Ueber Axenbünde des Massraumes.

Von **Fr. Graberg.**

Der Ueberblick über das Ganze
lehre die Bedeutung der Theile
verstehen.

Ein Strahlenpar verbindet zwei Leitrichtungen, wenn jenes auf jeder von diesen ein Punktepar bezeichnet. Das Strahlenpar theilt alsdann jeder Leitrichtung eine bestimmte Strecke zu, es misst die Strecken.*)

Sind die beiden Leitrichtungen durch einen Punkt verbunden, so hat das Strahlenpar einen Scheitel gemein und umgekehrt. Sind aber die Leitrichtungen windschief zu einander, so treffen sich auch die solche Leitungen verbindenden Strahlen nicht.

Fasst man im letztern Falle die eine Leitrichtung als verbindende Axe eines Ebenenpares auf, welches dieselbe mit dem Strahlenpar bestimmt, so dient die Strecke auf der andern Leitrichtung als Mass für alle Strecken, welche zwischen diesen Ebenen liegen. Dreht sich nämlich eine dritte Ebene um diese Axe, so theilt sie das Mass und alle Geraden zwischen dem Ebenenpar nach demselben Verhältniss, das nicht nothwendig in Zahlen dargestellt sein muss.

Ebenso bezeichnen 3 Strahlen durch die Theilpunkte des Masses in 3 Theilebenen durch dieselbe Axe auf allen Geraden, welche sie treffen und daher verbinden, dasselbe Massverhältniss.

*) Messen (goth. mitan, ahd. mezza, verw. gr. μέδω, schalte, walte) altes Hauswort; der Vater misst jedem Familienglied Speisen, Kleidung; er theilt sie zu. Grimm, Wörterbuch.

Windschiefe Axen, durch einfache Strahlen verbunden, bilden einen *Axenbund* und tragen denselben *Masstab*. Die verbindenden Strahlen stellen einen *Strahlverband* her, welcher als *Masszeichen* dient.

Der Masstab ist *eintheilig oder linear*, wenn der bewegliche Strahl mit einem festen eine bestimmte Länge misst. Der Masstab auf jeder von 2 Axen eines *Parbundes* ist *zweitheilig*, indem die Strahlenpare auf jener Massverhältnisse von Längenparen anzeigen. Analog ist der Masstab auf jeder von 3 Axen eines *Dreibundes* dreitheilig, derjenige auf jeder von 4 Axen eines *Vierbundes viertheilig* u. s. f.

Durch die stetige Bewegung der Strahlen nach Leitaxen entstehen Regelflächen, *Regale*, welche durch *Curven* mit einander verbunden sind und im Verein mit den Axenbünden den *Massraum* bilden, einen gegliederten Raum der Vorstellung, der sich zum wirklichen Raum unserer Bewegungen verhält wie der Masstab zur Zeichnung.

Einen systematischen Ueberblick über die *Axenbünde und Regale des Massraumes* zu bieten, ist Zweck der folgenden Arbeit. Diese erlaubt sich vom gewöhnlichen Sprachgebrauche im Sinne der Kürzung und Consequenz abzuweichen, weil die Vorstellung der räumlichen Gestalten an Klarheit um so mehr gewinnt, je weniger man Worte braucht und je genauer die verwendeten Worte die thatsächlichen Vorstellungen bezeichnen. Streng genommen, sind zeichnen und messen um so vollkommner geregelt, je ausschliesslicher sich die Thätigkeit der Vorstellung auf die *Verbindung der Linien* concentrirt.

I. Linearverbände.

Jede Bewegung des Stiftes oder des Blickes verbindet 2 Punkte, welche dieselbe begrenzen und findet in der Richtung von dem einen nach dem andern statt. Der Strahl, welcher diese Richtung bezeichnet, stellt einen linearen Verband zweier Richtpunkte dar, ist der Bindestrahl derselben.

Drei Punkte, die nicht auf demselben Bindestrahle liegen, sind die Bindepunkte dreier Strahlenpare. Wir schreiben: $|a \,.\, C|b|\, A \,.\, c|$.

Ein Strahl, der sich um einen seiner Richtpunkte dreht, während der andere einer Leitgeraden folgt, durchläuft die Bindebene eines Strahlbüschels. Zwei Leitgerade in der Bindebene desselben Strahlbüschels haben einen Bindepunkt gemein und liegen bündig.

Zwei Strahlbüschel sind bündig, wenn 3 Punkte ihrer gemeinsamen Leitung entsprechende Strahlenpare beider Büschel bezeichnen, insbesondere wenn diese Leitung den Bindestrahl der Scheitel trifft.

Von 2 windschiefen Geraden kann jede als Axe eines Ebenenbüschels gelten, welches die andere zur Leitung hat. Zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich treffen, sind mit ihrer gemeinsamen Leitung bündig.

Der Bindestrahl eines Punktepares zweier windschiefen Leitungen ist die Bindaxe zweier Ebenen durch diese Leitungen und der Regelstrahl zu den letztern für jeden Punkt jenes Bindestrahles.

Zwei windschiefe Gegenaxen sind mit jedem Richtpunkt, der nicht auf einer von ihnen liegt, durch einen Regelstrahl verbunden. Verschiebt sich der Richtpunkt auf einer zu beiden Gegenaxen windschiefen Leitung, so bilden die Regelstrahlen dieser drei windschiefen Leitungen eine Schar.

Das Strahlenbüschel, das Ebenenbüschel, die Regelschar verbinden je einen Punkt der Leitung mit dem Scheitel durch einen Strahl, mit der Axe durch eine Ebene, mit dem Axenpar durch einen Regelstrahl. Sie sind Masszeichen linearer Strahlverbände.

II. Parbund.

Taf. I, Stab C (Complexe).

Die Theilpunkte $.\, A_1\, A_2\, ,\, B_1\, B_2\, .$ eines Strahlenpares $|A_1\, B_1\, ,\, A_2\, B_2| = |\mathfrak{s}_1\, ,\, \mathfrak{s}_2|$ auf zwei windschiefen Axen $|\mathfrak{a}\, ,\, \mathfrak{b}|$ bestimmen ein zweites Strahlenpar: $A_1\, B_2\, ,$ $A_2\, B_1 \,| = |\, \mathfrak{s}_3\, ,\, \mathfrak{s}_4|$.

Einen Punkt $.\, P\, .$ verbinden 3 Regelstrahlen $|\,\mathfrak{s}_{ab}\, ,\, \mathfrak{s}_{12}\, ,\, \mathfrak{s}_{34}|$ mit dem Axenpar und den beiden Paren windschiefer Bindestrahlen. Die Ebene $[\mathfrak{s}_{12}\, \mathfrak{s}_{34}]$ bezeichnet auf $|\mathfrak{a}\, ,\, \mathfrak{b}|$ die Theilpunkte $.\, A_p\, ,\, B_p\, .$ eines sechsten Bindestrahles $|s_p|$, welcher für alle Punkte $.\, P\, .$ von $|\mathfrak{s}_{ab}|$ derselbe bleibt.

Zeigt nämlich $|\mathfrak{s}_{ab}\, .\, A_i\, .\, \mathfrak{a}|$, so bedingt dieser Punkt den Verband $[\mathfrak{b}\, \mathfrak{s}_{ab}|B_1\, A_i|\mathfrak{a}\, B_1|$. Das Strahlbüschel $.\, B_2|\mathfrak{s}_{ab}|$ bezeichnet auf $|B_1\, A_i|$ die Messreihe $|B_2\, P\, .\, m\, .\, B_1\, A_i$ und die Strahlenpare $|A_1\, m\, ,\, A_2\, m|$ zeigen auf $|B_1\, A_2\, ,\, B_1\, A_1|$ die Richtpunkte $|\mathfrak{s}_4\, .\, s_{34}\, .\, A_1\, m\, ,\, A_2\, m\, .\, s_{12}\, .\, \mathfrak{s}_1|$ für die Regelstrahlen $|\mathfrak{s}_{34}\, ,\, \mathfrak{s}_{12}\, |$. Der Bindepunkt $.\, B_1\, .$ der Reihen $|S_{34}\, ,\, S_{12}|$ bedingt den Scheitel $.\, A_p\, .$ auf $|\mathfrak{a}|$ für das Büschel der Bindestrahlen $S_{34}\, S_{12}|$. Bezeichnet $|S_{12}\, P.\, S_{21}\, .\, B_2\, A_2|$, so erhält man analog $.\, B_p\, .$ als Scheitel des Büschels $|S_{34}\, S_{21}|$.

Je 3 Bindestrahlen $|\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_{ab}|$ eines Axenpares $|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}|$ bedingen somit einen vierten $|\mathfrak{s}_p|$, welcher mit den 3 gegebenen die beiden Axen partheilig misst. Fällt $|\mathfrak{s}_{ab}|$ mit einem der Strahlen $|\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2|$ zusammen, so fällt $|\mathfrak{s}_p|$ in denselben Strahl.

