

## Mitteilungen

von

Prof. A. Weilenmann.

---

In den nachfolgenden Zeilen beabsichtige ich nicht, wesentlich Neues zu bringen, sondern der Zweck derselben ist ein mehr didaktischer. Ich habe einige Sachen herausgegriffen, um mehr meine Ansicht über deren Behandlungsweise darzulegen, insbesondere in dem Falle, da Infinitesimalrechnung ausgeschlossen ist. Die Reihenfolge der Artikel ist etwa diejenige, welche der Gang des Unterrichtes erfordert.

1. Die Reibung. Die hier niedergelegte Art der Bestimmung des Reibungskoeffizienten durch Bewegung eines Körpers, besonders eines rollenden, halte ich namentlich deswegen für wichtig, um neben dem freien Falle ein anderes auch praktisch verwertbares Beispiel veränderlicher Bewegung vorzuführen.

2. Die Fliehkraft. Den Begriff der Fliehkraft im Unterrichte zurecht zu legen und verständlich zu machen bietet immer seine gewissen Schwierigkeiten, die nach meiner Ueberzeugung durch die hier niedergelegte Ableitung beseitigt werden.

3. Zur Gastheorie. Man ist jedenfalls genötigt, dieses Kapitel mehr oder weniger eingehend zu behandeln. Der hier eingeschlagene Weg führt in möglichst kurzer und einfacher Art das Hauptsächlichste zur Erkenntnis vor.

4. Potential eines Punktes in Bezug auf eine elektrische Kugel. Man kann sich wohl heutzutage der Notwendigkeit kaum entziehen, selbst im Unterrichte

an Mittelschulen auf das Wesen des Potentials, insbesondere des elektrischen, einzugehen, da nur dann der Unterricht in Elektrizität den neuern Anschauungen entsprechend sich gestalten kann. Die Einsicht in die Erscheinungen wird viel einfacher und klarer, insbesondere in die Wirkung der Kondensatoren, die Stromwirkungen u. s. f., besonders wenn man schon in der Mechanik darauf Bedacht genommen hat, die Zuhörer mit den absoluten Maassen vertraut zu machen.

### 1. Ueber die Reibung.

Die Ermittlung der Reibungskoeffizienten wird nach dem Vorgange von Coulomb für gleitende Reibung mit dem sog. Tribometer ausgeführt, für rollende durch an Walzen gehängte Gewichte. Auch die schiefe Ebene kann mit Vorteil zur Bestimmung benutzt werden. Beide Methoden passen vortrefflich für das Gleiten, dagegen weniger für das Rollen, weil das anzuhängende Gewicht oder bei der schiefen Ebene der Neigungswinkel für das Abrutschen sehr gering sind.

Dagegen ist eine andere Methode äusserst geeignet zur Beobachtung des Koeffizienten der rollenden Reibung.

Bei jedem in Bewegung sich befindenden Körper tritt die Reibung als hindernde Kraft auf. Wirken ausser dem einmaligen Antriebe keine weitem Kräfte mehr, so kann, da die Reibung bei gleicher Flächenbeschaffenheit nahezu konstant ist, die Bewegung sehr angenähert als eine gleichmässig verzögerte angenommen werden.

Bezeichnen wir daher mit  $m$  die bewegte Masse, mit  $a$  ihre Verzögerung, und mit  $R$  die reibende Kraft, so ist jedenfalls

$$R = m a \quad \text{Dyns (} m \text{ Gramme, } a \text{ cm.)}$$

Gewöhnlich wird aber die Reibung in Grammdruck angegeben, wenn die Masse  $m$  in Gramm gegeben ist. Bedeutet daher  $g$  die Beschleunigung der Schwerkraft in cm, so wird in Grammdruck

$$R = \frac{a}{g} m = km$$

Hier ist dann  $k = \frac{a}{g}$

der Wert, den man in der Praxis gewöhnlich als den Reibungskoeffizienten bezeichnet. Sobald mithin  $a$  bekannt ist, lässt sich jener sofort angeben.  $a$  erhält man aber leicht:

Man erzeugt auf horizontaler Unterlage durch einen Schlag, z. B. mit einem Pendelhammer, die Bewegung, zählt die Zeit  $t$  vom Beginne bis zum Momente, da der Körper von selbst zur Ruhe kommt, und misst den zurückgelegten

Weg  $s$ . Dann ist  $s = \frac{at^2}{2}$

folglich  $a = \frac{2s}{t^2}$

$k = \frac{2s}{gt^2}$

Als Beispiel möge die rollende Reibung einer Eisenholzkugel auf glattem Eichenholz bestimmt werden. Die Beobachtung gab:

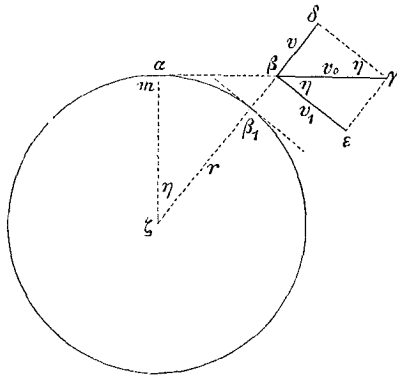
$s = 121,2 \text{ cm}$     $t = 8,47 \text{ Sek.}$     $g = 981 \text{ cm}$   
somit  $k = 0,00344.$

Natürlich könnte man auch zwei Zeiten und die zugehörigen Wege messen, während der Körper in Bewegung ist, um daraus Anfangsgeschwindigkeit und  $a$  zu berechnen.

