Zeigregalen $|d| b_{1,3}, b_{2,4}||^2$ gemein sind, der Terzcurve $(\xi)^3$ angehören, daher als Bestimmungspunkte von $|d|$ und zugleich als solche Terzcurve aufgefasst werden können.

Dieses Beispiel zeigt, dass das Imaginäre in der Geometrie seinen Grund in der Einseitigkeit des Ausganges vom Grössenbegriffe, der Vernachlässigung des Richtungsbegriffes hat; denn sobald man diesen letztern mit in Betracht zieht, bleiben die Elemente reell. Bei dem laufenden Punktsystem werden nämlich die Doppelpunkte durch 2 Punktepare $.b_{2,4}, b_{1,3}$ vertreten, deren Zwischenstrecken übereinander greifen. Die Richtung von $|d|$ ist aber stets durch $.b_{2,4}$ gegeben.

Die Tangente der Terzcurve als Bindekante der 3 Berührebenen an die Regale $|d| b_{1,3}, b_{2,4}||^2, ||a_{1,2} a_{1,2}^*||^2$.

28. Die Bindekante $|A_2 t_2|$ der Berührebenen $[b_3 b_1, b_4 b_3]$ zu $.A_2$ an die Regale $|d| b_{1,3}, b_{2,4}||^2$

liegt in der Berührebene $[a_2 a_{14}^*]$ zu $.A_2$. an $\|a_{1,2}, a_{12}^*\|^2$.

$.A_2 |d_{1,3}|$ ist in $[\alpha_{1,3}]$ der Regelstrahl, welcher $|d|$ mit $|b_{3,1}, b_{4,2}|$ verbindet und bestimmt deshalb mit $|b_{3,4}|$ die Berührebene zu $.A_2$. an $|d| b_{1,3}, b_{2,4}\|^2$. $A_2 |d_{1,3}|$ bezeichnen auf $|b_{1,3}|$ die $.b_{2(1,2)}$. der Spur $[A_2 d |d_{2,1} |a_2]$, deren Grenzpolare $|A_1 a_{14}^*|$ die Spur der Berührebene zu $.A_2$. an $\|a_{1,2}, a_{12}^*\|^2$ ist, indem $|A_1 b_{2,1} . t_2 . A_3 b_{2,2}|$. $|A_2 t_2|$ verbindet also die 3 Berührebene zu $.A_2$. an die Regale $|d| b_{1,3}, b_{2,4}\|^2$, $\|a_{1,2}, a_{12}^*\|^2$. Diese Gerade ist die Tangente zu $.A_2$. an die Terzcurve $(\xi)^3$.

29. Desgleichen verbindet die Tangente zu $. \xi$. die 3 Berührebene dieses Punktes an jene Regale.

Das Ebenenpar $|s [d_{2,4}, d_{1,3}]$ deutet eine windschiefe Gegenpolare $|\bar{s}|$ zu $|s|$ bezüglich $|A_{1,3}, A_{2,4}|$ an, mit den $.\bar{\xi} . \xi^*$, welche mit $|s|$ ein dem Massvierfach $[\alpha]_4$ bezüglich $|d|$ conjugirtes Vierfach $[\sigma]_4$ bestimmt. In diesem hat $. \xi$. dieselbe Bedeutung wie $.A_2$. in $[\alpha]_4$, folglich lässt sich an $[\sigma]_4$ wie an $[\alpha]_4$ zeigen, dass die Tangente zu $. \xi$. die 3 Berührebene dieses Punktes an die genannten 3 Regale verbinde.

Dasselbe bestätigt übrigens der Spurenverband in einer der Massebenen z. B. $[\alpha_2]$. Der Strahl $|d_4 \xi|$ bezeichnet auf $|b_{1,2}|$ den Richtpunkt $.d'_4$. der Spuren $.d'_4 |A_{1,3}|$ von $. \xi [A_1 d_4, A_3 d_4]$ in $[\alpha_2]$. Diese Spuren bezeichnen auf $.d_2 |A_{3,1}|$ die Bindepunkte $.c_{2,1}$. der Leitungen $. \xi |c_{2,1}|$ zu den Regalen $|d| b_{2,4}, b_{1,3}\|^2$ mit $[\alpha_2]$ und bilden mit $.d_2 |A_{3,1}|$ ein Vierseit, in welchem $|c_{1,2}|$ die Gegenpolare von $|d_2 d'_4|$ ist, mithin durch deren Pol $.a_1^*$. bezüglich $.A_{1,3}$. geht. $.a_1^*$. verbindet $|c_{1,2}|$ mit der Spur $|s_2 a_1^*|$ der Berührebene $[a_{12}^* s]$ zu $. \xi$. an