Man bezeichnet je 2 zugeordnete Strahlen des Doppelpares $|\mathfrak{s}_1\ \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_{ab}\ \mathfrak{s}_p|$ als Gegenpolaren.

Der Parbund besteht aus Paren von Gegenpolaren, welche sich auf ein Axenpar stützen und durch 2 Grundstrahlen bezeichnet sind.

Betrachtet man das Axenpar als Grundstrahlen, so bedingt dasselbe eine 2. Schar von Gegenpolaren, welche mit der ersten in ihren Bindepunkten polar verbunden ist; diese $.P.$ sind nämlich die Pole der Bindebenen von 2 Polarstrahlen $|\mathfrak{s}_{ab}, \mathfrak{s}_{12}|$.

Jeder Regelstrahl $|\mathfrak{s}_{ab}|$ des Parbundes ist Polarstrahl zu den Bindebenen $[\mathfrak{s}_{12}\ \mathfrak{s}_{34}]$, deren Pole auf ihm liegen.

Durch je 3 Pole geht eine Polarebene des Bindepunktes dreier Polarstrahlen oder dreier Polebenen.

Taf. I, Stab R (Regale).

Zwei sich gegenseitig in ihren Bindepunkten stützende Regelscharen bilden eine Regelfläche des Parbundes. Eine Regelschar ist durch 3 windschiefe Leitrichtungen gegeben, wie die Linearverbände zeigten; daher ist die Regelfläche des Parbundes durch das Axenpar und 3 seiner Bindestrahlen bezeichnet, wofür man auch kurzweg 3 windschiefe Axen setzen kann, vorausgesetzt dass nur ein einfacher Strahlverband gefordert sei.

Die Regelfläche des Parbundes erweist sich für Strahlverbände eben so nützlich, wie für Punktverbände die Ebene. Wir erlauben uns daher der Kürze halber den Ausdruck *Regal* zur Bezeichnung dieser Fläche zu verwenden. Drei Axen durch 3 *Punkte* verbunden, bilden eine *Ebene*, durch 3 *Regelstrahlen* verbunden, ein *Regal*.

Der Name »Hyperboloid« ist viel länger, bezeichnet die Gestalt einseitig, da weder alle ebenen Schnitte noch alle Umrisse der Fläche Hyperbeln sind; besonders aber entspricht das Wort der thatsächlichen Vorstellung und der Verwendungsweise der Regelfläche nicht. Denn viel häufiger als die ganze Fläche benützt man die Strahlenpare derselben und deren Bindebenen zum Einrichten und Messen. Solchem Gebrauch entspricht die Grundbedeutung von »regalis« »zum Lenken, Richten gehörig« viel besser.

Der *Verband des Regales mit einer Ebene* ergibt die *Polarcurve* als Ort der Pole in dieser Ebene und den Pol derselben als Spitze des *Polarkegels*.

Das Axenpar $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$ ist durch seine Planpunkte $.A, B.$ und den Reliefstrahl $|\mathbf{c}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ mit dem Planpunkt $.C.$ auf den Plan bezogen. Irgend ein Par Bindestrahlen von $|\mathbf{a}\,\mathbf{b}|$ bestimmt mit $|\mathbf{c}'|$ ein Regal $\|\mathbf{a}\,\mathbf{b}\|^2$ und der Regelstrahl $|\mathbf{c}|$, der $.C.$ mit jenem Pare verbindet, kann an dessen Stelle zur Bezeichnung der Regelfläche $\|\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\|^2$ dienen.

Die Planspur $|t_c|$ der Bindebene $[\mathbf{c}'\ \mathbf{c} = \tau_c]$ zeigt die Relieflage von $|\mathbf{c}|$ an. Das Ebenenbüschel $|\mathbf{a}\,[\mathfrak{c}_i]$ bezeichnet in $[\tau, \mathbf{c}'\,\mathbf{b}]$ die Regelstrahlen $|\mathbf{s}_i = \mathfrak{c}_i\,\mathfrak{b}_i|$, deren *Planpunkte* $.\pi_i\cdot$ *Pole des Regales* $\|\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\|^2$ sind.

Insbesondere zeigt $[\mathbf{a}\,B]$ auf $|\mathfrak{c}|$ den Richtpunkt $.\mathfrak{b}$ des Regelstrahles $|b'|$ durch den Planpunkt $.B.$, der mit

$|\mathfrak{b}|$ die Polebene $[\tau_b]$ dieses Planpunktes bildet. Analog ergibt sich die Polebene $[\tau_a]$ des Planpunktes $.A.$ Die Bindestrahlen $[\tau_a|\mathfrak{t}_{ac}[\tau_c]\mathfrak{t}_{bc}|\tau_b]$ haben mit $[\tau_a|\mathfrak{t}_{ab}|\tau_b]$ den Pol $.\mathfrak{P}.$ des Planes gemein. Die Planspuren $|t_c, t_a, t_b|$ sind Tangenten der Polarcurve $(\pi)^2$, welche den Plan mit dem Regal verbindet. In jeder Ebene durch einen Strahl des Regales liegt ein zweiter Strahl der Fläche; die Planpunkte der beiden Strahlen sind im Allgemeinen verschieden und bezeichnen 2 Bindepunkte der Polarcurve mit der Planspur der Ebene jener Strahlen. Folglich ist die Polarcurve zweiter Ordnung, womit zugleich gesagt ist, dass dieselbe auch der zweiten Classe angehört, da jedem Pol des Regales nur eine Polebene entspricht und die Bindestrahlen aller Polebenenpare durch den Reliefpol des Planes gehen.

Das Strahlbüschel $.\mathfrak{P}|t_c]$ bezeichnet auf $|c, c'|$ 2 mit $|t_c|$ durch $.C.$ verbundene Punktreihen. Mit dem Regelstrahl $[\tau_a|\mathfrak{b}'_a\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{a}'_b|\tau_b]$ verbunden, ergeben die Punktepare der Reihen $|\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'|$ die Ebenen eines Theilbüschels $|\mathfrak{b}'_a\mathfrak{a}'_b = t_{ab}[t_{ci}]$, dessen Planspuren auf $|AC, BC|$ die Richtpunkte $.\mathfrak{c}_b, \mathfrak{c}_a.$ in den Ebenen zweier Büschelpare $|\mathfrak{a}[\mathfrak{c}_a]\mathfrak{a}', \mathfrak{b}[\mathfrak{c}_b\,\mathfrak{b}'|$ anzeigen. Die gemeinsamen Planspuren $|Ac_a, Bc_b|$ solcher Ebenenpare ergeben den Bindepunkt $.\pi_i.$ der Regelstrahlen $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_a|s'|\mathfrak{c}_b\,\mathfrak{b};\mathfrak{a}'\,\mathfrak{c}_a|s_i|\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}_b].$ als Pol von $[\mathfrak{s}_i\,\mathfrak{s}_i' = \mathfrak{P}t_{ci}\,\pi_i]$ und $|\pi_i\,t_{ci}|$ als Tangente der Polarcurve $(\pi)^2$.

Zugleich erkennt man $|\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}_i', c_a\,c_b|$ als Diagonalen eines Vierseits aus den Seitenparen $|\mathfrak{a}_b'\,c_a, \mathfrak{a}_b'\,c_b; \mathfrak{b}_a'\,c_a, \mathfrak{b}_a'\,c_b$, welche $|\mathfrak{a}_b', \mathfrak{b}_a'|$ in $.\mathfrak{P}, T_{ab}.$ partheilig messen, wobei $|t_a . T_{ab} . t_b|$ als Planpunkt von $|\mathfrak{t}_{ab}|$ gilt. Ein Bindestrahl $|T_{ab}T'_{ab}|$ bezeichnet durch die Theilpunkte $.c_a.c_b.$ 2 Polarcurven $(\pi, \pi')^2$, welche die 4 Scheitel $.ABC\pi_1.$ gemein haben,

Jedem Planpunkt $.T_{ab}.$ entspricht ein Regelstrahl $|\mathfrak{t}_{ab}|$ zu $|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}|$, welcher durch $|\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{a}'_b|t_{ab}|b'_a\,.\,\mathfrak{b}|$ zwei Strahlen $|B\mathfrak{a}'_a, A\mathfrak{b}'_a = b'\,a'|$ der Polebenen $.T_{ab}[a, b]$ anzeigt. Die Regelstrahlen aus einem Planpunkt $.C$, zu $|a, b, b'_b, a'_a|$ bestimmen die Polebene von $.C.$, welche auf $|t_{ab}|$ den Pol $.\mathfrak{P}.$ der Plancurve bezeichnet und deren Planspur die Tangente zu $.C.$ dieser Curve ist.

