Astronomische Mittheilungen

von

Dr. Rudolf Wolf.

LXXIV. Versuch einer Bestimmung der grossen Sonnenfleckenperiode; Studie über das sog. Petersburger-Problem; Fortsetzungen der Sonnenfleckenliteratur und des Sammlungsverzeichnisses.

Die höchst werthvolle Ergänzung, welche die unter Nr. 310 meiner Sonnenfleckenliteratur nach John Williams gegebene Reihe chinesischer Flecken-Beobachtungen durch die unter Nr. 601 reproducirte entsprechende Reihe von S. Hirayama erhalten hat, veranlasst mich, diese beiden Reihen mit einigen andern diese ältere, der Erfindung des Fernrohrs und damit der eigentlichen Entdeckung der Sonnenflecken vorangehende Zeit beschlagenden Angaben, welche theils unter verschiedenen Nummern meiner Literatur (52, 58, 59, 66 etc.), theils in der Preisschrift von Prof. Fritz vorkommen, in folgendem Tableau übersichtlich zusammen zu stellen. Es wurden muthmasslich Flecken auf der Sonne bemerkt:

188	II 14	354	XI 7/8
299	II 17	355	IV 4/5
301	I 18, X 20/1	359	V 10, IX 8
302	XII 7	369	XI 3
304	XII 15	370	III 29/30
311	IV 8	372	XI 30
321	III 8, V 7	373	I 28, XI 26, XII 26
322	III 11, XI 7	374	IV 6/7 (2 Flecken), XI 27
342	III 8, IX 3	375	I 11

388	IV 3	1123	I 5
389	VII 17	1129	III 29, IV 21, XII 16
395	XII 13	1131	III 12—14, 19
396	XII 8	1136	XI 24—XII 5
400	XII 7, 24	1137	II 27—III 8, V 13
499	I 31 (3 Flecken)	1138	III 17, 24; XI 13, 26
535		1145	X 1
577	XII 30	1155	IX 19
626		1185	II 17—III 4
778	III 17	1186	V 31, VII 22
807	an 8 auf einander folgenden Tagen (angeblich Merkur)	1193	XII 10—19
		1200	VIII 23—28, IX 28—X 3
		1201	I 4—II 5
826	III 25	1202	XII 26
832	IV 14, 25	1203	I 8
837	XII 15, 25	1205	II 7—19, V 11
840	an 90 auf einander folgenden Tagen (angeblich Venus)	1238	XII 12
		1276	II 24
		1370	I 9, X 29—XI 15
841	XII 31	1371	V 8—VI 22, XI 14
842	I 3	1372	II 15, IV 9, VI 10, IX 1
864	II	1373	XI 23
874	I	1374	IV 2—6
974	II 2, III 6 (2 Flecken)	1375	III 29, X 28
1005	I 10	1376	I 25
1077	III 6, 13—27 (fortwährend)	1381	III 25—29
		1382	III 29
1078	III 10—28, 17—IV 4	1383	I 18
1079	I 11—22, 17—III 25	1547	dreitägige Verdunklung
1089		1588	
1096		1593	
1103	VII 8 Verdunklung	1596	
1104	XI 12	1607	V 18 (angeblich Merkur)
1112	V 3, 9	1610	Entdeckung der Sonnenflecken durch Fabricius, Galilei und Harriot
1118	XI 17, XII 24		
1120	II 15, VI 14, VII 31		
1122	I 17		

Es ist nun zwar nicht zu übersehen, dass möglicher Weise einzelne der in vorstehendem Tableau enthaltenen Angaben wegen unsicherer Zeitbestimmung etwas verlegt, — vielleicht einige andere (wie z. B. gewisse Verdunklungen) ganz eliminirt werden sollten, — und namentlich nicht, dass einzelne grosse, sogar mit freiem Auge wahrnehmbare Flecken durchaus nicht nur zur Zeit eines Fleckenmaximums, sondern gar nicht selten in der Nähe eines Minimums auftreten, wie letzteres erst neuerlich durch den von 1889 VI 17—27 sichtbaren schönen Flecken belegt worden ist; aber wenn während einigen auf einander folgenden Jahren zahlreiche oder sehr auffallende Erscheinungen dieser Art auftreten, so darf man doch mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass in diese Zeit ein Maximum gefallen sei. Es ist somit die Annahme nicht sehr gewagt, dass die Jahre