$\|a_{1,2} a_{1,2}^*\|^2$. Andererseits liegen die Leitungen $|\xi|c_{1,2}|$ in $[b_{2,4} b_{1,3}^*, b_{1,3} b_{2,4}^*]$, weil jede von ihnen eines dieser Strahlenpaare verbindet. Deshalb liegen $c_{1,2}$ zugleich auf $s_2|b_2, b_1|$ und bilden diese mit $|c_1 b_1, c_2 b_2|$ ein Vierseit, in welchem $|b_{1,2}, s_2 a_1^*|$ Gegenpolaren sind. Folglich treffen sich $|c_1 b_1, c_2 b_2|$ auf $|s_2 a_1^*|$ und verbindet $|\xi t|$ die Berührebenen $[b_{1,3} c_1, b_{2,4} c_2, s a_{1,2}^*]$ zu $|\xi|$. an die Regale $|d|b_{1,3}, b_{2,4}|^2, \|a_{1,2} a_{1,2}^*\|^2$.

Die Terzcurve verbindet zugleich die 4 Polarkegel, deren Mitten $A_{1,3}, A_{2,4}$ sind.

30. Mit A_2 verbindet die Terzcurve $(\xi)^2$ eine Polarkegelfläche, welche in $[\alpha_2]$ die Polarcurve $(\pi_2)^2$ durch $A_{1,3,4}$ bezeichnet.

Die Planspuren der Zeigebenen $[\delta]$ durch $|d|$ messen in $[\alpha_2]$ die $A_4|A_{1,3}|$ durch 2 Reihen Richtpunkte $|b_{1,2}|$ für die Spuren der $[b_3|A_2 \xi|b_4]$. Der Bindepunkt $|A_1 b_1, \pi_2, A_3 b_2|$ ist daher der Planpunkt $[\alpha_2, \pi_2, A_2 \xi]$ und $|A_4 \pi_2|$ die Gegenpolare zu $|b_2 b_2|$ im Vierseit $|A_{1,3,4} \pi_2|$.

$A_{1,3}$ sind Doppelpunkte des Punktsystems $|A_{1,3} a_1 a_1^*|$, wobei wie früher $|b_2 b_2, a_1|a_1^*, A_4 \pi_2|$. Somit stellen $b_2|A_{1,3}|$ ein Tangentenpar der Polarcurve $(A_{1,3,4} \pi_2)^2 = (\pi_2)^2$ dar, während der Polarstrahl $|A_4 a_{1,2}^*|$ zu $|A_4 b_2|$ bezüglich $A_4|A_{1,3}|$ die Tangente zu A_4 der Polarcurve $(\pi_2)^2$ bildet. Dieser Polarstrahl $|A_4 a_{1,2}^*|$ ist zugleich in $[\alpha_2]$ die Spur der Berührebene $[a_2 t_4]$ zu A_4 . an $\|a_{1,2} a_{1,2}^*\|^2$, welche die Tangente $|A_4 t_4|$ an $(\xi)^3$ enthält. Analog deutet die Zeigespur $|b_2 a_{1,4}|$ den Planpunkt $[\alpha_2, t_2, A_2 t_2]$ auf $|A_4 a_{1,4}^*|$ an. Folglich ist die Tangente $|A_2 t_2|$ an $(\xi)^3$ ein Kegelstrahl von $A_2 (\pi_2)^2$ und liegt somit in der Berührebene an diesen Kegel.

31. Desgleichen liegt die Tangente $|\xi t|$ an $(\xi)^3$ in der Berührebene zu $|A_2 \xi|$ an $.A_2(\pi)^2$.

$.\alpha_1^* |c_{1,2}, t s_2|$ sind Polarstrahlen bezüglich $.\alpha_1^* |b_{1,2}|$. Dreht sich $|\alpha_1^* c_{1,2}|$ um $.\alpha_1^*$, indem sich $.c_{1,2}$ auf $\delta_2 |A_{1,3}|$ verschoben, so durchlaufen $.t, s_2$ zwei durch $.\pi_2, A_4$ gehende gerade Punktreihen, welche auf $|b_{1,2}|$ in dem Gegenpol δ_2^* zu δ_2 bezüglich $b_{1,2}$ verbunden sind. $|\pi \delta^*|_2$ ist aber die Tangente zu $.\pi_2$ an $(\pi_2)^2$, somit die Spur der Berührebene zu $|A_2 \xi|$ an $.A_2(\pi_2)^2$.