Jeder Strahl $|t_{ab}|$ des Planbüschels $.T_{ab}.$ bezeichnet auf $|AC, BC|$ die Richtpunkte $.c, c_a.$ zweier Ebenenpare durch $|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}'|$, deren Bindestrahlen $|\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'|$ den Planpunkt $.D.$ gemein haben. Die Ebene $[\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}']$ geht durch $.\mathfrak{P}.$, weil die Strahlenpare $.\mathfrak{a}'_b\,c_a, \mathfrak{b}'_a\,c_b$ einen Punkt von $|\mathfrak{d}'|$ und $\mathfrak{a}'\,c_b, \mathfrak{b}'\,c_a$ einen solchen von $|\mathfrak{d}|$ bestimmen. Mithin ist auch $[\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}']$ eine Polebene und $.D.$ ein Punkt der Polarcurve, welche das Regal $\|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\|^2$ mit dem Plan verbindet.

Gleich $|\mathfrak{t}_{ab}|$ findet die Kante $[\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'|\mathfrak{t}_{cd}|\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}']$ ihren Planpunkt $.T_{cd}.$ auf $|t_{ab}|$ im Binder der Planspuren $|t_c, t_d|$ jener Polebenen zu $.C, D.$ Analog $[\mathfrak{P}t_{ab}]$ geht durch $|\mathfrak{P}c_a|$ auch $[\mathfrak{P}t_{cb}] = [\mathfrak{t}_{cb}\,\mathfrak{t}_{ad}]$, denn $.c_a.$ ist Bindepunkt der Reihenpare $|T_{ab}\,T_{cd}, T_{bc}\,T_{ad}|$, weil er die kreuzweisen Scheitelstrahlen der Büschelpare $.AB, CD.$ verbindet.

So geht das bekannte Masszeichen des Polarkegels mit dem ein- und umschriebenen Vierseit der Polarcurve aus der Verbindung des Regales mit der Ebene hervor, ohne dass es nöthig wäre, die Massverhältnisse in Zahlen auszudrücken. Auch die Tangente der Polarcurve ergibt die Reliefbetrachtung ganz natürlich als Spur der Polebene, deren Pol der gemeinsame Planpunkt zweier Regalstrahlen ist. Mit der

Polarcurve, der Ordnungscurve des Parbundes, sind auch die Meridianflächen desselben angedeutet, deren eingehendere Behandlung einer folgenden Arbeit vorbehalten bleibt.

III. Dreibund.

Taf. II, Stab C.

Drei windschiefe Axen sind ihrer gegenseitigen Lage nach bestimmt durch den Plan einer Axe mit einem Regelstrahl und einen Bindestrahl des Reliefs zwischen den beiden übrigen Axen.

Zieht man im Plan der Axe $|a|$ und des Regelstrahles $|s|$ durch den Bindepunkt $|a\,.\,A\,.\,s|$ die Zweigleitung $|a'|$, so bestimmt dieselbe mit den Axen $|\mathfrak{b}\,,\,\mathfrak{c}|$ des Reliefs ein Regal, von welchem vorerst der gegebene Bindestrahl $|\mathfrak{s}'|$ ein erzeugender Strahl sei, indem dessen Planpunkt $.\,s'\,.$ die Richtung von $|a'|$ anzeigt. Die Ebenenpare $|\mathfrak{b}[a_i']\mathfrak{c}|$ des Zweigregales $\|\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\;a'\|^2$ messen $|a|$ partheilig.

Durchläuft der Plan $[a\,s]$ das Büschel $|a[\mathfrak{s}_i'],$ so bezeichnet die Regelschar $\|s\|$ eine Punktreihe $|A|$, welche sich mit den Partheilungen der Zweigregale zu Dreitheilungen von $|a|$ verbinden, indem zunächst jedem Punkt der Reihe $|A|$ eine Partheilung entspricht.

In dem Dreibund wird also durch die Strahlen des Stammregales $\|a\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\|$ und die Ebenenpare der Zweigregale $\|a'\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\|^2$ je auf der Axe des Plänebüschels ein dreitheiliger Masstab bezeichnet.

Nun bestimmt im Plan $[a\,s]$ jeder Strahl des Büschels $.\,A\,.$ vermöge seines Zweigregales auf $|a|$ eine Partheilung, jede von ihnen ergänzt der Nullpunkt $.\,A\,.$ zur Dreitheilung. Wie der eintheilige Masstab aus der Verbindung eines festen Strahles mit einem beweglichen entsteht, so der dreitheilige aus der Verbindung eines festen Nullpunktes mit einer veränderlichen Partheilung.

Stamm- und Zweigregale sind vertauschbar, daher kann auch jeder Punkt einer Zweigleitung als Nullpunkt einer Ebene gelten, welche durch jene und den Regelstrahl des Nullpunktes zu $|\mathfrak{b}, \mathfrak{c}|$ bestimmt ist, seine Nullebene heisst. Die Gesammtheit der Nullebenen, welche dasselbe Stammregal bedingt, bildet ein Nullsystem. Die Haupt- und Zweigleitungen des Nullsystemes machen einen linearen Strahlencomplex aus.

Taf. II, Stab R.

Eine Dreitheilung misst auch die Polarcurve auf einem Sekantenbüschel, wobei der Scheitel des letzteren als Nullpunkt dient; sowie die Tangentenpare aus einer Geraden auf einer Tangente eine Dreitheilung messen mit dem Bindepunkt der Geraden auf der die Theilung tragenden Tangente als Nullpunkt. Der Reliefbau des letzteren Planzeichens, bestehend aus einem Hüllkegel und einer Reliefaxe als Doppelgerade, wurde in dem Aufsatz über Plan- und Reliefcurven ausgeführt, wir beschränken uns desshalb an dieser Stelle auf den Reliefbau über dem Sekantenbüschel der Polarcurve.

In allgemeiner Anlage dieses Reliefbaues vermittelt die Polebene eines Regales, dessen Planspur die Polarcurve, den Verband der letzteren mit einem Ebenenbüschel, dessen Axe den Sekantenscheitel zum Planpunkt hat. Die Planspur der Polebene hat stets 2 Punkte mit der Polarcurve gemein, die Planpunkte zweier Pare von Regelstrahlen, deren Bindebenen die

Tangenten der Curve zu Planspuren, daher den Bindepunkt der letzteren zum Planpunkt ihres Bindestrahles haben, auf dem die Regalstrahlen sich parweise treffen. Für den Verband mit dem Ebenenbüschel hat jeder dieser 4 Regalstrahlen dieselbe Bedeutung, wir können desshalb einen von ihnen als Masszeichen für die übrigen ansehen.

Das Ebenenbüschel der Axe $|\mathfrak{c}|$ bezeichnet nun durch sein Spurenbüschel im Plan Punktepare der Polarcurve $(\pi)^2$, in der Polebene Doppelpunkte des Regalstrahles $|\mathfrak{b}|$, welche mit jenen Strahlenpare einer Regelfläche bestimmen. Solche messen die Axe des Ebenenbüschels $|\mathfrak{c}|$ partheilig, während der Bindepunkt der Axe mit der Polebene der Nullpunkt des dreitheiligen Massstabes auf dieser $|\mathfrak{c}|$ ist.

Die Axe $|\mathfrak{c}|$ ergänzt jedes Strahlenpar der neuen Regelfläche zu einem Trippel von Strahlen in jeder Büschelebene, desshalb möge die Fläche Triregal heissen, womit zugleich ihre Zugehörigkeit zum Dreibund angedeutet ist. In der That vermitteln die Strahlenpare des Triregals den Verband dreier Axen, von denen 2 in dem ursprünglichen Regalstrahle zusammenfallen. Unbeschadet der Allgemeinheit des Verbandes kann dessen Nullpunkt, somit gleichzeitig der Planpunkt von $|\mathfrak{c}|$, in die Planspur der Polebene verlegt werden. Die Punktreihe, welche das Ebenenbüschel um $|\mathfrak{c}|$ auf der Planspur der Polebene bezeichnet, ersetzt nach Verlegung des Nullpunktes eine Punktreihe in der Planspur irgend einer anderen Polebene durch die ursprüngliche Regalaxe $|\mathfrak{b}|$.

Auf der Polarcurve $(\pi)^2$ sei nämlich $.B.$ Planpunkt der Doppelaxe $|\mathfrak{b}|$; in der Planspur $|\mu|$ der Polebene liege der Planpunkt $.\,C\,.$ der Axe $|\mathbf{c}|$ des Ebenenbüschels. $[\delta\ \mathfrak{d}_c]$ stellt eine beliebige Ebene durch deren Planspur $|\delta|$ und Bindepunkt $.\,\mathfrak{d}_c\,.$ mit $|\mathbf{c}|$ dar. Dann ist $.\,\mathfrak{d}_c\,.$ Nullpunkt der Dreiteilungen, welche die Strahlentrippel des Triregals $\|\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\pi^2)^3$ auf den Strahlen des Büschels $[\mathfrak{d}_c\,\delta]$ messen, das diese Ebene mit dem Zeigebenenbüschel $|\mathbf{c}\,[\pi_i]$ verbindet. Die Bindecurve der Ebene mit dem Triregal muss also dritter Ordnung sein, somit auch diese Fläche selbst.