## 2. Ueber die Fliehkraft.

Ist ein Körper sich selbst überlassen, so bewegt er sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit, z. B.  $v_0$ ,

geradlinig weiter. Soll er sich daher krummlinig bewegen, so muss er durch eine Kraft beständig aus seiner Richtung abgelenkt werden. Betrachten wir speziell eine Kreisbahn, auf welche alle elementaren Stücke einer beliebigen Kurve zurückgeführt werden können. Die



Kraft, welche die Masse  $m$  immer wieder in die Kreisbahn treibt, muss normal zu letzterer stehen, d. h. ihre Richtung weist nach dem Mittelpunkte, ist daher eine Zentralkraft, die mit  $z$  bezeichnet werden möge. Hat die Masse in der Richtung der Tangente die Geschwindigkeit  $v_0$ , und würde sie in der unendlich klein gedachten Zeit  $\tau$  von  $\alpha$  nach  $\beta$  getrieben, so muss dieselbe in der gleichen Zeit wieder auf den Kreis nach  $\beta_1$  durch die Zentralkraft  $z$  getrieben werden.

Die in der Tangentenrichtung  $\alpha \beta$  vorkommende Geschwindigkeit  $v_0$  zerlegt sich in zwei Komponenten, die radiale  $v$  und die für  $\beta_1$  tangentielle  $v_1$ , so dass

$$v = v_0 \sin \eta$$

$$v_1 = v_0 \cos \eta.$$

Die von der Zentralkraft in der Zeit  $\tau$  zu überwindende Kraft ist daher die der radialen Geschwindigkeit  $v$  entsprechende

$$f = \frac{m v}{\tau} = \frac{m v_0}{\tau} \sin \eta.$$

Diese Komponente ist es, mit welcher die Masse  $m$  sich vom Zentrum radial zu entfernen, d. h. das Zentrum

zu fliehen versucht, und welche mithin als Fliehkraft bezeichnet wird. Sie lässt sich noch in anderer Weise ausdrücken.  $\alpha \beta$  ist der unendlich kleine Weg während der Zeit  $\tau$ , somit

$$\alpha \beta = v_0 \tau$$

Ferner

$$\sin \eta = \frac{\alpha \beta}{\zeta \beta}$$

Wegen des unendlich kleinen  $\tau$  ist aber auch Winkel  $\eta$  unendlich klein, mithin

$$\sin \eta = \frac{\alpha \beta}{r} = \frac{v_0 \tau}{r},$$

wenn  $r$  den Kreisradius bedeutet. Mit Benutzung dieses Wertes ergibt sich

$$f = \frac{m v_0^2}{r}$$

für den Betrag der Fliehkraft, der zugleich denselben Wert wie die Zentralkraft haben muss. Die weiteren Formen

$$f = m r \omega^2 = \frac{4 \pi^2 r}{T^2},$$

wo  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit,  $T$  die Umlaufszeit bedeuten, sind auf bekannte Art leicht zu finden.

Die Komponente  $v_1$  liefert die Tangentialkraft  $u$ , als Sekundenkraft geschrieben

$$u = m v_1 = m v_0 \cos \eta$$

oder weil  $\eta$  unendlich klein:

$$u = m v_0$$

Ein ganz ähnliches Verfahren kann auch angewendet werden, um die Bewegung einer Kreiselaxe zu erläutern.

### 3. Zur Gastheorie.

Bezeichnen wir die kinetische Energie eines Körpermoleküls als die absolute Temperatur, mit  $\mu$  die Masse eines Moleküls, mit  $v$  seine Geschwindigkeit, so wird jene ausgedrückt durch  $\frac{\mu v^2}{2}$ . Da jedoch die absolute

Masse der Moleküle nicht mit Sicherheit bekannt ist, so kennen wir ebenfalls den absoluten Wert der Temperatur, die in Energieeinheiten gegeben werden sollte, nicht, und müssen uns daher mit einem Relativmaasse begnügen. Wenn wir zwei Körper zur Berührung bringen, so gleichen sich die Energiebeträge der einzelnen Moleküle der Körper aus. Die Körper haben dieselbe Temperatur, wenn die einzelnen Moleküle des einen dieselbe kinetische Energie besitzen wie diejenigen des andern. Um zu einem Relativmaasse zu gelangen, bringt man einen Körper in schmelzendes Eis bis zur Temperatúrausgleichung. Dann besitzt jedes Molekül eine bestimmte Energie. Erhöhen wir nun die Temperatur bis zu derjenigen des siedenden Wassers unter Atmosphärendruck, so nimmt die Energie jedes Moleküls um einen gewissen nicht sicher bekannten Betrag zu. Diese Zunahme teilt man in hundert gleiche Teile und nennt einen solchen Teil einen Grad. Ein solcher entspricht also einer bestimmten Anzahl Energieeinheiten (Ergs), die für ein Molekül jedes Körpers dieselbe ist. Bezeichnen wir sie mit  $e$  und die absolute Temperatur in Graden mit  $T$ , so wird