Da die $(\xi)^3$ mit jedem $.A_1 \dots A_4$ ein Polarkegel verbindet, kann die Terzcurve aufgefasst werden als Bindecurve der 6 Pare, zu welchen sich die 4 Polarkegel combiniren lassen.

32. (Feld 6.) Der Zielkegel $.A_2(h_2)^2$ zum Zeigekegel $.A_4(\pi_4)^2$ als Ordnungskegel für die Büschel der Terzcurven auf dem Masskegel $.A_2(\pi_2)^2$.

Der Kreis $(A_{1,3,4} = \pi_2)^2$ stellt mit $.A_2$ den Masskegel dar. Die Tangente zu $.A_4$ an $(\pi_2)^2$ bezeichnet auf $|a_1|$ den Richtpunkt $\alpha_{1,2}^*$ für die Spur $|A_2 \alpha_{1,2}^*|$ der Berührebene $[a_2 \alpha_{1,2}^*]$, welche das Büschel der Tangenten zu $.A_4$ an die Terzcurven auf $.A_2(\pi_2)^2$ enthält. Mit $.A_{1,3,2}$ und der Tangente zu $.A_2$ ist ein Polarcurlenbüschel von Leitungen der Zeigekegel $.A_4(\pi_4)^2$ gegeben. Liegt die Tangente zu $.A_2$ ausserhalb $\alpha_{1,2}^* A_2 A_3$, so ist $(\pi_1)^2$ Ellipse; wählen wir also den Zielstrahl zu $|a_1|$ zur Tangente von $.A_2$, damit ist der Zielstrahl durch $.A_4$ zu $|a_1|$ Spur der Berührebene $[a_2 \alpha_{1,4}^*]$ an den Zeigekegel $.A_4(\pi_4)^2$ und bezeichnet auf $(\pi_2)^2$ den Richtpunkt $.t_2$ der Tangente $|A_2 t_2|$ an $(\xi)^3$, welche diesen Zeigekegel mit dem Masskegel verbindet.

Nun bezeichnen die Tangenten zu $.A_1$ an $(\pi_{2,4})^2$ auf den Spuren $.\alpha_{1,4}^* |A_{1,2}|$ die Richtpunkte für die

Bindekanten der Berührebenen zu $.A_1$ an $.A_{2,4}(\pi_{2,4})^2$ mit $[a_2 a_{1,4}^*]$ und der Bindepunkt t_1 dieser Kanten zeigt die Richtung der Tangente $|At|_1$ an die Terzcurve. Analog ergibt sich die Tangente $|At|_3$ an dieselbe.

Wählt man $|A_{2,4}|$ zur Zeigeraxe, so teilen die Zeigebenen $|A_{2,4}[a_{1,4}^*, A_{3,1}, a_{1,2}^*]$ die Leitcurven beider Kegel in 4 Paare zugeordneter Abschnitte, denen 4 die Sehnen $|A_{2,3}, A_{3,1}, A_{1,4}, A_{1,2}|$ überspannende Bogen der Terzcurve entsprechen. Solche Bogen erscheinen als Windungen, wenn die Tangenten der Grenzpunkte nach verschiedenen Seiten der Sehne gerichtet sind. Im vorliegenden Falle geht der Bogen über $|A_{2,4}|$ durch die (unendlichferne) Zeilebene, was schon die Zugrichtungen in diesen Grenzpunkten erkennen lassen.

Die genaue Richtung der Zeigebene, welche den Zielpunkt der Terzcurve enthält, findet man mittelst des Zielkegels durch $.A_2$ zum Zeigekegel $.A_1(\pi_1)^2$. Die Plancurve dieses Zielkegels in $[\alpha_2]$ hat $.A_4|A_{1,3}|$ zu Zielstrahlen, ist daher stets Hyperbel. In $[A_{2,4} a_{1,2}^*]$ bezeichnet der Zielstrahl $|A_2 h_t''|$ zu $|At|_4$ den zweiten Grenzpunkt der Sehne $|A_1 h_t''|$. $[A_{2,4} t_2]$ ist Berührebene an $.A_2(h_z)^2$, weil $|A_{2,4}|$ mit ihrem Zielstrahl übereinstimmt, daher ist $|A_4 t_2|$ Tangente zu $.A_4$ an $(h_z)^2$. Durch $.A_4, A_{4,1z}, A_{4,3z}, h_t''$ und die Tangente zu $.A_4$ ist die Zielhyperbel in $[\alpha_2]$ bestimmt. Je nachdem dieselbe nebst $.A_4$ noch 1 oder 3 Punkte mit $(\pi_2)^2$ gemein hat, besitzt die Terzcurve 1 oder 3 Zielpunkte, erscheint dieselbe als (kubische) Terz-Ellipse oder -Hyperbel. Berührt die Zielhyperbel den Leitkreis des Masskegels oder hat sie 3 zusammenfallende Punkte mit demselben gemein, so ergibt sich eine Terzparabel.