Das Zeigebüschel $|\mathbf{c}\,[\pi_i]$ misst durch sein Tangentebenenpar den reellen Theil der Doppelreihe $|\mathbf{b}|$. Jeder durch einen reellen $.\,\mathfrak{b}\,.$ dieser Reihe gelegte Strahl $|\mathbf{s}|$ verbindet 3 Berührebenen des Triregals, welche durch das in $.\,\mathfrak{b}\,.$ verbundene Strahlenpar dieser Fläche und durch den Regalstrahl der Polebene $[\mathbf{b}\ s\text{-}id]$ gezeigt werden. Das Triregal ist folglich eine Fläche 3. Classe.

Die Tangenten $|\pi_i|$ der Polarcurve bestimmen mit $|\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}|$ je ein Tangentregal, von welchem $|B\ C|$ eine gemeinsame Planaxe ist und mit irgend einem Regelstrahl zu $|\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}|$ aus einem Punkt der Tangente $|\pi_i|$ die Berührebenen zu den Punkten des Triregals auf $|\pi_i\,b_i|$ leitet.

Die Berührebenen zweier $.\,\mathfrak{d}_1\,,\,\mathfrak{d}_2\,.$ der Plancurve $(\delta)^3$ auf den Strahlen $|\mathbf{s}_1\,,\,\mathbf{s}_2|$ des Triregals $\|\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\pi^2)^3$ haben $|\mathbf{t}|$ gemein, welche mit $|\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}|$ ein Regal bestimmt, das $|\mathbf{s}_1\,,\,\mathbf{s}_2|$ zu Strahlen hat. Die Plancurve $(B\ \pi_1\ \pi_2\ C\ T.)^2$ dieses Astregales $\|\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{t}\|^2$ bezeichnet auf $(\pi)^2$ den $.\,\pi_3\,.$ eines Strahles $|\mathbf{s}_3|$, welcher dasselbe mit dem Triregal verbindet, indem er mit $|\mathbf{t}|$ eine Berührebene des Triregals bildet. Irgend ein Strahl des Tangentregals $\|\mathbf{b}\,\mathbf{c}\ \mathrm{tg}\ \pi_3\|^2$ bezeichnet nämlich durch seine Bindebene mit dem Leitpunkt $|\pi_3\ T\,.\ \mu_3\,.\ B\ C|$ auf $|\mathbf{s}_2|$ den $.\,\mathfrak{d}_3\,.$ Die Bindestrahlen der Berührebenen $|\mathfrak{t}\,[\mathfrak{d}_1\,,\mathfrak{d}_2\,,\mathfrak{d}_3]$ mit $[\delta]$ sind 3 Tangenten der Bindecurve dieser Ebene mit $\|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\pi^2)^3$ und treffen sich in $|\mathfrak{t}\,.\,t\,.\,\delta]$. Jene Curve wird daher 3. Classe sein.

Sind $.\,\mathfrak{d}_1\,,\mathfrak{d}_2\,,\mathfrak{d}_i\,.$ 3 Punkte einer Trippelcurve $(\delta)^3$ in $[\delta]$; $|d_i = \mathfrak{d}_1\,\mathfrak{d}_i|$, so sind $|\mathfrak{b}\,,\mathfrak{c}\,,d_i|$ durch die Triregalstrahlen $|\mathfrak{s}_1\,,\mathfrak{s}_i|$ zu einem Regal verbunden, dessen Plancurve mit $(\pi)^2$ ausser $.\,B\,,\pi_1\,\pi_1\,.$ noch $.\,\pi_j\,.$ gemein hat. Dieser bezeichnet zugleich den Strahl des Triregals, der den dritten auf $|d_i|$ liegenden Punkt dieser Fläche, folglich auch der Trippelcurve enthält. Die Sehnenpare der planaren Trippelcurve treffen sich somit auf dieser selbst.

Jede der beiden Berührebenen $|\mathfrak{t}\,[\mathfrak{d}_1\,,\mathfrak{d}_2]$ hat mit $\|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\pi^2)^3$ nebst einem Strahle $|\mathfrak{s}_1\,,\mathfrak{s}_2|$ noch je eine Polarcurve $(\pi_1'\,,\pi_2')^2$ gemein, denn jede durch einen Strahl $|\mathfrak{s}_i|$ der Fläche gelegte Gerade hat im Allgemeinen noch ein Punktepar mit dem Triregal gemein. Die Strahlenpare der Bindekegel $.\,\mathfrak{d}_1(\pi_2')^2,\,\mathfrak{d}_2(\pi_2')^2$ in jeder Zeigebene des Büschels $|\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{d}_2\,[\mathfrak{t}_i]$ sind Sehnenpare der Trippelcurve, welche die Zeigebene mit dem Triregal verbindet; der Bindepunkt solcher Sehnenpare liegt auf der Trippelcurve der Zeigebene und zugleich auf der Bindecurve (ξ) der Kegelflächen. Jede Zeigebene enthält somit 3 Punkte der Bindecurve (ξ), diese muss daher eine Reliefcurve 3. Ordnung sein und kann als Ordnungscurve des Triregals dienen.

Die Polarcurve $(\pi_i')^2$ geht zunächst durch :

$$.\,\mathfrak{d}_i\,.\,;\ |\mathfrak{s}_i\,.\,\mathfrak{b}_i\,.\,\mathfrak{b}|\ ;\ |B\,C\,.\,\mu_i\,|T\pi_i|\pi_{i\mathfrak{f}}'\,.\,\pi^2).$$

Das Tangentregal zu $|\mathfrak{d}_i\,\mathfrak{b}_i = \mathfrak{s}_i|$ bezeichnet durch seinen Bindestrahl mit dem Tangentregal eines zweiten Punktes von $(\pi_i')^2$ auf dessen Tangente einen Richtpunkt der Tangente $|\boldsymbol{\mathfrak{t}}_i'|$ zu $.\mathfrak{d}_i.$ Die Zeigebene $[\boldsymbol{\mathfrak{t}}_1\mathfrak{d}_2]$ bestimmt auf $(\pi)^2$ den Richtpunkt für den Kegelstrahl $|\boldsymbol{\mathfrak{t}}_1''|$, welchem auf $.\mathfrak{d}_2$ $(\pi_1)^2$ der Bindestrahl $|\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{d}_1|$ entspricht. $|\boldsymbol{\mathfrak{t}}_1''|$ wird daher eine Tangente zu $.\mathfrak{d}_1.$ auf $(\xi)^3$ und $[\boldsymbol{\mathfrak{t}}_1''\,\boldsymbol{\mathfrak{t}}_1']$ eine Schmiegebene dieser Reliefcurve sein, indem der Zeiger von $.\mathfrak{d}_1.$ auf die Axe $|\mathrm{d}_2\,\mathfrak{d}_1|$ des Zeigebenenbüschels fällt.

Die dritte Berührebene des Triregals $\|\boldsymbol{\mathfrak{b}}\,\boldsymbol{\mathfrak{c}}\,\pi^2)^3$ durch $|\boldsymbol{\mathfrak{t}}|$ enthält in $|\boldsymbol{\mathfrak{s}}_3\,.\,\mathfrak{t}_3\,.\,\boldsymbol{\mathfrak{t}}|$ einen Bindepunkt dieser Axe mit dem Triregal. Zwei weitere Bindepunkte von $|\boldsymbol{\mathfrak{t}}|$ bezeichnen $|\boldsymbol{\mathfrak{s}}_1\,.\,\mathfrak{t}_1\,|\boldsymbol{\mathfrak{t}}|\,\mathfrak{t}_2\,.\,\boldsymbol{\mathfrak{s}}_2|$. Durch $.\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_3.$ geht $(\pi_2')^2$, durch $.\mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3.$ dagegen $(\pi_1')^2$. In $.\mathfrak{t}_3.$ treffen entsprechende Kegelstrahlen derselben Zeigebene zusammen; dieser muss folglich auf $(\xi)^3$ liegen. Den Kegelstrahlen $|\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{t}_2, \mathfrak{d}_2\,\mathfrak{t}_1|$ dagegen entsprechen $|\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}_1\,\mathfrak{b}_2|$, folglich liegen $.\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2.$ auf $(\xi)^3$. Die Plancurve jedes der beiden Kegel $.\mathfrak{d}_1\,(\pi_2')^2, \mathfrak{d}_2\,(\pi_1')^2$ hat mit $(\pi)^2$ ausser $.\pi_{22}', \pi_{11}'.$ im Allgemeinen noch 3 Punkte gemein. Trifft dies bei der einen Plancurve ein, so gehören die 3 entsprechenden Planpunkte der Kegelstrahlen dem Triregal an, müssen daher auf der Trippelcurve $(\xi)^3$ liegen, folglich zugleich Planpunkte von Strahlen des andern Kegels, sowie Punkte von dessen Plancurve sein. Die polare Plancurve des Triregals ist also mit den Plancurven der Zeigekegelpare ihrer Trippelcurven im Allgemeinen durch 3 Scheitel verbunden. Im Uebrigen zeigt jede durch einen Strahl des Triregals und eine der Kegelspitzen $.\mathfrak{d}_{1,2}.$ gelegte Ebene auf jenem durch die Bindestrahlen des Kegels das Punktepar von $(\xi)^3$, welches für die betreffende Zeigebene die Kegelspitze zum Trippel ergänzt.

