Mathematische Mittheilungen

von

A. Meyer.

IV. Ueber indefinite quadratische Formen.

1. Der Satz, dass zwei indefinite ternäre quadratische Formen, die demselben Geschlechte angehören, äquivalent sind, wenn ihre Invarianten ungerade und relativ prim sind,[1]) lässt sich, wie im Folgenden gezeigt werden soll, auf Formen mit beliebig vielen Variabeln ausdehnen. Indem ich für die allgemeine Theorie der quadratischen Formen, namentlich bezüglich ihrer Eintheilung in Ordnungen und Geschlechter, auf die Abhandlungen von Hrn. Minkowski[2]) und H. J. St. Smith[3]) verweise, beschränke ich mich hier darauf, die Bezeichnungen zusammenzustellen, von denen ich in der Folge Gebrauch machen werde.

Ist

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k \quad , \quad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots . n)$$

eine quadratische Form von n Variabeln mit ganzzahligen Coefficienten, $\Delta = |a_{ik}|$ ihre (nicht verschwindende) Determinante, so bezeichne ich (im Anschlusse an Herrn Minkowski)

mit J den Trägheitsindex von f, d. h. die Anzahl der Quadrate, welche bei reeller Transformation von f in ein

[1]) Vergl. meine Inauguraldissertation oder meine Abhandlung im Journal für Mathematik, Bd. 108.

[2]) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, tome 29.

[3]) Ibid. und Proceedings of the Royal Society, vol. 13 u. 16.

Aggregat von n Quadraten linearer Formen mit negativem Vorzeichen erscheinen;
mit d_{h-1} den grössten gemeinschaftlichen positiven Theiler aller Unterdeterminanten h^{ten} Grades von $|a_{ik}|$, so dass also $\Delta = (-1)^J d_{n-1}$;

mit o_h die (ganze) Zahl $\frac{d_h}{d_{h-1}} : \frac{d_{h-1}}{d_{h-2}} = \frac{d_{h-2}\, d_h}{d_{h-1}^2}$;

mit σ_h d_{h-1} den grössten gemeinschaftlichen positiven Theiler aller einfachen symmetrischen und zweifachen unsymmetrischen Unterdeterminanten h^{ten} Grades von $|a_{ik}|$, so dass also $\sigma_h = 1$ oder 2 ist.

Die Zahlen

$$d_0 \,,\, \begin{pmatrix} \sigma_1 \,,\, \sigma_2 \,,\, \ldots\ldots \sigma_{n-1} \\ o_1 \,,\, o_2 \,,\, \ldots\ldots o_{n-1} \end{pmatrix} \,,\, J$$

heissen die (Ordnungs-) Invarianten der Form f und die Form heisst primitiv, wenn $d_0 = 1$ ist, und zwar eigentlich oder uneigentlich primitiv (ungerade oder gerade nach Smith), je nachdem $\sigma_1 = 1$ oder $= 2$ ist.

Ist, wie im Folgenden immer vorausgesetzt werden soll, f primitiv und wird

$$\frac{1}{d_{n-2}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = (-1)^J a'_{n-i+1,\, n-k+1}$$

gesetzt, so ist die Form

$$f' = \Sigma a'_{i,k} x'_i x'_k \,,\quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ebenfalls primitiv und heisst die Adjungirte von f. Ihre Invarianten sind

$$d'_0 = 1 \,,\, \sigma'_h = \sigma_{n-h} \,,\, o'_h = o_{n-h} \,, J' = J \;(h = 1, 2 \ldots n-1).$$

2. Der Beweis (Art. 4) stützt sich auf folgenden Hilfssatz:

Zwei primitive quadratische Formen f und g von n Variabeln mit denselben Invarianten

$$\begin{pmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_{n-1} \\ o_1, o_2, \ldots\ldots, o_{n-1} \end{pmatrix}, J$$

sind (eigentlich oder uneigentlich) äquivalent, wenn beide eine und dieselbe primitive Form φ von $n-1$ Variabeln mit den Invarianten

$$\begin{pmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_{n-2} \\ o_1, o_2 \ldots\ldots, o_{n-2}\ \sigma_{n-1}\ m \end{pmatrix}, J'$$

eigentlich darstellen, wo der Factor m eine in $2\, o_1\, o_2 \ldots o_{n-1}$ nicht aufgehende Primzahl ist.