$$1) \quad \frac{\mu v^2}{2} = e T$$

Die einem Körper zugeführte Wärmeenergie wird in verschiedener Weise verwertet. Ein Teil  $E$  dient zur Erhöhung der kinetischen Energie der Moleküle, d. h. zur Erhöhung der Temperatur, ein anderer  $K$  zur Ueberwindung der Kohäsion, ein dritter  $D$  zur Ueberwindung des äussern Druckes und ein vierter  $J$  zu Arbeitsleistung innerhalb der Moleküle (Verminderung der sog. Affinität). Beziehen wir die Wärmezufuhr auf 1 Gramm des Körpers und auf einen Grad Temperaturerhöhung, und nennen sie  $c$  (spezifische Wärme), so ist

$$2) \quad c = E + K + D + J.$$

Es sei  $z$  die im Gramme enthaltene Anzahl Moleküle. Dann ist

$$E = z e.$$

Ferner wird auch die Kohäsionsarbeit  $K$  nahe der Molekülzahl proportional sein, ebenso die Arbeit  $J$  im Innern der Moleküle, und es kann gesetzt werden

$$K = zk, \quad J = zi,$$

so dass man erhält

$$3) \quad c = z(e + k + i) + D.$$

Für feste und auch flüssige Körper kann unter gewöhnlichen Druckverhältnissen die äussere Druckarbeit in erster Annäherung ausser Betracht fallen und wir haben

$$4) \quad c = z(e + k + i).$$

Da die Gleichung sich auf ein Gramm bezieht, und  $\mu$  die Masse eines Moleküls ist, so muss

$$z\mu = 1, \quad \text{oder} \quad z = \frac{1}{\mu}$$

sein. Dann gibt 4

$$5) \quad c\mu = e + k + i.$$

$e$  ist ein konstanter Reduktionsfaktor. Die Kohäsionsarbeit wird wegen der geringen Volumenänderung jedenfalls nur klein sein, daher in verschiedenen Körpern auch nicht sehr verschieden. Die Arbeit  $i$  innerhalb des Moleküls aber wird bei verschiedenen Körpern ungleich sein, und man darf schliessen, im allgemeinen um so grösser, je komplizirter das Molekül ist, d. h. aus je mehr Atomen dasselbe besteht. Für Körper ähnlicher Zusammensetzung wird  $i$  nicht sehr verschieden sein.  $c\mu$  ist einfach die Molekularwärme. Wir erkennen daher das Gesetz von Neumann, aber erkennen es auch nur als ein Näherungsgesetz: Für Körper ähnlicher Zusammensetzung ist die Molekularwärme ungefähr gleich gross.

Dasselbe wird am ehesten gelten für die einfachsten Körper, die Elemente. Dann kann statt der Molekular-

masse auch die Atommasse gesetzt werden. Es folgt das Gesetz von Dulong und Petit, jedoch auch nur als Annäherung:

Die Atomwärme aller festen Elemente hat nahezu denselben Wert.

Wegen der Zunahme des  $i$  muss mit der Atomzahl im Moleküle auch die Molekularwärme wachsen, und wir haben hierfür den Ausdruck in dem Gesetze von Kopp:

Die Molekularwärme eines Körpers ist ungefähr gleich der Summe der Atomwärmen der zusammensetzenden Elemente.

Für die Gase fällt die Kohäsionsarbeit weg, dagegen darf die äussere Druckarbeit wegen der starken Ausdehnung nicht vernachlässigt werden. Es ist daher in diesem Falle Gleichung 3 zu schreiben:

$$6) \quad c = z(e + i) + D.$$

Denken wir uns ein Gramm Gas vom Volumen  $V$  und die Druckkraft auf den  $\text{cm}^2$  Fläche gleich  $p$  Dyns, so ist

$$7) \quad E_p = p V$$

die entsprechende potentielle Energie z. B. eines Kolbens in einem Zylinder. Diese wird erzeugt durch die kinetische Energie der Gasmoleküle. Für die absolute Temperatur  $T$  beläuft sich diese im Ganzen auf

$$8) \quad E_k = z e T.$$

In der Kolbenrichtung wirkt jedoch nur ein Drittel derselben. Die Kolbenmoleküle besitzen aber wegen der gleichen Temperatur auch dieselbe Energiemenge, die sich zu der des Gases addirt, d. h. diese verdoppelt.

Der die potentielle Energie erzeugende Teil ist mithin:

$$9) \quad E'_k = \frac{2}{3} z e T.$$



Die Gleichheit von 7 und 9 gibt demnach:

$$10) \quad p V = \frac{2 z e}{3} T.$$

Das sogenannte Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz, aus welchem

$$T = \frac{\mu v^2}{2}$$

setzend auf bekannte Art die Geschwindigkeit der Gasmoleküle erhalten wird. Ebenso erhält man sofort das Gesetz von Avogadro, sowie die Proportionalität zwischen Dichte und Molekularmasse.

$$11) \quad R = \frac{2 z e}{3}$$

ist die sogenannte Gaskonstante.