372 840 1078 1133 1372

Maximaljahre gewesen seien, und aus derselben ergibt sich sodann, wie die schematische Zusammenstellung und Rechnung

	b	p	$b \cdot p$	v	v^2	$p \cdot v^2$
372						
	468 = 42 × 11,143	3	33,429	− 40	1600	4800
840						
	238 = 21 × 11,333	2	22,666	−230	52900	105890
1078						
	55 = 5 × 11,000	1	11,000	103	10609	10609
1133						
	239 = 22 × 10,864	2	21,728	239	57121	124242
1372						
	1000 = 90 × 11,111	8	88,823	$(n-1)\,\Sigma p = 24$		235451
	Mittel		11,103 ± 0,099			

erweist, dass auch in jener frühen Zeit die Sonnenflecken-Häufigkeit dieselbe Periodicität zeigte, wie ich sie für die

Zeit seit Entdeckung der Sonnenflecken im Jahre 1610 nachgewiesen habe. — Diesem Ergebniss, welches mit der durch Herrn Turner (vgl. Nr. 601 der Literatur) aus der Reihe von Hirayama abgeleiteten Periode von 11,06 weit innerhalb seiner Unsicherheit übereinstimmt, ist aber noch ein Zweites beizufügen, das fast noch eine grössere Bedeutung besitzen dürfte: Wie ich schon wiederholt nachgewiesen habe, existirt nämlich ausser der mittlern Periode von $11^{1}/_{9}$ Jahren ganz entschieden in der Häufigkeit der Sonnenflecken und Nordlichterscheinungen noch eine grössere Periode P, für deren sichere Bestimmung jedoch die neuere Beobachtungsreihe noch zu kurz ist, indem uns diese eigentlich bloss zu sagen weiss, dass P zwischen 50 und 100 Jahren liegen muss, indem die in den ersten Jahrzehnten nach Entdeckung der Sonnenflecken ziemlich starke Thätigkeit auf der Sonne in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts durch eine schwache abgelöst wurde, — dann im Anfange des 18. Jahrhunderts sich wieder steigerte, um bald neuerdings abzunehmen, — sodann von 1750 bis 1789 einige grosse Fleckenmaxima hervorrief, während im Anfange des 19. Jahrhunderts nur kleine Maxima auftraten, — endlich von 1837 bis 1871 hohe Maxima erzeugte, welchen seither wieder ein viel niedrigeres Maximum folgte. Etwas günstiger gestaltet sich nun die Sache durch Beiziehung der obigen Maximaljahre früherer Zeit: Die Jahre 372 und 1372 verrathen nämlich eine so enorme Sonnenthätigkeit, dass man in ihnen Maximaljahre der grossen Periode vermuthen muss, und unter dieser Voraussetzung muss der mittlere Werth von P offenbar ein zwischen 100 und 50 liegender aliquoter Theil von 1000 sein, somit einer der Zahlen I bis XI entsprechen, welche erhalten werden, wenn man 1000 successive durch 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 und 20 theilt. Die so erhaltenen Quotienten sind in der beifolgenden Tab. I als Colonnen-Ueberschrift eingetragen, und je die folgenden Zahlen durch fortwährendes Addiren derselben zu der Ausgangs-Epoche 372 erhalten, so dass Letztere unter Voraussetzung, es stelle das betreffende P die wirkliche Länge der grossen Periode vor, sämmtlich nahe mit Maximaljahren zusammenfallen müssen. Da nun bei I das Jahr 1672 erscheint, das nach oben einer entschiedenen Minimalperiode angehört, so ist somit der den Zahlen I zu Grunde liegende Werth von P ganz sicher kein richtiger Werth dieser Grösse, oder es fällt, kurz gesagt, I ausser Betracht; ebenso ist II wegen 1736 und 1827, IV wegen 1680, V wegen 1658 und 1801, VII wegen 1684 und 1809, VIII wegen 1666, IX wegen 1817, X wegen 1687 und XI wegen 1672 und 1822 zu verwerfen, und es können daher nur die unter III und VI eingeschriebenen Werthe von P als Concurrenten für den wirklichen Werth dieser Grösse auftreten, da nur die ihnen entsprechenden Reihen keine Widersprüche gegen die oben mitgetheilten thatsächlichen Verhältnisse enthalten. — Um die Berechtigung von den Ansprüchen der beiden Reihen III und VI weiter zu prüfen, habe ich die Tab. II gebildet, in welcher den beidseitigen Epochen E, unter welche natürlich die schon berücksichtigten 372 und 1372 nicht wieder aufgenommen wurden, die nächsten Maximaljahre als M beigeschrieben sind, sei es, dass sie wirklich oder muthmasslich beobachtet wurden, sei es, dass sie mit Hülfe der kleinen Periode von circa 11 Jahren aus solchen abgeleitet werden konnten; ich fügte ferner die Abweichungen $v=M-E$ und so gut als möglich deren Gewichte p bei, um sodann