Jede der Plancurven $(\pi_i' = \mathfrak{b}_i\,\mathfrak{d}_i\,\mu_i\,\pi_{ii}\,\mathfrak{t}_3)^2$ enthält 5

Punkte zur Bestimmung des Triregals. Durch $.\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2.$ ist nämlich $|\mathfrak{b}|$ gegeben. Jeder Punkt $.B.$ dieser Geraden, ausgenommen $.\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2.$, bestimmt mit $(\pi_1')^2$ eine Kegelfläche, welche auf der Ebene von $(\pi_1')^2$ eine Polarcurve bezeichnet, die mit $(\pi_2')^2$ ausser $.\mathfrak{b}_2, \mathfrak{t}_3.$ im Allgemeinen noch 2 Punkte gemein hat. Trifft dieser Fall ein, so kann jeder der beiden Kegelstrahlen $|\mu_1 B \mu_2|$ durch die so bezeichneten Bindepunkte $.\mu_2.$ ein Büschel von Plänen anzeigen. Ein durch $|\mu_1 B \mu_2|$ gelegter Plan bezeichnet durch seine Spuren mit $[\pi_1', \pi_2']$ auf diesen Curven $.\pi_{11}, \pi_{22}.$, auf $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}_2 \mathfrak{d}_2|$ die $.\pi_1, \pi_2.$ Durch $.B \pi_1 \pi_2 \pi_{11} \pi_{22}.$ ist $(\pi)^2$ bestimmt.

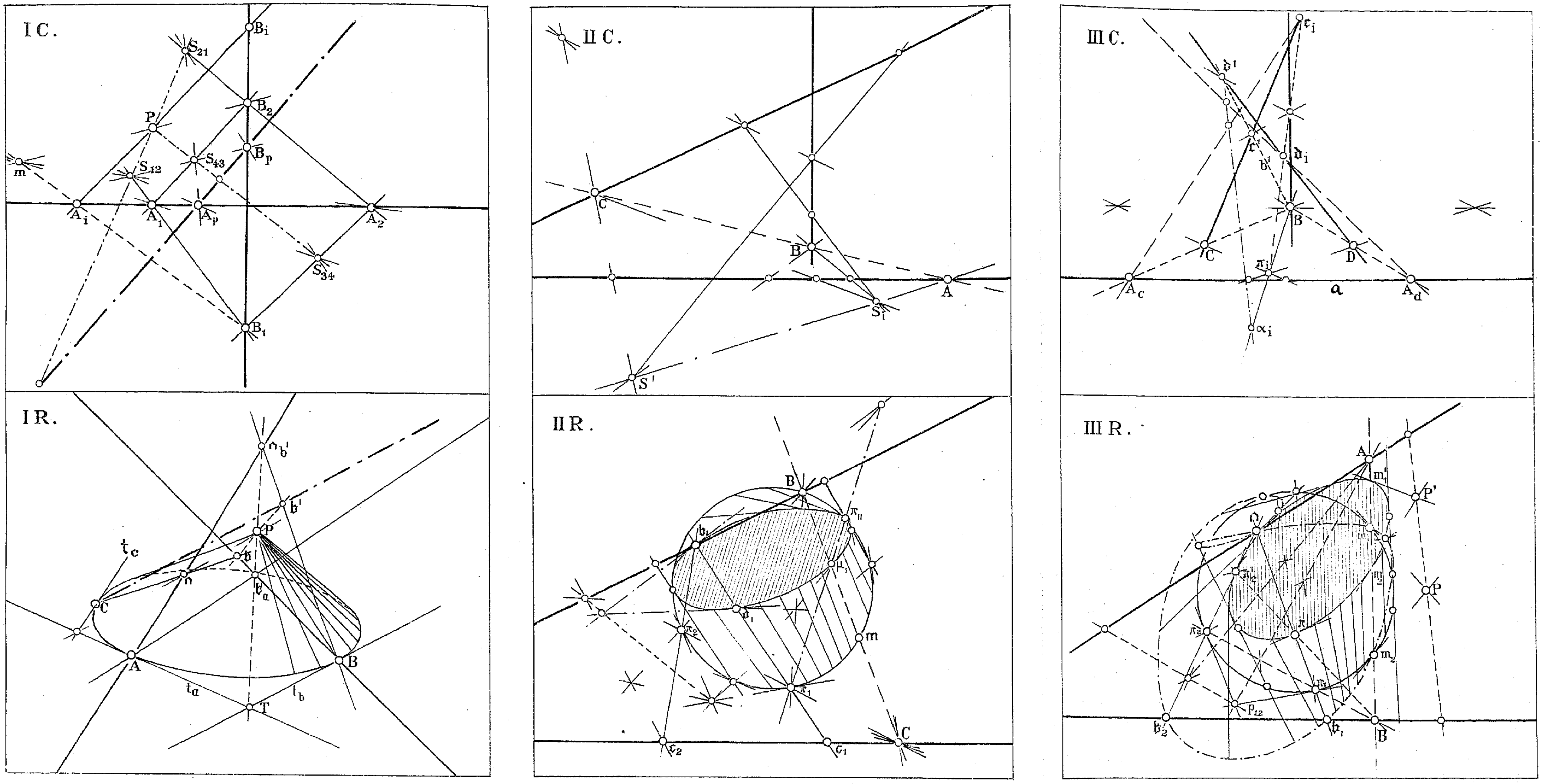
Die Polarcurven $(\pi_1'.\pi_2')^2$ bezeichnen mit $.\mathfrak{d}_{1,2}.$ die Trippelcurve $(\xi)^3$. Diese verbindet alle Triregale, welche bedingt sind durch die Strahlentrippel $|\mathfrak{d}_1 \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}_2 \mathfrak{b}_2, \mu_1 \mu_2|$, indem jedes Trippel eine Axenschar (c) und jede Punktreihe $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2|$ 2 Scharen durch $|\mathfrak{d}_1 \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}_2 \mathfrak{b}_2|$ verbundener Strahlentrippel anzeigt.

Nun ist $.\mathfrak{t}_3.$ ein Bindepunkt von $(\pi_1', \pi_2')^2$; durch diesen geht daher stets ein dritter Bindestrahl $|B \mu_1 \mu_2|$, welcher in $.\mathfrak{t}_3.$ 2 zusammenfallende $.\mu_1, \mu_2.$ enthält. Für $|B \mathfrak{t}_3|$ zerfällt $(\pi)^2$ in das Strahlenpar $|B \mathfrak{t}_1, B \mathfrak{t}_2|$, die Axenschar $|\mathfrak{c}|_{\mathfrak{t}}$ bezeichnet auf $|\mathfrak{d}_1 \mathfrak{t}_1, \mathfrak{d}_2 \mathfrak{t}_2|$ die Scheitelreihen der Strahlbüschel, welche mit $|\mathfrak{b}|$ das Ebenenpar $|\mathfrak{b}[\mathfrak{d}_1 \mathfrak{t}_1, \mathfrak{d}_2 \mathfrak{t}_2]$ bilden. Dieses ergänzt mit den Ebenenbüscheln der Axenschar $|c|_{\mathfrak{t}}$ sämmtliche Pare von Triregalen, welche durch die Strahlenpare $|\mu_1 B \mu_2|$ und die Axenscharen $|c|$ bedingt sind, je zu einem Trippel von Flächen, das die Ordnungscurve $(\xi)^3$ verbindet, indem $.\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{b}_1.\mathfrak{b}_2.$ 4 Punkte derselben sind und diese zu dreien in den Ebenen $|\mathfrak{b}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]$ liegen.

Parbund. Dreibund. Vierbund.

Complexe.

Regale.



Fasst man das Axenpar $|\mathfrak{b}, \mathfrak{c}|$ und die 3 Bindestrahlen $|B\,C = \mu\,, \mathfrak{s}_1\,, \mathfrak{s}_2|$ ins Auge, so bezeichnen $|\mathfrak{b}\,, \mathfrak{s}_1\,, \mathfrak{s}_2|$ auf jeder Ebene des Büschels $|\mu|$ 3 Punkte $.\,B_1\;\pi_1\,, \pi_2\,.$, welche mit einem Strahle durch $.\,B\,.$ in diesem Plan ein Büschel Polarcurven anzeigen.

Jeder der 3 gegebenen Bindestrahlen kann als Planaxe $|\mu|$ aufgefasst werden. Lässt man eine Ebene des Büschels $|\mathfrak{b}|$ als Leitebene für die Tangenten zu $.\,B\,.$ gelten, so dient das Axenpar $|\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}|$ mit den 3 Bindestrahlen in dreifachem Sinn als Masszeichen je eines Büschels von Triregalen.