Beweis: Es sei

$$\varphi = \Sigma\, b_{ik}\, \xi_i\, \xi_k \qquad (b_{ik} = b_{ki}\ ;\ i, k = 1, 2, \ldots n-1)\,.$$

Da φ durch f eigentlich darstellbar ist, so sind die Grössen

$$c_{n-i,\,n-k} = \frac{(-1)^J}{d_{n-3}} \cdot \frac{\partial\, |\, b_{ik}\, |}{\partial\, b_{ik}}$$

ganze Zahlen und die Congruenzen

$$-\, o_{n-1}\, c_{ik} \equiv b'_i\, b'_k \pmod{\sigma_{n-1}\, m}\ ,\ (i, k = 1, 2, 3, \ldots n-1)$$

lösbar,[1]) und zwar gibt es, weil m eine ungerade Primzahl ist, nur zwei (mod. $\sigma_{n-1}\, m$) incongruente Lösungen

$$(b'_1, b'_2, \ldots\ldots b'_{n-1}) \quad \text{und} \quad (-b'_1, -b'_2, \ldots\ldots, -b'_{n-1})\,.$$

Wird nun

$$(-1)^{J-J'}\, \sigma_{n-1}\, m = \frac{(-1)^J}{d_{n-2}}\, |\, b_{ik}\, | = b'\,,\ \frac{o_{n-1}\, c_{ik} + b'_i\, b'_k}{b'} = b'_{ik}$$

gesetzt, so muss die Adjungirte f' von f mit

$$B' = b'\, \xi'^2 + 2 \sum_{i}^{1,\,n-1} b'_i\, \xi'\, \xi'_i + \sum_{i,k}^{1,\,n-1} b'_{ik}\, \xi'_i\, \xi'_k$$

---

[1]) Minkowski, a. a. O. Art. XVII.

oder mit

$$B'_1 = b' \xi'^2 - 2 \sum_{i}^{1,n-1} b'_i \xi' \xi'_i + \sum_{i,k}^{1,n-1} b'_{ik} \xi'_i \xi'_k$$

eigentlich, also mit B' eigentlich oder uneigentlich äquivalent sein, daher f mit der Adjungirten B von B'. Dasselbe gilt von g. Somit sind auch f und g eigentlich oder uneigentlich äquivalent.

3. Jede primitive indefinite Form f der Invarianten $\begin{pmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \\ o_1, o_2, \ldots, o_{n-1} \end{pmatrix}$ ist einer Form $\sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i x_k$ äquivalent, in welcher der Bestandtheil $\sum_{i,k}^{1,n-1} a_{ik} x_i x_k$ eine primitive indefinite Form der Invarianten $\begin{pmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-2} \\ o_1, o_2, \ldots, o_{n-2}\ \sigma_{n-1}\ b \end{pmatrix}$ ist, wo $\frac{a_{11}}{\sigma_1}$ und b zu jeder beliebigen Zahl N relativ prim sind.

Ist nämlich die Determinante Δ von f in Primfactoren zerlegt $= 2^{\alpha} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots$, so werde, was erlaubt ist, zur Vereinfachung N durch $2^{\alpha+2} p_1^{\beta_1+1} p_2^{\beta_2+1} \ldots$ theilbar angenommen und sodann f in eine Hauptrepräsentante[1]) (mod. N) ihrer Klasse

$$g = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i x_k$$

transformirt. Dann hat die Form $\varphi = \sum_{i,k}^{1,n-1} a_{ik} x_i x_k$ die Invarianten $\begin{pmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-2} \\ o_1, o_2, \ldots, o_{n-2}\ \sigma_{n-1}\ b \end{pmatrix}$, wo $\frac{a_{11}}{\sigma_1}$ und b prim sind zu N, also auch zu 2Δ.

Ferner ist φ primitiv. Denn da $\frac{a_{11}}{\sigma_1}$ prim ist zu 2Δ und a_{12} für $\sigma_1 = 2$ ungerade, so könnten die Coefficienten a_{ik} von φ nur Primfactoren gemein haben, welche in

---

[1]) Vergl. Minkowski, a. a. O. Art. III.