Wird die Temperatur  $T$  um  $1^\circ$  erhöht, so nimmt die auf den Kolben wirkende Gasenergie um  $\frac{2 z e}{3}$  zu und vermehrt sich um ebensoviel die potentielle Energie des Kolbens; dieser steigt bei konstantem Drucke. Die Druckarbeit ist daher:

$$12) \quad D = \frac{2 z e}{3}.$$

Mithin folgt aus 6:

$$13) \quad c = z \left( \frac{5}{3} e + i \right).$$

Dies ist die sogenannte spezifische Wärme bei konstantem Drucke.

Wird das Volumen konstant erhalten, so fällt die äussere Druckarbeit weg, und es bleibt nach 6 noch

$$14) \quad c_o = z (e + i)$$

oder die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

Der Unterschied beider ist

$$15) \quad c - c_o = R = \frac{2 z e}{3}$$

d. h. gleich der Gaskonstanten, wie allgemein bekannt.

Durch Division ergibt sich ferner:

$$16) \quad \frac{c}{c_0} = 1 + \frac{2}{3} \frac{e}{e+i}$$

Für einatomige Gase ist

$$17) \quad i = 0,$$

daher

$$18) \quad \frac{c}{c_0} = 1,667$$

wie auch wirklich von Kundt und Warburg experimentell für das einatomige Quecksilber gefunden wurde.

Für Gase ähnlicher Konstitution werden die Werte von  $i$  noch weniger abweichen als für feste Körper. Dies wird insbesondere gelten für die zweiatomigen Gase. Da  $i$  aber hier nicht mehr Null ist, so muss für dieselben  $\frac{c}{c_0}$  kleiner als 1,667 sein. Es sind auch wirklich für die Gase Luft,  $H_2$ ,  $CO$ ,  $NO$ ,  $HCl$  die von Wüllner und E. Wiedemann gegebenen Werte von  $\frac{c}{c_0}$  zwischen den Grenzen 1,39 und 1,41 liegend. Nur für  $Cl_2$  ergibt sich, unter Annahme des Arbeitswertes der Grammkalorie zu 0,427 Mkg, und der in Kalorien gegebenen spezifischen Wärme des Chlors  $c = 0,1210$  der wesentlich kleinere Wert

$$\frac{c}{c_0} = 1,301.$$

Es scheint also hier die Arbeit im Innern des Moleküls ziemlich grösser zu sein als bei den andern zweiatomigen Gasen. Das würde auch damit stimmen, dass nach V. Meyers Bestimmungen in höhern Temperaturen das Chlor einatomig zu werden scheint. Bei komplizierteren Molekülen wird  $i$  jedenfalls immer grösser und daher auch  $\frac{c}{c_0}$  immer kleiner. Beispielsweise giebt Kohlensäure ( $CO_2$ ) 1,30, Aether ( $C_4H_{10}O$ ) 1,08 nach Wiedemann.

Es lässt sich dann auch, wie es Wüllner und E. Wie-

demann getan, das Verhältniss  $\frac{i}{e}$  bestimmen, welcher Quotient für zweiatomige Gase 0,6—0,7, für Aetherdampf aber 7,6 beträgt.

Da auch hier wieder  $z\mu = 1$ , so folgt

$$19) \quad c\mu = \frac{5}{3}e + i$$

$$20) \quad c_0\mu = e + i.$$

Hieraus folgt zunächst jedenfalls

$$21) \quad c\mu - c_0\mu = \frac{2}{3}e$$

d. h. die Differenz der Molekularwärmen bei konstantem Drucke und konstantem Volumen hat für alle Gase denselben Wert.

Dieser Satz ist nur eine andere Form für den Satz, dass die Gaskonstanten den Dichten oder den Molekularmassen umgekehrt proportional seien.

In der Tat ergeben sich folgende Werte, wenn die Molekulargewichte nur angenähert genommen werden, und die üblichen Konventionseinheiten, sowie die Kalorie zu Grunde gelegt werden, aus den Beobachtungen von E. Wiedemann (Wiedemann, Annalen 1877 N. F., Bd. II S. 195):

Tabelle I.