Die Ordnungscurve $(\xi)^3$ zeigt unmittelbarer ein Kegel $.\,\mathfrak{c}\,(\pi)^2$ durch seine Strahlenpare in den Ebenen des Büschels $|\mathfrak{c}|$. Diese Auffassungsweise soll im nächsten Abschnitt ausführlicher besprochen werden.

IV. Vierbund.

Taf. III. Stab C.

Vier freie (nicht demselben Regal zugehörige), windschiefe Axen sind ihrer gegenseitigen Lage nach bestimmt durch den Plan einer Axe und das Regal der 3 übrigen, indem beide Flächen eine Polarcurve verbindet.

Die Zeigebenenpare dieses Regales messen auf der Planaxe eine Partheilung. Eine zweite Partheilung vertreten auf derselben die 2 Nullpunkte, welche die Bindestrahlen zwischen 2 Paren von Planpunkten der 3 Reliefaxen auf der Planaxe anzeigen. Da jene beiden Nullpunkte dem Ebenenpar des Regals angehören, welches den Regalstrahl durch den gemeinsamen Planpunkt der Bindestrahlen bestimmt, so verbinden die beiden Nullpunkte die beiden Partheilungen der Planaxe zu einer Viertheilung derselben.

Die Planaxe $|a|$ bildet nämlich mit jedem Reliefaxenpar $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ ein Nullsystem. Die Bindestrahlen $|B\,C\,,B\,D|$ bezeichnen auf $|a|$ die Nullpunkte $.\,A_c\,,A_d\,.$ für jedes dieser Systeme.

$$.\,\alpha_i\,[A_c\,,[\mathfrak{c}|\mathfrak{c}_i'[\mathfrak{b}]\,\mathfrak{d}_i'|\mathfrak{d}]\,,A_d]\,\alpha_i$$

stellen die Nullebenen des Planpunktes $.\,\alpha_i\,.$ dar. Durchläuft $.\,\alpha_i\,.$ die Planspur $|\beta_i|$ von $[\mathfrak{b}\,\alpha_i]$, welche $|\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{c}_i\,[\mathfrak{b}\,\alpha_i]\,\mathfrak{d}_i\,.\,\mathfrak{d}|$ anzeigt, so erzeugen die Bindestrahlen der Nullebenen $.\,\alpha_i\,[A_c\,\mathfrak{c}_i\,,A_d\,\mathfrak{d}_i]$ eine Strahlenschar des Regales $\|\beta_i\,,A_c\mathfrak{c}\,.\,A_d\,\mathfrak{d}_i\|^2$, von welchem $|a|$ ein Strahl und das mit $|\mathfrak{b}|$ durch $.\,B\,,|\mathfrak{c}_i\,\mathfrak{d}_i\,.\,B_i\,.\,\mathfrak{c}|$ verbunden ist. $|A_c\,\mathfrak{c}_i\,,A_d\,\mathfrak{d}_i|$ liegen in $.\,B\,[\mathfrak{c}\,,\mathfrak{d}]$, werden daher durch denselben Regelstrahl $|\mathfrak{b}'|$ zu $.\,B\,.$ verbunden, wie die beiden Axen $|\mathfrak{c}\,,\mathfrak{d}|$; dieser ist mithin der feste gemeinsame Regelstrahl des Stammregales $\|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\|^3$ und des Zweigregales $\|\beta_i\,,A_c\,\mathfrak{c}_i\,,A_d\,\mathfrak{d}_i\|^2$, während $|\mathfrak{c}_i\,\mathfrak{d}_i|$ einen beweglichen Bindestrahl beider Regale darstellt, denn diesen führt das Planspurenbüschel $|\beta_i|$ über das Stammregal hin.

Ist $.\,\pi_j\,.$ der Planpunkt von $|\mathfrak{c}_i\,\mathfrak{d}_i = \mathfrak{s}_i|$, so misst das Ebenenpar $|\mathfrak{c}\,[\pi_j]\,\mathfrak{d}|$ auf $|a|$ die eine Partheilung. Das Ebenenpar $|A_c\,\mathfrak{c}_i\,[\alpha_i]\,A_d\,\mathfrak{d}_i|$ misst eine zweite Partheilung, deren Strecken für denselben Plan $[a\,B]$ alle in $|A_c\,A_d|$ zusammenfallen, dagegen mit dem Strahlenpar $|BC\,,BD|$ des Stammregales sich verändern, wenn der Plan $|a\,B|$ das Ebenenbüschel um die Planaxe $|a|$ durchläuft. Die beiden Partheilungen, von denen eine jedem Plan, die andere dem Plänebüschel entspricht, bilden den viertheiligen Masstab der Planaxe.

Hat $|a|$ mit $(\pi)^2$ ein Punktepar $.\,A_1\,,A_2\,.$ gemein, so verbindet jedes Zweigregal mit dem Stammregal ein gemeinsames Axenpar, welches mit $|\mathfrak{b}, \mathfrak{s}_i|$ das Spurenvierseit der Zweigregale auf dem Stammregal schliesst.

Die Strahlenscharen aller Zweigregale, welche durch den Vierbund der Planaxen mit den Axentrippeln der Stammregale bedingt sind, machen ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe aus, dessen Träger, die Planaxen und die Axenscharen der Stammregale, ein Complexbüschel darstellen.

Tafel III. Stab R.

Eine Polarcurve $(\pi)^2$ und ein Spurenpar $|s_a\, s_b|$ ihres Planes messen jede Gerade desselben viertheilig. Ein Axenpar $|\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}|$ bezeichnet also durch seine Planpunkte $.A, B.$ auf $|s_a\, s_b|$ einen viertheiligen Planstrahl $|m|$, auf welchem indessen die Theilpunkte der Polarcurve fehlen können.

Dem Bindepunkt $|S_a \,.\, n_i \,.\, S_b|$ entspricht ein Regelstrahl $|\mathfrak{n}_i|$, dessen Bindepunkte $|\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a}_i|\mathfrak{n}_i|b_i \,.\, \mathfrak{b}|$ je ein Strahlenpar $|\mathfrak{s}_{b1}, \mathfrak{s}_{b2}; \mathfrak{s}_{a1}, \mathfrak{s}_{a2}|$ mit $|s_b \,.\, \pi_{b1}, \pi_{b2}\, (\pi)^2 \pi_{a1}, \pi_{a2} \,.\, s_a|$ bezeichnen. Dieses Strahlenquadrupel misst $|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}|$ viertheilig, indem $.\,\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i\,.$ je als Doppelpunkte gelten und daher die Axen selbst als Doppelaxen bezeichnen. Die Regelfläche, welche die Polarcurve mit dem Axenpar verbindet, gehört also dem Vierbund an; wir nennen sie: Quadrigal.

Ist $|n|$ eine freie Gerade des Planes, die an $.A, B.$ vorbeigeht, so vermittelt das Regal $\|n, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\|^2$ den Strahlverband. Doch wird man sich zweckmässiger auf ein Ebenenpar $[\mathfrak{a}\, \mathfrak{s}_i, \mathfrak{b}\, \mathfrak{s}_i]$ stützen, indem $|\mathfrak{s}_i|$ einen Punkt von $(\pi)^2$ mit dem Axenpar verbindet.

Die ebene Bindecurve des Quadrigals ist 4. Ordnung und besitzt im Allgemeinen 3 Doppelpunkte, von denen je einer auf jeder Axe und der dritte auf dem Bindestrahl ihrer Planpunkte liegt.

Das Quadrigal und seine ebene Bindecurve sind 4. Classe, denn die Plancurve eines Regales, das eine freie Reliefgerade mit dem Axenpar verbindet, hat mit der polaren Leitcurve $(\pi)^2$ 4 Punkte gemein und durch jeden Bindestrahl zweier Berührebenen gehen 4 Strahlen der Fläche, deren Bindebenen mit diesem Bindestrahl Berührebenen des Quadrigales sind. Diese Berührebenen werden, wie früher, mit Hülfe von Tangentregalen bestimmt. In dem Planstrahl $|A\,B = m|$ fallen 2 Strahlen $|s_a\,,\,s_b|$ zusammen, mithin auch das Strahlenquadrupel, welches durch die reellen oder imaginären Bindepunkte $(\pi^2 . m_a \,. m_b \,. m)$ angezeigt ist. Ein Ebenenbüschel durch $|m|$ ist mit dem Quadrigal doppelt verbunden und misst dasselbe durch Polarcurvenpare.

Der Zeigerkegel $. \mathfrak{a}_1\, (\pi)^2$, der mit dem Quadrigal durch ein Strahlenpar $|\mathbf{s}_1\,\mathbf{s}_2|$ verbunden ist, hat mit dieser Fläche noch eine Ordnungscurve $(\omega)^4$ gemein.