Tab. I.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
P	100,00	90,91	**83,33**	76,92	71,43	**66,67**	62,50	58,82	55,56	52,63	50,00
Nr. 1	372	372	**372**	372	372	**372**	372	372	372	372	372
2	472	463	**455**	449	443	**439**	434	431	428	425	422
3	572	554	**539**	526	515	**505**	497	490	483	477	472
4	672	645	**622**	603	586	**572**	559	548	539	530	522
5	772	736	**705**	680	658	**639**	622	607	594	583	572
Nr. 6	872	827	**789**	757	729	**705**	684	666	650	635	622
7	972	917	**872**	834	801	**772**	747	725	705	688	672
8	1072	1008	**955**	910	872	**839**	809	784	761	740	722
9	1172	1099	**1039**	987	943	**905**	872	843	816	793	772
10	1272	1190	**1122**	1064	1015	**972**	934	901	872	846	822
Nr. 11	1372	1281	**1205**	1141	1086	**1039**	997	960	928	898	872
12	1472	1372	**1289**	1218	1158	**1105**	1059	1019	983	951	922
13	1572	1463	**1372**	1295	1229	**1172**	1122	1078	1039	1004	972
14	1672	1554	**1455**	1372	1301	**1239**	1184	1137	1094	1056	1022
15	1772	1645	**1539**	1449	1372	**1305**	1247	1195	1150	1109	1072
Nr. 16	1872	1736	**1622**	1526	1443	**1372**	1309	1254	1205	1161	1122
17	1972	1827	**1705**	1603	1515	**1439**	1372	1313	1261	1214	1172
18	2072	1917	**1789**	1680	1586	**1505**	1434	1372	1317	1267	1222
19		2008	**1872**	1757	1658	**1572**	1497	1431	1372	1319	1272
20			**1955**	1833	1729	**1639**	1559	1490	1428	1372	1322
Nr. 21			**2039**	1910	1801	**1705**	1622	1548	1483	1425	1372
22				1987	1872	**1772**	1684	1607	1539	1477	1422
23				2064	1943	**1839**	1747	1666	1594	1530	1472
24					2015	**1905**	1809	1725	1650	1582	1522
25						**1972**	1872	1784	1705	1635	1572
Nr. 26						**2039**	1934	1842	1761	1687	1622
27							1997	1901	1817	1740	1672
28							2059	1960	1872	1793	1722
29								2019	1928	1846	1772
30									1983	1898	1822
Nr. 31									2039	1951	1872
32										2004	1922
33											1972
34											2022

Tab. II.

III. $P = 83{,}33$				VI. $P = 66{,}67$			
E	M	v	p	E	M	v	p
455	499 − 44 = 455	0	1/2	439	398 + 44 = 442	3	1/2
539	535	−4	1/4	505	499 + 11 = 510	5	1/2
622	626	4	1/4	572	577	5	1/4
705	778 − 78 = 700	−5	1/4	639	626 + 11 = 637	−2	1/4
789	778 + 11 = 789	0	1/4	705	778 − 78 = 700	−5	1/4
872	840 + 33 = 873	1	1	772	778 − 11 = 767	−5	1/4
955	974 − 22 = 952	−3	1/2	839	840	1	1
1039	1078 − 44 = 1034	−5	1	905	874 + 33 = 907	2	1/4
1122	1133 − 11 = 1122	0	1	972	974	2	1/2
1205	1203	−2	1/2	1039	1078 − 44 = 1034	−5	1
1289	1276 + 11 = 1287	−2	1/4	1105	1133 − 33 = 1100	−5	1
1455	1382 + 78 = 1460	5	1/4	1172	1185 − 11 = 1174	2	1/2
1539	1547 − 11 = 1536	−3	1/4	1239	1238	−1	1/4
1622	1626	4	2	1305	1276 + 33 = 1309	4	1/4
1705	1705	0	2	1439	1382 + 55 = 1437	−2	1/4
1789	1788	−1	2	1505	1547 − 44 = 1503	−2	1/4
1872	1871	−1	2	1572	1547 + 22 = 1569	−3	1/4
				1639	1639	0	2
				1705	1705	0	2
				1772	1770	−2	2
				1839	1837	−2	2
$f = \sqrt{\Sigma(p \cdot v^2):(n-1)} = \pm 2{,}40$				$f = \sqrt{\Sigma(p \cdot v^2):(n-1)} = \pm 2{,}42$			
$\Delta P = f:\sqrt{\Sigma p} = \pm 0{,}64$				$\Delta P = f:\sqrt{\Sigma p} = \pm 0{,}61$			