Stoff	$\mu$	$c$	$\frac{c}{c_0}$	$c\mu - c_0\mu$	$i$	$\frac{c}{c_0}(24)$
Wasserstoff $H_2$	2	3,4090	1,410	1,982	1,822	1,415
Kohlenoxyd $CO$	28	0,2426	1,415	1,994	1,799	1,417
Kohlensäure $CO_2$	44	0,1952	1,300	1,980	3,609	1,303
Stickoxydul $N_2O$	44	0,1983	1,294	1,984	3,741	1,298
Ammoniak $H_3N$	17	0,5009	1,303	1,981	3,535	1,307
Chloroform $CHCl_3$	119,5	0,1341	1,139	1,950	11,065	1,143
Aethylen $C_2H_4$	28	0,3364	1,270	2,001	4,417	1,270
Aethylbromid $C_2H_5Br$	109	0,1354	1,159	2,020	9,731	1,157
Aceton $C_3H_6O$	58	0,2984	1,132	2,018	12,289	1,131
Benzol $C_6H_6$	78	0,2237	1,129	1,997	12,396	1,129
Essigäther $C_4H_8O_2$	88	0,2738	1,094	2,068	19,048	1,091
Aethyläther $C_4H_{10}O$	74	0,3725	1,078	1,998	22,567	1,078

Als Mittelwert ergibt sich

$$22) \quad c\mu - c_o\mu = 1,997 \text{ d. h. nahezu } = 2.$$

In den angenommenen Einheiten wäre mithin sehr nahe

$$23) \quad e = 3.$$

Aus Gleichung 20 oder aus 19 kann dann der Wert von  $i$  gerechnet werden, wie er in der vorhergehenden Tabelle steht. Es ist wie zu erwarten diese intramolekulare Arbeit mit wachsender Atomzahl im Allgemeinen eine zunehmende und folglich auch die Molekularwärme eine um denselben Betrag sich vergrößernde. Für Gase ähnlicher Beschaffenheit wird  $i$  ungefähr denselben Wert haben können, somit die Molekularwärme  $c\mu$  oder  $c_o\mu$  ebenfalls ungefähr gleichwertig sein, und zwar noch eher als bei festen Körpern. Es wird dies insbesondere für die zweiatomigen Gase gelten, für welche auch wirklich  $c\mu$  nahe gleich 7,0 ist. Bei Aethyläther wächst der Betrag auf 27,6 an. Ein eigentliches Gesetz kann ich aber auch nicht herausfinden. Vielleicht hat die räumliche Anordnung der Atome im Molekül, die bei komplizirtern Fällen sehr verschieden sein kann, einen Einfluss.

Aus Gleichung 19 folgt mit 23

$$i = c\mu - 5.$$

Dann gibt 16:

$$24) \quad \frac{c}{c_o} = 1 + \frac{2}{c\mu - 2}$$

Nach diesem Ausdrücke sind die Werte der letzten Reihe vorstehender Tabelle unter  $\frac{c}{c_o}$  (24) berechnet.

Bezüglich der Aenderungen der spezifischen Wärmen ergibt sich aus 13 und 14 eine einfache Beziehung.  $z$  und  $e$  sind jedenfalls konstant; also kann eine Aenderung nur herrühren durch  $i$ . Die intramolekulare Arbeit vergrößert sich mit der Temperatur, indem die Moleküle der Dis-

soziation immer näher kommen.  $c$  und  $c_0$  müssen aber um den gleichen Betrag zunehmen, d. h.:

Der Aenderungskoeffizient mit der Temperatur ist für die spezifischen Wärmen bei konstantem Drucke und konstantem Volumen für gasförmige Körper derselbe, oder

25)  $c = a + bt$   $c_0 = a_0 + bt$   $i = \mu a_0 - 2 + \mu bt$   
innerhalb der Versuchsgrenzen.

Mithin lässt sich auch sofort das Verhältniss der beiden spezifischen Wärmen in seiner Abhängigkeit von der Temperatur berechnen. Setzen wir

$$26) \quad \frac{c}{c_0} = k; \quad \frac{a}{a_0} = k_0$$

so wird

$$27) \quad k = \frac{a + bt}{a_0 + bt} = \frac{k_0 \left(1 + \frac{bt}{a}\right)}{1 + \frac{bt}{a_0}} = k_0 \frac{1 + \frac{bt}{a}}{1 + k_0 \frac{bt}{a}}$$

oder genähert:

$$k = \left(k_0 + \frac{bt}{a}\right) \left(1 - \frac{bt}{a_0}\right)$$

d. h.

$$28) \quad k = k_0 - \frac{(k_0 - 1) bt}{a_0}$$

Die Vergleichung der Bestimmungen von E. Wiedemann über die Aenderung der spezifischen Wärme bei konstantem Drucke einiger Gase und Dämpfe (Wiedemann, Annalen 1877 N. F., Bd. II pag. 195) mit Beobachtungen von A. Wüllner über die Aenderung der Werte von  $k$  (Wiedemann, Annalen 1878 N. F., Bd. IV pag. 321) ergeben folgende Kontrolle des oben ausgesprochenen Satzes, sowie die von letzterm beobachtete und nach 27 berechnete Aenderung von  $k$ . Für die Rechnung des letztern Wertes sind die Zahlen der Tabelle I in der letzten Reihe

zu Grunde gelegt, welche sich auf die Temperatur von  $0^\circ$  beziehen. Ebenso sind für  $a$  die daselbst notirten Angaben für  $c$  ebenfalls für Null gültig genommen.

Tabelle II.