$2\,\Delta$ nicht aufgehen. Wären aber alle diese Coefficienten durch eine solche Primzahl theilbar, so wären es auch die Grössen $A_{in} = \frac{\partial\,\Delta}{\partial\,a_{in}}$, was mit der Gleichung

$$a_{i1}\,A_{i1} + a_{i2}\,A_{i2} + \ldots\ldots + a_{in}\,A_{in} = \Delta$$

im Widerspruche ist.

Für $J = 1$ oder $n-1$ könnte indessen φ definit werden. Dann ist eine weitere Transformation nothwendig, wobei es genügt den Fall zu behandeln, dass φ eine positive Form ist. Da die Adjungirte $g' = \Sigma\, a'_{ik}\, x'_i\, x'_k$ von g indefinit ist, lassen sich ganze Zahlen ξ_i so bestimmen, dass $\Sigma\, a'_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$ negativ $(= -M)$ wird, und zwar ist dabei wenigstens eine der Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ von null verschieden, da $a'_{nn} = \frac{|\varphi|}{d_{n-2}} > 0$ ist. Ist ξ_i nicht null, so wende man auf g' die Substitution an

$$(S') = \begin{vmatrix} 1\;0 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \xi_1\,\xi\,N \\ 0\;1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \xi_2\,\xi\,N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0 \ldots\ldots 1+\lambda\,\xi\,N \ldots\; \xi_i\,\xi\,N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0 \ldots\ldots \mu\,N \ldots\; 1+\xi_n\,\xi\,N \end{vmatrix},$$

wo λ, μ, ξ vorläufig unbestimmte ganze Zahlen bedeuten; d. h. man setze

$$x'_k = y'_k + \xi_k\,\xi\,N\,y'_n \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots i-1,\; i+1, \ldots\ldots n-1)$$

$$x'_i = (1+\lambda\,\xi\,N)\,y'_i + \xi_i\,\xi\,N\,y'_n\;,\quad x'_n = \mu\,N\,y'_i + (1+\xi_n\,\xi\,N)\,y'_n\,.$$

Hierdurch geht g' in eine Form $\Sigma\, b'_{ik}\, y'_i\, y'_k$ über, in welcher

$$b'_{nn} = \xi^2\,N^2\,\Sigma\, a'_{ik}\,\xi_i\,\xi_k + 2\,\xi\,N\,\Sigma\, a'_{in}\,\xi_i + a'_{nn},\ (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

$$= \xi^2 N^2 \left\{ -M + \frac{2}{\xi N} \Sigma a'_{in} \xi_i + \frac{1}{\xi^2 N^2} a'_{nn} \right\}$$

und man kann ξ so gross nehmen, dass b'_{nn} negativ wird. Ausserdem kann man ξ durch ξ_i theilbar machen, wodurch $1 + \xi_n \xi N$ und $\xi_i \xi N$ relativ prim werden und λ und μ sich so bestimmen lassen, dass die Substitutionsdeterminante

$$|S| = (1 + \lambda \xi N)(1 + \xi_n \xi N) - \mu \xi_i \xi N^2 = 1$$

wird oder

$$(1 + \xi_n \xi N) \lambda - \xi_i N . \mu = - \xi_n .$$

Durch die adjungirte Substitution (S) von (S') geht dann g in eine Form über, welche alle verlangten Eigenschaften besitzt.

Es leuchtet ein, dass sich jede durch φ eigentlich darstellbare Zahl auch durch g und somit durch f eigentlich darstellen lässt. Wendet man auf φ wiederum dasselbe Verfahren an wie auf f, u. s. w., so kommt man zum Schluss, dass sich durch f jede Zahl (eigentlich) darstellen lässt, welche durch eine gewisse primitive indefinite ternäre Form der Invarianten $\begin{pmatrix} \sigma_1 , & \sigma_2 \\ o_1 , & o_2 \sigma_3 b \end{pmatrix}$, J' darstellbar ist, wo b prim ist zu $2\, o_1\, o_2$.