33. Quartcurve. Verbindet man ein Stammregal $\|b_{1,3}, d\|^2$ mit dem Zeigregal $\|b_{2,4}, e\|^2$, wobei $|d, e|$ zwei windschiefe, mit keiner Massaxe verbundene Axen sein mögen, so enthält jede Zeigebene durch $|e|$ eine Polarcurve auf $\|b_{1,3}, d\|^2$ und einen Regelstrahl von $\|b_{2,4}, e\|^2$. Der letztere hat mit der Polarcurve i. A. ein Punktepar gemein. Ist $|e|$ mit $\|b_{1,3}, d\|^2$ durch ein weiteres Punktepar verbunden, so enthält jede Zeigebene 4 Punkte der Reliecurve, welche das Zeigregal mit dem Stammregal verbindet; diese ist daher eine Quartcurve $(\omega)^4$. Derselben gehören auch $.A_1 \dots .A_4$ an, weil jeder von ihnen je eine Leitaxe des Stammregales mit einer solchen des Zeigregales verbindet.

Die beiden Bindestrahlen aus $.A_2$ nach $.\omega_{1,2}$ eines Zeigestrahles bezeichnen auf $[\alpha_2]$ 2 Punkte der Polarcurve $(\pi_2)^2$, der Plancurve des Kegels, der $.A_2$ mit $(\omega)^4$ verbindet. Die Quartcurve kann demnach aufgefasst werden als Bindecurve von Poren der Polarkegel, aus Punkten der Curve.

Haben die Zeigeraxen $|d, e|$ den $.F_1$ gemein, so ist jede von ihnen mit dem Regal durch die andere in einem zweiten Punkt $.D, E$ verbunden. Durch $.D, E$ geht jedesmal noch ein Regelstrahl $|d', e'|$ des eigenen Regales. Die Berührebenen $[dd', ee']$ verbindet eine Kante $|F_{12}|$, deren zweiter Bindepunkt $.F_2$ mit $\|db_{1,3}; eb_{2,4}\|^2$ zugleich auf $|d', e'|$ liegt. Haben also beide Zeigeraxen einen Punkt gemein, so sind beide Zeigregale noch durch 3 weitere Punkte verbunden.

Diese Andeutungen mögen den Zusammenhang der Quartcurve mit dem Bau des Massraumes vor der Hand genügend bezeichnen.

III. *Uebersicht.*

1. **Massvierflach.** Der Bau des Massraumes hat ein Massvierflach zur Grundlage, bestehend aus 3 Paaren windschiefer Massaxen, von denen wir ein Par als bestimmende Hauptrichtungen hervorheben, die beiden anderen Pare als Nebenaxen ansehen, welche die durch die Hauptrichtungen gelegten Massebenen paarweise verbinden.

2. **Vierseit der Zeigebene.** Eine beliebige Zeigebene ist mit den Massebenen durch 2 Spurenpaare verbunden, welche im Allgemeinen ein Vierseit bilden. Die Spurenpaare in je zwei Massebenen durch dieselbe Hauptrichtung gelten als Gegenseiten des Vierseits, die Bindepunkte der Zeigebene mit je einem Par Massaxen als Gegenecken desselben.

3. **Drehung der Zeigebene um eine Spur.** Dreht sich die Zeigebene um eine Spur in der Massebene durch die eine Hauptrichtung, so verbindet deren Gegenaxe die Spurenpaare in den zwei durch diese gelegten Massebenen, während die Nebenaxen der vierten Massebene deren Zeigespuren mit jenen Spurenpaaren verbinden. Die 3 beweglichen Spuren beschreiben dabei in ihren Massebenen Strahlbüschel um die Bindepunkte der Zeigeraxe mit den Massaxen als Scheitel. Die 3 Massaxen, welche die Bewegung dieser Spurstrahlen leiten, haben den Bindepunkt der Gegenaxe mit der vierten Massebene, die Gegenecke des Massvierflaches zur Zeigeraxe, gemein und vermöge des Dreiseits in der Zeigebene werden je 2 dieser Massaxen nach der dritten, leitenden gemessen, wie die 3 in der Gegenecke verbundenen Punktreihen zeigen.