Stoff	$c$			$c_0$			$bt$
	$100^\circ$	$0^\circ$	Diff. 100 b	$100^\circ$	$0^\circ$	Diff. 100 b	Diff. Mittel
$CO_2$	0,2169	0,1952	0,0217	0,1692	0,1489	0,0203	0,0210
$N_2O$	0,2212	0,1983	0,0229	0,1738	0,1513	0,0225	0,0227
$H_3N$	0,5317	0,5009	0,0309	0,4163	0,3803	0,0360	0,0334
$C_2H_4$	0,4189	0,3364	0,0825	0,3537	0,2701	0,0836	0,0830
	$k$ beob.			$k$ berechnet			
	$0^\circ$	$100^\circ$	Diff.	$0^\circ$	$100^\circ$	Diff.	
$CO_2$	1,311	1,282	0,029	1,303	1,266	0,037	
$N_2O$	1,311	1,272	0,039	1,298	1,262	0,036	
$H_3N$	1,317	1,277	0,040	1,307	1,282	0,025	
$C_2H_4$	1,246	1,187	0,059	1,270	1,206	0,064	

Die Uebereinstimmung darf, namentlich in den Aenderungen von  $c$  und  $c_0$ , als eine genügende bezeichnet werden.

Gehen wir jetzt zurück zu der Gleichung 4 und stellen sie neben 14:

$$4) \quad c = z(e + k + i)$$

$$14) \quad c_0 = z(e + i).$$

Erstere gilt für feste und flüssige, letztere für gasförmige Körper. Es ist nun zu erwarten, dass die Aenderungen von  $k$  mit der Temperatur nicht sehr bedeutend, sowie diejenigen von  $i$  im flüssigen und gasförmigen Zustande nicht stark verschieden sein werden, somit, wie E. Wiedemann gefunden, die Temperaturkoeffizienten für Flüssigkeiten und die entsprechenden Gase jedenfalls dieselbe Grössenordnung haben müssen.

Es ist eigentlich nicht so ohne weiteres selbstverständ-

lich, dass die intramolekulare Arbeit bei konstantem Drucke und konstantem Volumen dieselbe sei. Dagegen bestätigen die Uebereinstimmung von Beobachtung und Rechnung diese Voraussetzung vollständig.

4) *Potential eines Punktes in Bezug auf eine elektrische Kugel.*

Zuerst wird durch das Experiment nachgewiesen, dass eine elektrische Kugel so wirkt, wie wenn die ganze elektrische Menge in ihrem Zentrum vereinigt wäre. Zu dem Zwecke zeigt man, dass, wenn eine kleinere z. B. mit positiver Elektrizität geladene Kugel in eine andere grössere nullelektrische versenkt wird, auf dieser durch Influenz innen  $-$ , aussen  $+$  elektrischer Zustand entsteht. Da beim Herausnehmen der innern Kugel ohne Berührung mit der äussern letztere wieder nullelektrisch wird, so folgt, dass negative und positive Elektrizität der grössern sich aufheben, also gleich sind. Wird die äussere abgeleitet, so zeigt sich, dass die positive der kleinern Kugel bei Berührung die negative der grössern neutralisirt, also auch diese und folglich alle drei gleich sind. Ist mithin die äussere Kugel isolirt und wird ohne Ableitung die kleinere mit dem Innern der grössern zur Berührung gebracht, so verbleibt noch dieselbe Menge  $e$ , welche vorher auf der kleinern war, jetzt auf der grössern.

Nach diesen durch die Versuche erläuterten Erörterungen geht man über zum Nachweise des zuerst erwähnten Satzes. Ein Elektroskop wird der Wirkung einer kleinen Kugel ausgesetzt und die Ablenkung gemessen. Dann stülpt man ohne Berührung darüber eine zweite grössere, über diese vielleicht noch eine dritte; die Ablenkung bleibt unverändert. Wird die kleinste mit

der zweiten zur Berührung gebracht, herausgenommen, ebenso die zweite, nachdem dieselbe mit der dritten berührt, so ist keine Aenderung am Elektroskope zu bemerken, wenn die Kugeln möglichst konzentrisch waren. Die anfängliche Elektrizitätsmenge der kleinsten befindet sich jetzt auf der äussersten Kugel.

(Ich bediene mich zu diesen und andern Versuchen mit Vorliebe einer Drehwaage, bei welcher an einem 70 cm. langen Metallfaden unten ein ca. 40 cm. langes horizontales Schellackstäbchen entweder mit Hollundermarkkügelchen oder mit Goldblatt belegten Glimmerscheibchen versehen ist, die entgegengesetzt geladen sind.)

Dann folgt der Nachweis des Gesetzes von Coulomb entweder mit der soeben erwähnten Drehwaage oder mit einem horizontalen elektrischen Pendel.

Im erstern Falle wird, wie es Coulomb gemacht, durch eine Drehung am Aufhängeknopf des Metallfadens der Schellackstab immer in die Normallage zurückgedreht, und die Kraft nach dem Drehwinkel in einfacher, doppelter etc. Entfernung, sowie einfacher, doppelter etc. Ladung gemessen. Da aber ein Zeigerende eine Kreisbewegung ausführt, und diese nicht im ganzen Hörsaale zu verfolgen wäre, so verwandle ich dieselbe in eine geradlinig lotrechte längs eines Massstabes.