Ist f eigentlich primitiv und o_1 und o_2 ungerade und relativ prim (also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$), so kann man durch jene ternäre Form, somit auch durch f jede mit $o_1\, o_2\, b$ theilerfremde Zahl m eigentlich darstellen, für welche

$$\left(\frac{m}{p_1}\right) = \left(\frac{f}{p_1}\right)$$

ist in Bezug auf jeden Primfactor p_1 von o_1 und

$$(-1)^{J'} o_2\, b\, m \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \pmod 8 ,$$

also auch alle in gewissen Linearformen $8\,o_1\,o_2\,b\,x + k$ enthaltenen Zahlen.[1])

4. Bei Beschränkung auf eigentlich primitive Formen ungerader Determinante (also $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{n-1} = 1$), lässt sich jetzt durch den Schluss von $n-1$ auf n der Satz beweisen:

Zwei indefinite primitive Formen der ungeraden Invarianten $\left(\begin{smallmatrix} 1, & 1, \ldots, & 1 \\ o_1, & o_2, \ldots, & o_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$ sind (eigentlich oder uneigentlich) äquivalent, wenn sie demselben Geschlechte angehören und in der Reihe $o_1, o_2, \ldots, o_{n-1}$ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen vorkommen, welche relativ prim sind.

Beweis: Die beiden Formen seien f und f_1. Durch dieselben lässt sich nach dem Vorigen jede ungerade Zahl darstellen, welche in gewissen Linearformen

(L) $8\,o_1\,o_2\,b\,x + k$ und $8\,o_1\,o_2\,b_1\,x + k_1$, ($bb_1$ prim zu $2\,o_1\,o_2$)

bezw. enthalten ist. Für k und k_1 können alle Zahlen der Reihen

$1, 3, 5, \ldots, 8\,o_1\,o_2\,b - 1$ und $1, 3, 5, \ldots, 8\,o_1\,o_2\,b_1 - 1$

bezw. genommen werden, welche zu $2\,o_1\,o_2\,b$ und $2\,o_1\,o_2\,b_1$ bezw. relativ prim sind, für welche ferner

$$\left(\frac{k}{p_1}\right) = \left(\frac{f}{p_1}\right) = \left(\frac{f_1}{p_1}\right) = \left(\frac{k_1}{p_1}\right)$$

ist in Bezug auf jeden Primfactor p_1 von o_1 und

$$k \equiv (-1)^{J'} r\,o_2\,b \quad , \quad k_1 \equiv (-1)^{J'} r_1\,o_2\,b_1 \pmod 8 ,$$

wo r, r_1 beliebige der Zahlen 1, 3, 5 bedeuten. Da sich

---

[1]) Vergl. meine Inauguraldissertation, S. 30, wo $J' = 1$ ist.

nun die Zahlen r, r_1 offenbar immer so wählen lassen, dass $k \equiv k_1 \pmod 8$ wird, so haben die Linearformen (L) eine gewisse Anzahl von Linearformen

$$(L_2) \qquad 8\, o_1\, o_2\, b_2\, x + k_2$$

gemein, wo b_2 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von b und b_1 bedeutet und k_2 zu $8\, o_1\, o_2\, b_2$ relativ prim ist, und alle Zahlen der Form (L_2) lassen sich durch f und f_1 zugleich eigentlich darstellen. Unter denselben gibt es unendlich viele positive Primzahlen. Ist m eine derselben, welche in der Determinante von f nicht aufgeht, so lassen sich durch die Adjungirten f' und f_1' bezw. primitive Formen φ' und φ_1' von $n-1$ Variabeln und der Determinante $(-1)^J d'_{n-2}\, m$ eigentlich darstellen. Ist n gerade, so können φ' und φ_1' nur die Invarianten

$$\left(\begin{matrix}1 & , & 1 & , \ldots\ldots, & 1 & , & 1\\ o_{n-1} & , & o_{n-2} & , \ldots\ldots, & o_3 & , & o_2\, m\end{matrix}\right), \quad J$$

haben.[1]) Ist n ungerade, so könnte φ' (und φ_1') auch die Invarianten

$$\left(\begin{matrix}2 & , & 1 & , \ldots\ldots, & 1 & , & 2\\ o_{n-1} & , & o_{n-2} & , \ldots\ldots, & o_3 & , & o_2\, m\end{matrix}\right), \quad J$$

haben, jedoch nur, wenn in der Darstellung der Zahl m durch die Form f alle Variabeln ungerade Werthe erhalten.[2]) Dies lässt sich aber immer vermeiden. Denn wird die Form f wie in Art. 3 präparirt angenommen, so ist (weil $o_1\, o_2 \ldots o_{n-1}$ ungerade)

$$f \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 \pmod 2 .$$

Setzt man $x_n = 0$, so bleibt eine eigentlich primitive indefinite Form von $n-1 \geqq 4$ Variabeln übrig, von welcher

---

[1]) Minkowski, a. a. O. p. 133.