4. **Zielebenen.** Jeder geraden Punktreihe schreiben wir dem Sinn ihrer Verschiebung nach einen unendlichfernen Zielpunkt zu. Dem entsprechend gehen durch die Zeigeraxe 3 Zielebenen, je eine parallel zu einer der 3 leitenden Massaxen. Diese 3 Zielebenen gliedern das Büschel der Zeigebenen in Bezug auf das feste Dreiflach der Massebenen.

So erhalten wir das bekannte Masszeichen des Linearverbandes: Das um eine Gerade seiner Ebene sich drehende Dreiseit, dessen Ecken sich auf den Kanten eines Dreiflaches verschieben.

5. **Parbund.** Die 3 Par Gegenecken des Vierseits in der Zeigebene bezeichnen 3 Regelstrahlen, welche je ein Par windschiefe Gegenaxen des Massvierflaches verbinden. Jeder dieser Regelstrahlen ist mit den beiden andern durch ein Punktepar verbunden, welches sich gleichmässig auf dem Regelstrahle verschiebt, während sich die Zeigebene um denselben dreht. Dieses Punktepar ist daher polar bezüglich der Bindepunkte des als Zeigeraxe dienenden Regelstrahles mit den windschiefen Massaxen. Diese Bindepunkte sind Doppелеlemente des Punktsystemes auf der Zeigeraxe.

Dieses kreuzende Punktsystem kann zu einem laufenden werden, das keine Doppelpunkte besitzt, wenn die Zeigeraxe mit keiner der Massaxen verbunden ist.

6. **Dreibund.** Bei solch allgemeiner Lage der Zeigeraxe befindet sich jeder Bindepunkt zweier Regelstrahlen einer Zeigebene in der Polarebene zum dritten Regelstrahl durch dessen Bindepunkt mit der Zeigeraxe. Ein Dreiflach von Nullebenen verbindet jenen Bindepunkt der Regelstrahlen mit den von der Zeigeraxe und den 3 Massaxenpaaren gebildeten Dreibünden.

7. **Masscurven.** Ist die Zeigeraxe mit einer Massaxe durch einen Scheitel verbunden, so durchläuft einer der 3 Regelstrahlen jeder Zeigebene ein Strahlbüschel in der Ebene, welche den Scheitel mit der Gegenaxe verbindet. Die Bindepunkte der beiden übrigen Regelstrahlen der Zeigebene dagegen bewegen sich in der Polarebene zur ersteren durch jene Gegenaxe und den Gegenpol des Scheitels bezüglich der auf der Massaxe liegenden beiden Ecken des Massvierflaches.

8. Die **Polarcurve**, welche der Bindepunkt jener Regelstrahlenpare durchläuft, verbindet demnach diese beiden Regale mit einer Ebene. In dieser Polarebene zum Scheitel bewegen sich zugleich die Bindekanten der Berührebenenpare an beide durch die Curve verbundenen Zeigregale und sind daher Tangenten der Polarcurve.

Aus dem **collinearen Verband** von Drei-, Vier- und Sechseiten der Bindepunkte mit Drei-, Vier- und Sechseiten der Bindekanten geht die Polarcurve hervor.

9. **Büschel Polarcurven.** Dem Büschel von Zeigeraxen in derselben Zeigebene um den Scheitel auf der Massaxe entspricht ein Büschel Polarcurven in der Polarebene dieses Scheitels, welches dessen Gegenpol nebst den Eckpunkten der Gegenaxen zu Scheiteln und den Polarstrahl zur Bindekante von Zeig- und Polarebene zur gemeinsamen Tangente hat.

10. **Mittelcurve.** Während diese Polarcurven um ihre Scheitel schwingen, durchlaufen deren Mittelpunkte eine Polarcurve durch die Mitten des Dreiseits der Curvenscheitel, die Mittelcurve, welche als Masscurve für die Curvenbüschel durch jene Scheitelpunkte dient, während ein Zeigestrahl sich um die Mitte der Massaxe in der Curvebene dreht.