Vom abwärts gebogenen, vor einem Ringe sich bewegenden Ende eines Zeigers geht ein Faden wagrecht über eine am lotrecht stehenden Massstabe befestigte Rolle. Der Faden ist durch einen Index gespannt, welcher sich längs des Massstabes verschiebt. Die Bewegung des Index ist dem Drehwinkel proportional, weil sich der Faden auf den Ring legt.

Man wird nicht versäumen, die Parallele zwischen



der elektrischen und der Schwerkraftswirkung zu ziehen, die Analogie der Wirkung einer elektrischen Kugel und der Erde hervorzuheben, ebenso wie die Gleichheit des Newton'schen Schwerkraftgesetzes und des Coulomb'schen Gesetzes. Man kann zeigen, wie ein negativ elektrisches Kügelchen der Drehwaage mit Beschleunigung gegen eine grössere positiv elektrische Kugel sich hinbewegt, ähnlich wie beim freien Falle der Körper. Es ergibt sich, zunächst wenigstens für die Kugel, der Begriff der Niveauflächen oder Flächen gleicher potentieller Energie durch Vergleich mit der Erde von selbst, ebenso die Erkenntniss der Arbeitsleistung, wenn ein negativ elektrisches Kügelchen von der positiv elektrischen Kugel entfernt, oder ein positives genähert wird, und deren Umwandlung in potentielle Energie, sowie Rückverwandlung in kinetische Energie, eventuell in Arbeitsleistung.

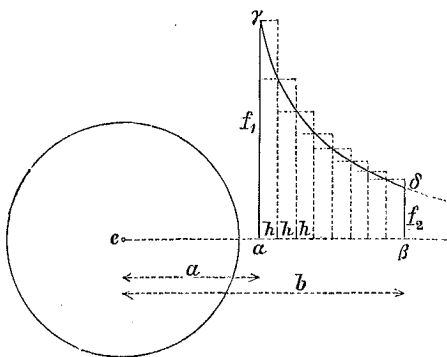
Nach diesen Vorbereitungen, die auch noch den Wert haben, die seltene Gelegenheit zu bieten, ein sogenanntes Fernwirkungsgesetz experimentell einfach und Allen sichtbar zu prüfen, und nach Aufstellung der durch Einführung der elektrostatischen Einheit vereinfachten Kraftformel

$$f = \frac{e e_1}{r^2}$$

wo  $e$  und  $e_1$  die beiden elektrischen in der Entfernung  $r$  wirkenden Mengen sind, kann übergegangen werden zur Berechnung der Arbeit, die nötig ist, um eine elektrische Menge  $e_1$  von einem Punkte nach einem andern zu bringen, wenn die Menge  $e$  auf einer Kugel sich befindet. Da diese Arbeit sich in potentielle Energie umsetzt, so ist damit auch der Unterschied an solcher zwischen den beiden Punkten berechnet. Nehmen wir die verschobene Menge  $e_1 = 1$  an, so nennen wir diesen Unterschied an

potentieller Energie, sofern er sich auf die Menge 1 bezieht, die Potentialdifferenz der beiden Punkte. Sie ist gleichwertig mit der Arbeit, welche notwendig ist, um die elektrische Menge 1 von dem einen zum andern Punkte zu transportiren.

Die Berechnung ist nun allerdings sofort gemacht, wenn Differentialrechnung vorausgesetzt werden darf. Häufig ist dieses aber nicht der Fall, selbst nicht an Universitäten. Die Kenntniss des Potentials



ist aber eine grosse Erleichterung der weitem Untersuchungen und gewährt eine bessere Einsicht. Ich lasse daher hier eine möglichst einfache elementare Ableitung folgen:

Ist  $e$  die elektrische Menge der Kugel,  $a$  und  $b$  die Entfernungen der Punkte  $\alpha$  und  $\beta$  von deren Zentrum, so wirkt zwischen  $e$  und der Menge 1 in der Entfernung  $r$  die Kraft

$$f = \frac{e}{r^2}$$

daher in  $\alpha$  und  $\beta$  die Kräfte

$$f_1 = \frac{e}{\alpha^2}; \quad f_2 = \frac{e}{\beta^2}.$$

Ziehen wir die Kraftkurve  $\gamma \delta$ , so stellt die Fläche  $\alpha \beta \delta \gamma$  die geleistete Arbeit dar, wenn die Menge 1 von  $\beta$  nach  $\alpha$  geschoben wird. Zur Berechnung der Fläche denken wir uns die Strecke  $\alpha \beta$  in unendlich kleine gleiche

Teile zerlegt von der Länge  $h$ , und Parallele zu den Krafrichtungen gezogen, so entstehen lauter Trapeze, deren Summe der gesuchte Wert wäre. Die nach  $f_1$  folgenden Senkrechten würden sein :

$$f' = \frac{e}{(a+h)^2}; f'' = \frac{e}{(a+2h)^2} \text{ u. s. f.}; \text{ die vorletzte } f_n = \frac{e}{(b-h)^2}$$