[2]) Ibid. p. 128.

der zu beweisende Satz gilt und durch welche (vergl. den folgenden Art.) jede Primzahl m dargestellt werden kann, die in $2\, o_1\, o_2 \ldots o_{n-1}$ nicht aufgeht und der Bedingung $\left(\frac{m}{p_1}\right) = \left(\frac{f}{p_1}\right)$ in Bezug auf jeden Primfactor p_1 von o_1 genügt. Also lässt sich auch m durch f so darstellen, dass x_n gerade ist und dann muss φ' die Invarianten $\left(\frac{1}{o_{n-1}}, \frac{1}{o_{n-1}}, \ldots\ldots, \frac{1}{o_3}, \frac{1}{o_2 m}\right)$, J haben. Dasselbe gilt von φ_1'.

Hiernach gehören φ' und φ_1' auch demselben Geschlechte an,[1]) sind also nach Voraussetzung äquivalent, wenn in der Reihe $o_{n-1}, o_{n-2}, \ldots\ldots, o_3, o_2 m$ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen vorkommen, welche relativ prim sind. Dann stellt f_1' auch die Form φ' dar, ist also mit f' äquivalent (nach Art. 2), daher auch f_1 mit f.

Gäbe es in der Reihe $o_{n-1}, o_{n-2}, \ldots\ldots, o_3, o_2$ keine zwei aufeinanderfolgende theilerfremde Zahlen, so müssten der Voraussetzung zufolge o_1 und o_2 relativ prim sein. Dann würde man statt von f und f_1 von ihren Adjungirten f' und f_1' ausgehen und wiederum zu demselben Schlusse kommen.

Da nun der Satz für $n = 3$ bereits bewiesen ist, gilt er allgemein für jedes n.

5. Zur Vervollständigung des Beweises bleibt übrig, unter Beibehaltung der im vorigen Artikel gemachten Bedingungen die durch die Form f eigentlich darstellbaren Zahlen zu betrachten. Da die Darstellung einer negativen Zahl $-m$ durch f auf diejenige von m durch $-f$ zurückkommt, wird es genügen, nur positive Zahlen m in Betracht zu ziehen, wobei ich mich ausserdem auf den Fall beschränke, das m prim ist zu $2\, o_1\, o_2 \ldots o_{n-1}$.

[1]) Minkowski, a. a. O. p. 135.

Um nun m durch die eigentlich primitive Form f der Invarianten

$$\begin{pmatrix} 1 & , & 1 & , & \ldots\ldots & , & 1 \\ o_1 & , & o_2 & , & \ldots\ldots & , & o_{n-1} \end{pmatrix}, \; J \qquad (0 < J < n)$$

darzustellen, hat man eine primitive Form φ' der Invarianten

$$\begin{pmatrix} 1 & , & 1 & , & \ldots\ldots & , & 1 & , & 1 \\ o_{n-1} & , & o_{n-2} & , & \ldots\ldots & , & o_3 & , & o_2 m \end{pmatrix}, \; J$$

oder auch (wenn n ungerade) der Invarianten

$$\begin{pmatrix} 2 & , & 1 & , & \ldots\ldots & , & 1 & , & 2 \\ o_{n-1} & , & o_{n-2} & , & \ldots\ldots & , & o_3 & , & o_2 m \end{pmatrix}, \; J$$

zu suchen, welche für jede dieser Ordnungen einem durch dasjenige von f' völlig bestimmten Geschlechte angehören muss.[1]) Im ersten Falle existirt das betreffende Geschlecht für $n > 3$ immer, wenn

$$(m) \qquad \left(\frac{m}{p_1}\right) = \left(\frac{f}{p_1}\right)$$

ist in Bezug auf jede in o_1 aufgehende Primzahl p_1.[2]) Alsdann lässt sich eine Form finden, welche mit f in dasselbe Geschlecht gehört, also mit f äquivalent ist und in welcher m der Coefficient des Quadrats einer Variabeln ist, woraus sofort die Darstellbarkeit von m durch f folgt. Daher lässt sich unter der Bedingung (m) jede mit $2\, o_1\, o_2 \ldots o_{n-1}$ theilerfremde Zahl m durch f darstellen.

---

[1]) Minkowski, a. a. O. p. 135. [2]) Ibid. p. 139.