11. **Terzcurve.** Ist die Zeigeraxe mit keiner der Massaxen verbunden, so durchlaufen die Bindepunkte jedes Pares von Regelstrahlen der Zeigebene ein zu den dritten Regelstrahlen polares Regal bezüglich der 4 Ecken des Massvierflaches.

Mit jedem Par Regelstrahlen einer Zeigebene ist ein zweites Par Regelstrahlen einer polaren Zeigebene, aber denselben Zeigregalen angehörend, durch dasselbe Punktenpar der Zeigeraxe verbunden. Die Sehne zwischen den betreffenden Bindepunkten der Regelpare ist eine Leitaxe des polaren Regales. In jeder Ebene des Büschels durch diese Sehne liegt ein dritter Punkt der Bindecurve der Zeigregale, diese ist daher eine Terzcurve.

12. **Tangenten der Terzcurve.** Durch die Bindekante der Berührebenen an beide Zeigregale zu demselben Punkte der Terzcurve geht auch die Berührebene zu demselben an das polare Regal. Diese Kante, die Tangente der Terzcurve, verbindet also, wie bei der Polarcurve, 3 Ebenen.

13. **Terzcurve als Bindecurve von Polarkegelparen.** Jeden Punkt der Terzcurve verbindet ein Polarkegel mit allen übrigen Punkten derselben und die Tangente der Terzcurve zu dessen Mitte ist ein Strahl desselben. Da die Ecken des Massvierflaches der Terzcurve angehören, kann diese aufgefasst werden als Bindecurve von Paren der Polarkegel, welche je eine Ecke des Massvierflaches zur Mitte und eine Polarcurve durch die 3 übrigen zur Leitung haben.

14. **Gliederung des Büschels von Terzcurven auf einem Masskegel mittelst eines Büschels von Zielkegeln.** Wählt man einen dieser Polarkegel als Masskegel, wäh-

rend einer der 3 übrigen als Zeigekegel dient, so gehen die Leitcurven des letztern durch die 3 Gegenecken zur Mitte desselben. Den Büscheln dieser Leitungen entsprechen Büschel der Terzcurven auf dem Masskegel. Dieselben werden gegliedert mittelst Zielkegeln zum Zeigekegel durch die Mitte des Masskegels. Je nachdem nämlich die Leithyperbeln der Zielkegel mit der Leitcurve des Masskegels nebst der Mitte des Zeigekegels noch 1, 3 einzelne oder 2, 3 zusammenfallende Punkte gemein haben, ist die Terzcurve elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch.

15. Ein **Par Zeigeraxen**, das mit keiner der Massaxen verbunden ist, bedingt eine Quartcurve.

Schluss.

Ohne Einmischung von Zahloperationen baut sich in der angedeuteten Weise der Massraum durch Verbindung von Bewegungsrichtungen aus, deren Bahnen, die Linien und Flächen, einander gegenseitig begrenzen und also messen. Die Grössenverhältnisse sind demnach mit dem Verband der Richtungen gegeben und dieser wird allgemeiner durch Gegenpolaren des Vierseits und Vierflaches bestimmt als durch Strahlbüschel und Strahlbündel. Ueberdiess ist Verbindung der Vorstellungen der allgemeine Grundzug der logischen Synthese, während «Projection» nur eine Strahlenverbindung andeutet. Zwar lassen sich alle Raumverbindungen aus Strahlenverbindungen zusammensetzen. Allein zur Bildung von Begriffen genügt das Zusammensetzen der Elemente nicht. Wer eine Curve von freier Hand richtig zieht, hat den gesetzmässigen Bau dieser Curve vollstän-

diger begriffen als derjenige, der dieselbe nur mittelst Strahlenverbindungen herzustellen weiss. Beim Ziehen einer Curve haben sich nämlich die Vorstellungen der aufeinander folgenden Richtungen zur stetigen Bewegungsvorstellung **verschmolzen**, was noch nicht der Fall ist, solange man die zu ziehenden Linien aufzählt, sich dieselben einzeln nach einander in's Gedächtniss ruft. Solche Verschmelzung der Bewegungsvorstellungen, sowie die Vergegenwärtigung der Bewegungsvorgänge werden gefördert, wenn man durchweg den Ausdruck «verbinden» anwendet, statt das eine mal Linien zu ziehen, dann wieder Punkte zu projiciren oder Ebenen zu legen, Flächen zu schneiden; denn durch regelmässige Wiederkehr desselben Ausdruckes wird die Aufmerksamkeit auf die wechselnden Linien und Flächen gelenkt, bei diesen festgehalten.