nach den gewöhnlichen Regeln für beide P sowohl die mittlere Abweichung einer einzelnen von der mittlern Periode, als die Unsicherheit ΔP dieser Letztern berechnen zu können. Merkwürdiger Weise stimmen nun die beiden f und nicht weniger die beiden ΔP so nahe zusammen, dass die beiden Reihen immer noch gleich berechtigt erscheinen, und somit ein definitiver Entscheid vertagt werden muss, — jedoch zu gutem Glück nicht auf sehr lange: Denn während nach III dem Maximum von 1872 erst 1955 ein neues folgen, also der Anfang des kommenden Jahrhunderts einer Minimalperiode anzugehören hätte, so würde VI schon auf 1905 ein neues Maximum, also auf dieselbe Zeit eine Maximalperiode verlegen, — und es wird also muthmasslich schon bei Anlass des nächsten, bei mittlerm Verlaufe etwa 1894/5 zu erwartenden Maximaljahres der kleinen Periode, und jedenfalls spätestens im ersten Decennium des folgenden Jahrhunderts wenigstens der eine der beiden Concurrenten aus Abschied und Tractanden fallen. — Als ich die hiemit vorläufig abgeschlossene Untersuchung begann, übersah ich anfänglich die III, und hielt somit die VI, falls überhaupt eine grosse Periode existire, für den einzig berechtigten Annäherungswerth derselben; erst als ich, um ganz sicher zu sein, in vorstehender Weise systematisch vorging, tauchte auch die III mit gleicher Berechtigung auf, und wenn ich schon jetzt entscheiden müsste, so würde ich derselben sogar entschieden den Vorzug einräumen, da es mir scheinen will, es sei nach der Beschaffenheit des an 1804/5 erinnernden Maximums von 1883 eher zu erwarten, dass demselben entsprechend 1816 und 1829/30 noch einige kleine Maxima folgen dürften, als dass schon das zweitfolgende Maximum die von VI verlangte ansehnliche Höhe erreichen werde.

Unter den Aufgaben, welche im vorigen Jahrhundert mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösen versucht wurden, nahm das auf ein Paradoxon führende, sog. Problème de St. Pétersbourg eine so hervorragende Stelle ein, dass auch die neuern Schriftsteller nicht versäumen, dasselbe zu erwähnen, — wiewohl meist nur oberflächlich und, wie es mir scheinen will, ohne des Pudels Kern herauszufinden. Obschon ich nun diesem Probleme, wenigstens für die Gegenwart, keineswegs eine grosse Wichtigkeit beilegen kann, so halte ich es doch der Mühe werth, im folgenden seine historische Entwicklung etwas näher ins Auge zu fassen, — die Abwege zu beleuchten, auf welche sich mehrere der berühmtesten Geometer durch dasselbe führen liessen, — und an Hand der Erfahrungswahrscheinlichkeit den Versuch zu machen, die richtige Fährte zur Beseitigung der vermeinten Widersprüche zwischen Theorie und gesundem Menschenverstande zu finden, somit aufs Neue zu zeigen, wie nothwendig es ist, das Gesetz der grossen Zahlen genau zu studiren und überall zu berücksichtigen. — Die erste Veranlassung zu unserm Probleme gab ein von Montmort in seinen «Essay d'analyse sur les jeux de hazard. Seconde édition revûe et augmentée de plusieurs lettres. Paris 1713 in 4» aufgenommener Brief, welchen Nicolaus Bernoulli am 19. Sept. 1713 aus Basel an ihn geschrieben hatte, in demselben seinem gelehrten Freunde unter Anderm fünf Aufgaben vorlegend, von welchen die zwei Letzten wie folgt lauteten: «Quatrième Problème. A promet de donner un écu à B, si avec un dé ordinaire il amène au premier coup six points, deux écus s'il amène le six au second, trois écus s'il amène ce point au troisième coup, et ainsi de suite; on demande quelle est l'espérance de B. Cinquième Problème. On demande la même chose si A promet à B de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, etc., ou 1, 3, 9, 27, etc., ou 1, 4, 9, 16, 25, etc., ou 1, 8, 27, 64, etc. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, etc. comme auparavant». Montmort fühlte sofort heraus, dass diese Aufgaben mit Hülfe der ersten Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der von Jakob Bernoulli entwickelten Summenformeln ohne Schwierigkeit gelöst werden können, — und in der That, wenn man bedenkt, dass einerseits die Wahrscheinlichkeit ein Ereigniss der Wahrscheinlichkeit x nach einander h mal herbeizuführen durch x^h ausgedrückt wird, anderseits aber aus der bekannten Summenformel