Das Ebenenbüschel $|\mathbf{a}|$ zeigt nämlich auf der Leitcurve $(\pi)^2$ verbundene Strahlenpare des Kegels und des Quadrigales an; das 2. Par Bindepunkte jener 4 Strahlen gehört der Ordnungscurve $(\omega)^4$ an und ergänzt jeweilen den Doppelpunkt $. \mathfrak{a} .$ zum Quadrupel, das der betreffenden Büschelebene zukommt. Auf $(\pi)^2$ liegen im Allgemeinen 4 Punkte von $(\omega)^4$: die Berührpunkte des Tangentenpares aus $. A .$ und das Bindepar des Planstrahles $|A\,B|$.

In jeder andern Ebene des Büschels $|A\,B|$ bezeichnet sowohl das Quadrigal als der Zeigerkegel eine Polarcurve; beide Curven haben die Bindepunkte auf $|\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2|$ gemein; das übrige Par gemeinsamer Punkte dieser Curven bildet mit dem allen Ebenen des Büschels gemeinsamen Punktepar der Axe $|AB|$ das Quadrupel, das die Ordnungscurve $(\omega)^4$ mit der betreffenden Büschelebene verbindet.

Der Pol $.p_{12}.$ der Sehne $|\pi_1 \pi_2|$ bestimmt nämlich mit $|a|$ die gemeinsame Polarebene $[\mathfrak{a}\, p_{12}]$ des Quadrigals und des Kegels, welcher ein durch die Spitze $.a.$ gehender gemeinsamer Polarstrahl $|\mathfrak{p}_a|$ entspricht. Von den Ebenen des Polarbüschels $|\mathfrak{p}_a|$ ist $[\mathfrak{s}_1\, \mathfrak{s}_2]$ fest. Jede der übrigen Ebenen bezeichnet im Allgemeinen ein gemeinsames Punktepar der Polarcurven von Quadrigal und Kegel in den Ebenen des Büschels $|m|$. Insbesondere enthalten die Berührebenen $|\mathfrak{a}[\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2]$ noch die Kegelstrahlen $|\mathfrak{s}_{1t}, \mathfrak{s}_{2t}|$, welche mit $|\mathfrak{p}_a|$ in $.a.$ zusammentreffend, in einer Ebene des Parbüschels $|\mathfrak{p}_a|$ liegen und das Tangentenpar des Doppelpunktes $.a.$ darstellen.

Die Quadrigalstrahlen, welche den Berührpunkten des Tangentenpares aus $.B.$ an $(\pi)^2$ entsprechen, bezeichnen auf $|\mathfrak{a}|$ die Grenzpunkte der Strecke $|a|$, welche Zeigerkegel mit Ordnungscurven $(\omega)^4$ enthält, deren Doppelpunkte ein reelles Tangentenpar besitzen. Ausserhalb jener Strecke sind die Spitzen der Zeigerkegel von der Bindecurve (ω) isolirt.

Das Regal, welches den Planstrahl $|A\ B = m|$ mit einem Par Quadrigalstrahlen $|\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_3|$ verbindet, besitzt einen Polarstrahl $|\mathfrak{p}_i|$ zu $|m|$. Hält man $|m\,.\,m_i\,.\,\pi_1\, \pi_3|$ fest, so durchläuft der Planpunkt $.p_i.$ des Polarstrahles die Polare $|m_p|$ zu $.m_i.$ und dieser selbst beschreibt das Polarregal $\|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\, m_p\|^2$. Alle Polarregale, welche der Punktreihe $|m_i|$ entsprechen, werden durch das Spurenvierseit $|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\, m\, p_m|$ verbunden, wobei $|\mathfrak{p}_m|$ durch den Pol $.P.$ von $|m|$ zu $(\pi)^2$ angezeigt ist, als deren Planpunkt.

Vier Bindestrahlen eines windschiefen Axenpares bedeuten in sechsfacher Verbindung ein Par Gegenpolaren und ein Strahlenpar. In jeder Ebene durch eine der Gegenpolaren bezeichnet die andere nebst dem Strahlenpar ein Büschel Polarcurven.

Folglich ist ein windschiefes Axenpar mit 4 Bindestrahlen in 12fachem Sinn ein Masszeichen für Büschel von Quadrigalen.

Durch die polare Leitcurve begründet und durch Regale fortgepflanzt, findet die Polarbeziehung zwischen den Paren der Bindestrahlen auch beim Triregal statt, welches ja überhaupt als Specialform des Quadrigals aufgefasst werden kann. Doch stellt sich die Entwicklung der Gestalten deutlicher dar, wenn man wahrnimmt, wie die einfachen Verbände sich stufenweise vervielfältigen.

V. Fünfbund.

Fünf freie, windschiefe Axen werden verbunden durch die Polarcurve, welche das Regal aus 3 Axen auf dem Plan einer 4. bezeichnet, indem diese Curve zugleich mit der 5. und einer Regalaxe ein Triregal bestimmt.

Die Ebenenpare durch die beiden Regalaxen, welche dem Triregal fremd bleiben, messen auf der Planaxe eine Partheilung. Die Polebenentrippel durch die Bindaxe des Regales mit dem Triregal messen auf jener Planaxe eine Dreitheilung mit festem Nullpunkt in der das Triregal vermittelnden Polebene. Die beiderlei bewegliche Ebenenpare verbindende Theilung der Polarcurve bezeichnet das Planspurenbüschel, welches die Erzeugung des Triregales leitet.

Im Fünfbund bezeichnet also der Strahlverband von 4 Reliefaxen auf der Planaxe einen 5theiligen Masstab mit festem Nullpunkt.

Jeden $.A.$ der Planaxe $|a|$ verbinden 4 Regelstrahlen $|\mathfrak{s}_1 \ldots _4|$ mit den Axenparen $\begin{vmatrix}\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}, \mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{d}, \mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\end{vmatrix}$, bezeichnen dadurch 2 Par Zweigregale, von welchen jedes Par ausser $|a|$ noch eine Axe gemein hat. $\|\mathfrak{e}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\|^2$ ist ein Astregal und misst mit dem Stammregal $\|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\|^2$ auf jedem Strahle des Kegels $.A|a\,\mathfrak{s}_1 \ldots _4\|^2$ eine Viertheilung, welche der Nullpunkt $.A.$ zur Fünftheilung ergänzt.

Die Kegel $.A\,|a\,\mathfrak{s}_1 \ldots _4\|^2$ haben für den Complex des Fünfbundes dieselbe Bedeutung, wie die Nullebenen des Dreibundes, sie sind Nullkegel des Complexes zweiter Ordnung, sagen wir folgerichtig: des Polarcomplexes.

Hat $|\mathfrak{e}|$ mit dem Stammregal $\|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\|^2$ 2 Punkte gemein, so gehen durch dieselben 2 Astbinder $|\mathfrak{c}^*, \mathfrak{d}^*|$, welche mit $|\mathfrak{c}, \mathfrak{d}|$ das Spurenvierseit des Astregales auf dem Stammregal schliessen.

Haben die Zweigregale $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|\mathfrak{c}, \mathfrak{d}\|^2$ zwei Binder gemein, so müssen dieselben dem Stammregal $\|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\|^2$ angehören, mithin durch die Bindepunkte $|a\,.\,\pi_{a1}, \pi_{a2}\,.\,\pi^2)$ gehen. Fallen $|\mathfrak{c}, \mathfrak{d}|$ mit diesen Zweigbindern zusammen, indem dieselben auf $|a, \mathfrak{b}|$ die Pare $.A_1, A_2; B_1, B_2.$ bezeichnen, so vertreten $|A_1\,B_2, A_2\,B_1|$ für die Nullpunkte $.A_1, A_2.$ die Regelstrahlen zu $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,;\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$; die Complexkegel der genannten Nullpunkte zerfallen in das Ebenenpar $[aB_1, aB_2]$ und der Complex enthält das

Hauptvierflach $[A_1 B_1 B_2 A_2]$ mit den Hauptpunkten $. A_1 A_2, B_1 B_2 .$ und der Nebenaxe $|\mathbf{e}|$.

Jeder Hauptpunkt bestimmt mit einem Par Nullpunkten auf $|\mathbf{e}|$ zwei Strahlen ihrer Complexkegel und verbindet dieselben, daher muss die Bindecurve $(\xi)^3$ dieser Kegel durch alle Hauptpunkte gehen und diese 4 Scheitel für das Büschel Bindecurven des tetraedralen Polarcomplexes sein.

Ist $|A_1 E_i . e_i [B_1 B_2 A_2] e_0 . e|$, so verbindet eine Polarcurve $(B_1 B_2 A_2 e_i e_0)^2$ sämmtliche Complexkegel des Nullstrahles $|A_1 E_i|$.

Das Ebenenbüschel um eine freie Axe $|\mathbf{c}|$ bezeichnet auf den beiden Doppelaxen eines Quadrigales $|\mathbf{a}\,\mathbf{b}|$ die Richtpunkte einer Regelschar. Irgend ein Strahl derselben bestimmt mit einer Doppelaxe die Nullebene eines Quintregales und das Ebenenbüschel durch $|\mathbf{c}|$ bezeichnet auf einer Quadrupelcurve $(\omega)^4$ und $|\mathbf{a}|$ die Richtpunkte der Strahlenquadrupel, welche $|\mathbf{c}|$ selbst zum Quintupel ergänzt. Wie die Erzeugung ist auch die Behandlung des Quintregales derjenigen der früheren Vielregale analog.