Je nachdem wir die Rechtecke durch Anfügung von Dreiecken, oder durch Wegschneiden solcher zu Rechtecken umformen, erhalten wir durch Summation der letztern eine zu grosse Fläche  $F_1$  oder eine zu kleine  $F_2$ . Es ist

$$F_2 > F > F_1$$

wenn  $F$  die wahre Fläche bedeutet. Wir haben

$$F_1 = f_1 h + f' h + f'' h + \dots + f_n h$$

$$F_2 = f' h + f'' h \dots \dots \dots + f_n h + f_2 h.$$

Also  $F_1 - F_2 = (f_1 - f_2) h$ , d. h. unendlich klein, weil  $h$  unendlich klein. Man kann demnach, wie bekannt, die eine oder die andere statt  $F$  nehmen, um so mehr einen zwischen beiden liegenden Wert. Nun ist, nach Einsetzung der  $f$ ,

$$F_1 = e \left( \frac{h}{a^2} + \frac{h}{(a+h)^2} + \frac{h}{(a+2h)^2} + \dots + \frac{h}{(b-h)^2} \right)$$

$$F_2 = e \left( \frac{h}{(a+h)^2} + \frac{h}{(a+2h)^2} + \frac{h}{(a+3h)^2} + \dots + \frac{h}{b^2} \right)$$

Für  $F$  können wir daher als jedenfalls dazwischen liegenden Wert annehmen

$$F = e \left( \frac{h}{a(a+h)} + \frac{h}{(a+h)(a+2h)} + \frac{h}{(a+2h)(a+3h)} + \dots + \frac{h}{(b-h)b} \right)$$

Aber es ist

$$\frac{h}{a(a+h)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+h}; \quad \frac{h}{(a+h)(a+2h)} = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a+2h} \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{h}{(b-h)b} = \frac{1}{b-h} - \frac{1}{b}.$$

Demnach ergibt sich sofort

$$F = e \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Diess ist auch die gesuchte Potentialdifferenz, d. h. die Arbeit

$$A = \frac{e}{a} - \frac{e}{b}$$

Rückt der Punkt  $\beta$  nach dem Unendlichen, so wird

$$A = \frac{e}{a}$$

Für den Punkt  $\beta$  ist alsdann auch die Kraftwirkung Null, und daher eine kleine Verschiebung ohne Arbeitsleistung, mithin für den Punkt unendlich der Betrag an potentieller Energie gleich Null. Somit stellt  $\frac{e}{a}$  den absoluten Wert der potentiellen Energie dar für die Menge Eins im Punkte  $\alpha$  im Abstand  $a$  vom Zentrum der Kugel mit der Ladung  $e$ . Man nennt diesen absoluten Wert der potentiellen Energie eines Punktes, sofern er sich auf die Einheitsmenge bezieht, das Potential des Punktes ( $V$ ). Es ist gleichwertig mit der Arbeit, welche nötig ist, um die elektrische Menge Eins aus dem Unendlichen an diesen Punkt heranzubringen.

Für  $\alpha$  und  $\beta$  sind

$$V_1 = \frac{e}{a}; \quad V_2 = \frac{e}{b}$$

die Potentiale, somit wie oben

$$V_1 - V_2 = \frac{e}{a} - \frac{e}{b}$$

die Potentialdifferenz.

Man kann hierauf den Begriff der Niveauflächen erläutern, erklären wie die Bewegung einer elektrischen Menge, d. h. ein Strom nur zwischen Punkten verschiedenen Potentials stattfindet, dagegen nie auf derselben

Niveaufläche. Schliesst man den Begriff der Kraftlinien, der Kapazität an, hierauf die Theorie des kugelförmigen Kondensators, des Plattenkondensators, des absoluten Elektrometers, etwa wie es in dem trefflichen kleinen Elementarbuch Maxwell's, übersetzt von Grätz, geschieht, so hat man eine solide Grundlage für das Verständniss alles Weitern geschaffen. Zur Ausführung des Einschlägigen eignet sich der Elektrophor in vorzüglichster Weise. Die Auswertung des Potentials kann man aber nicht umgehen und glaube ich dieselbe, so weit es elementar angeht, auf möglichst einfache Art durchgeführt zu haben.

---

## Geometrische Mittheilungen.

Von

**Wilh. Fiedler.**

---

### X. Kegelschnittconstructions.

1. Die Constructions der Kegelschnitte aus zwei Durchmessern mit ihren Polinvolutions verdienen besondere Durchbildung; ich habe ihnen im ersten Theil meiner »Darstell. Geom. u. Geom. d. Lage« (weiterhin citirt als G. I nach der 3. Aufl. von 1883, ebenso G. II, G. III) eine mehrseitige Erörterung gewidmet, will aber hier Verschiedenes hinzufügen. Es war offenbar, dass für die Ellipse und insbesondere für den Fall conjugierter Durchmesser unter Benutzung ihrer Endpunkte die Sätze von Brianchon und Pascal einzeln oder mit einander verbunden in einer ganzen Reihe von Formen vortheilhafte Verwendung ge-