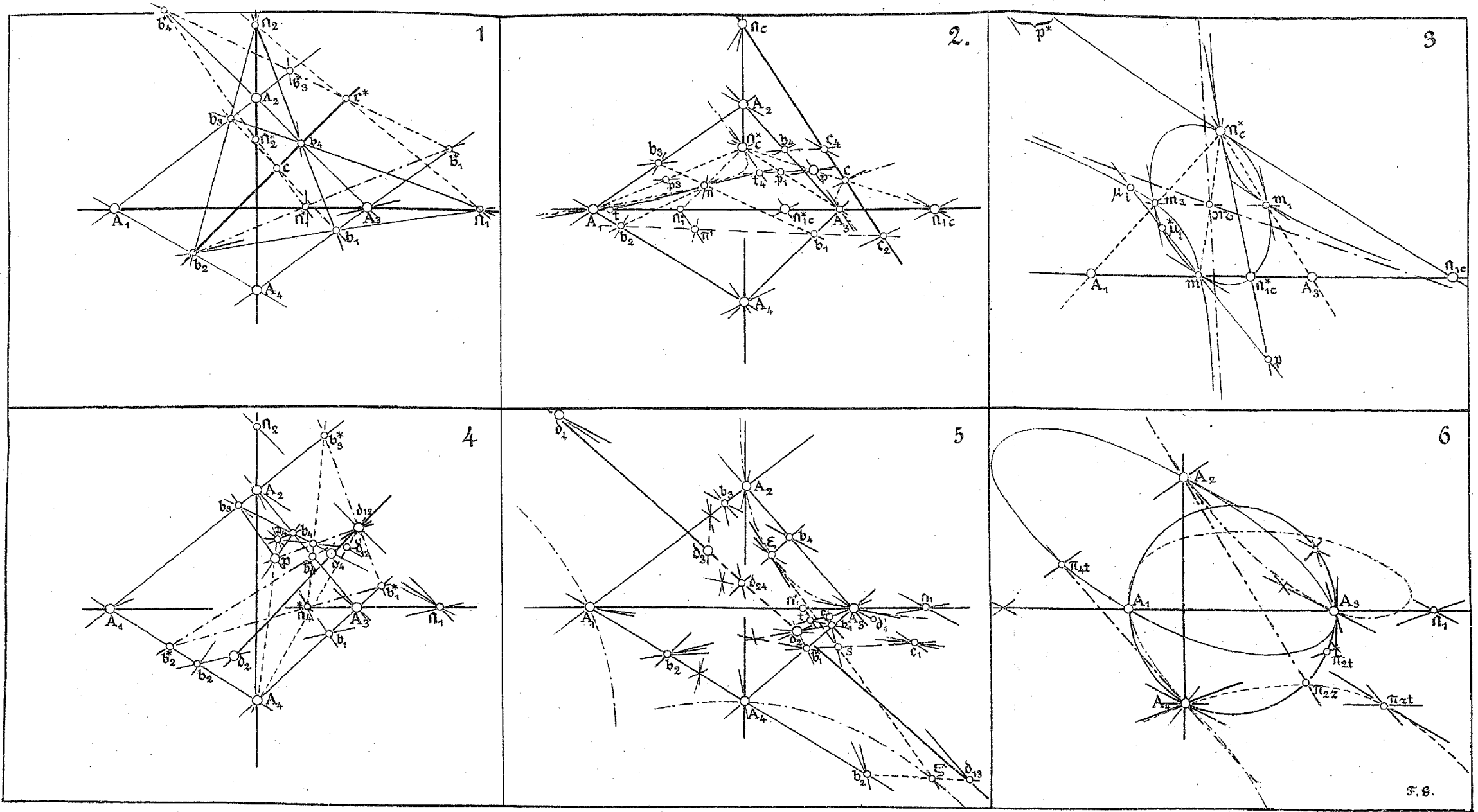
Die Ausbildung jedes Organes erfordert ausdauernde Einübung zielbewusster Bewegungen, wobei die Aufmerksamkeit ungeteilt der Reihenfolge der einzelnen Verrichtungen zugewendet bleibt bis dieselben sicher und fliessend im Zusammenhang vollzogen werden. Nicht anders verhält es sich mit Raumbegriffen. Auch diese bedürfen zu ihrer Ausbildung bei ungeteilter Aufmerksamkeit der zusammenhängenden Einübung zielbewusster Bewegungsvorstellungen. Wenn diese Vorstellungen nach und nach geläufig werden, so verdichten sich dieselben zu stetigen, richtig bemessenen Gestaltbegriffen, die dem Geiste zur Verfügung stehen wie die geregelten Bewegungen der Glieder. Man erkennt alsdann aus wenigen Zügen den Bau der ganzen Gestalt.