VI. Sechsbund.

Sechs freie, windschiefe Axen werden verbunden durch die Polarcurve, welche das Regal aus 3 Axen auf dem Plan einer 4. bezeichnet, indem diese Curve zugleich mit den beiden übrigen Axen ein Quadrigal bestimmt.

Die Ebenenpare durch 2 Regalaxen messen auf der Planaxe eine Partheilung. Die Polebenenquadrupel durch die dritte Regalaxe und die Theilpunkte der Zeigebenenpare des Quadrigales auf der Plancurve messen auf der Planaxe eine Viertheilung. Dabei werden jedoch die Ebenenpare der Partheilung nur durch den einen oder andern Sekantenbüschel der zeigenden Planspuren einander zugeordnet, weil sonst jene Ebenenpare doppelt gezählt würden.

Im Sechsbund bezeichnet also der Strahlverband von 5 Reliefaxen auf der Planaxe einen 6theiligen Masstab.

In jedem Plane durch $|a|$ bezeichnen die Regelstrahlen aus dem Planpunkt $.B.$ der Axe $|\mathbf{b}|$ zu $|\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}|$ auf der Planaxe 4 Nullpunkte $.A\, c, d, e, f.$, welche parweise verbunden, mit jedem Strahle $|\beta_j|$ 4 Zweigregale durch $|\mathbf{c}, \mathbf{d}\,.\,\mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i[\mathbf{b}\beta_j]\mathfrak{e}_i, \mathfrak{f}_i\,.\,\mathbf{ef}|$ anzeigen. Diesen 4 Zweigregalen entsprechen in jedem $.\alpha_i.$ auf $|\beta_j|$ 4 Strahlen eines Strahlsystemes II. O., welches durch die 6 freien windschiefen Axen bestimmt ist. Bilden die 5 Reliefaxen $|\mathbf{b\,c\,d\,e\,f}|$ ein windschiefes 5Seit, so gehen durch dessen 5 Bindepunkte die Quadrupelcurven, welche die Complexkegelpare zu den Punkten der Planaxe verbinden.

Die Ebenenpare eines Regales bezeichnen mit den Bindepunkten seiner Strahlen auf dem Axenpar auf jeder Trippelcurve $(\xi)^3$ die Pare von Strahlentrippeln eines Sexregales, auf jeder Quadrupelcurve $(\omega)^4$ die Pare von Strahlenquadrupeln eines Octregales.

Der Massraum.

Regelflächen verbinden die Axencomplexe des Massraumes mit dessen Strahlenscharen.

Dabei misst jedes Ebenenpar Strecken auf allen Geraden, die weder in einer Parebene liegen noch die Bindaxe des Ebenenpares treffen.

Aus der Verbindung zweier Ebenenbüschel durch eine gemeinsame Leitaxe entsteht das allgemeine Masszeichen des Regales, die Parung einer Axenschar mit einer Strahlenschar.

Aus der Verbindung des Stammregales mit den Scharen der Zweigregale gehen lineare Complexe und Complexbüschel hervor; aus den Büscheln der Astregale ergeben sich Polarcomplexe und deren Büschel.

Die Verbindung des Regales mit der Ebene zeigt den Polarkegel als Kerngestalt, bestehend aus der Polarcurve und ihrem Pol, umhüllt von den Polebenen, deren Polort die Polarcurve ist und welche in der Ebene derselben die Tangenten der Curve bezeichnen.

Die Polebene eines Regales verbindet eine Polarcurve desselben mit einer freien Axe zum Triregal Das Regal durch 2 freie Axen verbindet diese mit einer Polarcurve zum Quadrigal.

Im Allgemeinen entstehen Vielregale aus einfachen und geparten Ebenenbüscheln, welche mit Curven verbunden sind. Das Ebenenbüschel und das Büschelpar des Regales sind mit einer Geraden verbunden und können als Urformen der Vielregale gelten.

Die ebene Bindecurve eines Vielregales zeigt auf jeder Geraden ihrer Ebene die Ordnung des Vielregales an.

Die konische Bindecurve des Vielregales ist eine Ordnungscurve dieser Fläche, wenn der Zeigerkegel mit derselben durch seine Leitcurve und so viele Strahlen verbunden ist, als die Ordnungszahl der letzteren anzeigt. Bei den unparen Vielregalen muss die Spitze des Zeigerkegels auf der Nullaxe liegen.

Regale übermitteln die Polarbeziehungen des Parbundes den Vielregalen der höheren Axenbünde und bedingen durch ihre Verbindung mit den Zeigerkegeln von den Biegungen zu Grunde liegender Polarcurven aus die Windungen der Reliefcurven.

Der **Flächenzusammenhang** der Linien begründet die Abhängigkeit ihrer Massverhältnisse und Gestaltung von den Lagenverhältnissen gegebener Axen.

In Wirklichkeit wird der Flächenzusammenhang dadurch erkannt, dass man durch stetige Bewegung nach mannigfaltigen Richtungen Linien in Flächen beschreibt; sei es mit dem Hobel, der Feile, dem Drehstahl; sei es mit dem Richtscheit, dem Modellirholz, dem Zeichenstift; sei es vermöge tastender Blickbewegung.

In der Vorstellung erzeugen darnach Linien durch stetige Bewegung die Flächen, indem sie entweder längs gegebener Linien derselben gleiten oder um Bindepunkte von Linienparen sich drehen. Dieselbe Leitlinie verbindet verschiedene Flächen zu einem Büschel und die Linien derselben Fläche können sich in einander verwandeln, indem sie von verschiedenen Zeigerflächen auf jener beschrieben werden.

Axen stellen die Einheit der leitenden, Strahlen diejenige der geleiteten Bewegungsrichtung dar.

Indem die Strahlenbewegung des Regales sich auf 3 windschiefe Axen stützt, verbindet dieselbe in einfachster Weise gleitende und drehende Bewegung, während zugleich die Strahlenpare seiner Polebenen sich wie die Schaufelkanten des Modellirholzes jeder Flächenwölbung anschmiegen.

Das räumliche Denken besteht überhaupt nicht bloss in dem Anschauen räumlicher Verhältnisse, wie die Projectionslehre ursprünglich voraussetzt, sondern dasselbe beruht vielmehr auf dem Gestalten im Raume. Denn die Vorstellung folgt nicht allein dem Linienzug der Zeichenfläche, sie gestaltet auch das Relief und bildet eben durch solche zusammenhängende, nach Massverhältnissen geregelte Reproduction früherer Einzelwahrnehmungen die Raumbegriffe aus, welche die Masszeichen andeuten. Bezeichnen, messen, verbinden sind also logische Verrichtungen mit Linien, wie: benennen, urtheilen, schliessen solche mit Worten sind.

Die Masszeichen dienen als Gleichnisse für allgemeine Linienverbindungen, wie die algebraischen Formeln als Gleichnisse von Zahlverbindungen gelten. Sichtbar oder gedacht, gewähren also die Masszeichen der Vorstellung eine bestimmte Grundlage von Linien, sie fördern die Verschmelzung räumlicher Vorstellungen zu stetigen Gesammtanschauungen, indem sie unmittelbar zur Wegleitung dienen, gleich der Erdkarte mit ihren Netzen der Zonen und Meridiane, der Flussadern und Höhenschichten.

Unabhängig von der physikalisch nur angenähert richtigen Hypothese geradliniger Lichtstrahlen, unabhängig von der physiologisch ungenauen Annahme eines einzigen, festen Blickpunktes, unabhängig von der sichtbaren Erscheinung der Linien überhaupt, fasst der Massraum, als Inbegriff der Masszeichen, die Verbindungen seiner Axen durch Strahlen und Curven systematisch zusammen, indem er durch seine Flächen jeder Axe ein bestimmtes Massverhältniss zutheilt.

Als stetiges Ganzes erscheint das Sehfeld vor dem leiblichen Auge; als stetiges Ganzes erfasst, vermöge geregelter Blickbewegung, die Vorstellung jede räumliche Gestalt, daher ist auch die räumliche Synthese nur dann vollständig, wenn sie aus der Stufenfolge und dem Wandel der Masszeichen den geordneten Zusammenhang der Linien und Flächen als stetiges Ganzes, als Massraum erkennt.

Hottingen-Zürich, März 1890.

Ueber eine Determinante, welche bei der Berechnung symmetrischer Functionen vorkömmt.

Von

E. Gubler.

Im ersten Bande seines »Handbuches der höhern Algebra« theilt Serret ein von Waring angegebenes Verfahren mit, eine beliebige ganze und symmetrische Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung direct als Function der Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken. In dem Falle, wo die Glieder der symmetrischen Function k Wurzeln im Quadrat, n Wurzeln in der ersten