Solch' erworbene Raumbegriffe weiter zu ordnen, dazu dienen Buchstaben, Ziffern, Benennungen und Zahlen.

Auch diese erfüllen ihren Zweck umso besser, je kürzer, je bezeichnender sie gewählt sind, je genauer sie die Aufmerksamkeit an den Bewegungsvorgängen festhalten. Wie man nämlich beim Aufnehmen oder Entwerfen eines Gegenstandes dessen Umrisse nach dem Augenmass feststellt, bevor man Masszahlen erhebt oder ermittelt; wie die Physik das Tatsächliche der Vorgänge an Versuchen veranschaulicht, bevor sie Messungen anstellt, wie in der Chemie die qualitative Analyse der quantitativen vorausgeht, so muss auch die Raumlehre die Elementarverbindungen einer beschränkten Zahl von Richtungen zusammenhängend in der Vorstellung sichern, ehe mit Vervielfältigung gleichartiger Verbände Zählung und Berechnung als Hilfsmittel zur Ordnung manigfaltiger Grössen eintreten.

Wenn wir nun den Massraum durch geregelte Bewegungen und Verbindungen derselben in der Vorstellung ausbauen, erwächst er zu einem Organismus gegliederter Gestalten, die der Vorstellung mit ihren Wandlungen und Verbindungen zu Gebote stehen, nicht mühsam aus ihren Stücken zusammengelesen werden müssen; er ist gleichsam ein Netz von Flächen, in das man verwandte Gestalten unmittelbar einfügt, wie man in die Karte Ortschaften und Wege, Flüsse und Gebirge einträgt. Der Massraum und dessen Grössenverhältnisse erscheinen dann nicht als von aussen geboten wie Gegenstände der Anschauung, sondern dieselben gehen aus unserer Tätigkeit hervor. Die Begriffe des Raumes und der Verbindungen im Raume bleiben daher nicht im Dunkeln, denn sie sind zu Tatsachen geworden.

Je stetiger wir die geregelten Bewegungen in der Vorstellung vollziehen, desto klarer wird uns der räum-



liche Zusammenhang der wechselnden Richtungen bewusst, desto unmittelbarer findet die messende Raumerkenntniss ihren Ausdruck im geregelten Verbinden von Richtungen und Flächen, in räumlichen gestalten und erfüllt damit ihre eigentliche Bestimmung. Denn weder Systeme von Lehrsätzen noch Rechenmethoden, sondern sicheres Augenmass und richtiges Gestalten sind Endzweck der Raumlehre.

Hottingen-Zürich, Februar 1892.

Notizen.

Ein eigenthümlicher Vorfall. — Als mir im Herbst 1839 an der Realschule in Bern der Unterricht in der Algebra zugetheilt wurde, arbeitete ich für denselben ein Heft aus, in welchem die arithmetischen Operationen, in wesentlicher Abweichung von dem sonst üblichen Verfahren, bereits in derselben, wie ich damals glaubte, mir ganz eigenthümlichen Weise entwickelt waren wie in meinen spätern Publikationen, und war nun nicht wenig erstaunt, von Prof. Bernhard Studer, der von meinem Hefte Kenntniss nahm, zu hören, dass mein Gedankengang fast ganz mit demjenigen übereinstimme, welchen Prof. Thibaut in Göttingen schon zu Anfang dieses Jahrhunderts sowohl in seinen Vorträgen als in seinem „Grundriss der reinen Mathematik“ einschlug. Und in der That als ich mir letzteres Werk, das ich noch nie gesehen hatte, verschaffte, fand ich die Bemerkung von Studer ganz richtig, so räthselhaft mir auch ein solches Zusammentreffen erschien. — Nachdem ich ziemlich lange vergeblich nach einem Schlüssel gesucht hatte, fiel mir endlich ein, dass mir in ganz jungen Jahren (nämlich etwa 1831) mein erster Mathematiklehrer, Prof. Leonhard Keller (1778—1858; vgl. Biogr. II 385), der 1805—1807 in Göttingen studirt und eine Vorlesung bei Thibaut sehr fleissig concipirt hatte,