$$s_1 = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^h = \frac{x}{1-x}(1-x^h) \qquad (1$$

sofort die weitern Summenformeln

$$s_2 = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + h \,.\, x^h = x \,.\, \frac{d\,s_1}{d\,x} =$$
$$= \frac{x}{(1-x)^2} \,.\, [1-(h+1)\,x^h + h \,.\, x^{h+1}] \qquad (2$$

$$s_3 = x + 2x^2 + 4x^3 + \ldots + 2^{h-1} \,.\, x^h =$$
$$= {}^1\!/\!_2\,[(2x) + (2x)^2 + \ldots + (2x)^h] = \frac{x}{1-2x} \,.\, (1-2^h x^h) \quad (3$$

$$s_4 = x + 3x^2 + 9x^3 + \ldots + 3^{h-1} \,.\, x^h =$$
$$= {}^1\!/\!_3\,[(3x) + (3x)^2 + \ldots + (3x)^h] = \frac{x}{1-3x} \,.\, (1-3^h x^h) \quad (4$$

$$s^5 = x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + h^2 \,.\, x^h = x \,.\, \frac{d s_2}{d\,x} =$$
$$= \frac{x}{(1-x)^3} \,.\, \begin{bmatrix} 1 + x - (h+1)^2 \,.\, x^h + \\ + (2h^2 + 2h - 1) \,.\, x^{h+1} - h^2 \,.\, x^{h+2} \end{bmatrix} \quad (5$$

$$s_6 = x + 8x^2 + 27x^3 + \ldots + h^3 \,.\, x^h = x \,.\, \frac{d\,s_5}{d\,x} =$$
$$= \frac{x}{(1-x)^4} \begin{bmatrix} 1 + 4x + x^2 - (h+1)^3 \,.\, x^h + (3h^3 + 6h^2 - 4) \,.\, x^{h+1} \\ - (3h^3 + 3h^2 - 3h + 1) \,.\, x^{h+2} + h^3 \,.\, x^{h+3} \end{bmatrix} \quad (6$$

folgen, so ergeben sich die gewünschten unmittelbar, indem für $x = 1/6$ aus 1 bis 6, wenn h nur etwas gross ist, die Näherungswerthe

$$s_1 = \frac{x}{x-1} = 0{,}200 \quad s_2 = \frac{x}{(1-x)^2} = 0{,}240 \quad s_3 = \frac{x}{1-2x} = 0{,}250$$
$$s_4 = \frac{x}{1-3x} = 0{,}333 \quad s_5 = \frac{x}{(1-x)^3} \cdot (1+x) = 0{,}336$$
$$s_6 = \frac{x}{(1-x)^4} \cdot (1 + 4x + x^2) = 0{,}586 \tag{7}$$

hervorgehen, welche die in Thalern ausgedrückten Erwartungen von B, und somit die von ihm bei einem ehrlichen Spiele zu leistenden Einsätze repräsentiren.[1]) Die Erfahrung bestätigt diese Resultate auf das Schönste, indem ich die 6 unter 1000 Würfen 845 mal gar nicht und 129 mal ohne darauf folgende Wiederholung erhielt, dagegen 20, 5 und 1 mal je 2, 3 und 5 mal nach einander, so dass ich an der Stelle von A unter den verschiedenen Suppositionen durchschnittlich für ein Spiel

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1/1000[129.1+20(1+1)+5(1+1+1)+1(1+1+1+1+1)] = 0{,}189\\
s_2 &= 1/1000[129.1+20(1+2)+5(1+2+3)+1(1+2+3+4+5)] = 0{,}234\\
s_3 &= 1/1000[129.1+20(1+2)+5(1+2+4)+1(1+2+4+8+16)] = 0{,}255\\
s_4 &= 1/1000[129.1+20(1+3)+5(1+3+9)+1(1+3+9+27+81)] = 0{,}395\\
s_5 &= 1/1000[129.1+20(1+4)+5(1+4+9)+1(1+4+9+16+25)] = 0{,}345\\
s_6 &= 1/1000[129.1+20(1+8)+5(1+8+27)+1(1+8+27+60+125)] = 0{,}714
\end{aligned} \tag{8}$$

zu bezahlen gehabt hätte, — also nur unter der letzten Supposition, wo sich der fünffache, unter 1000 Würfen wegen $6^5 = 7776$ noch kaum zu erwartende Wurf[2]) be-

---

[1]) Wie Montmort dazu gekommen ist $s_3 = 3/2$ zu setzen, weiss ich mir nicht zu erklären, und füge nur bei, dass Montucla dessen irrthümliche Angabe ohne Prüfung reproducirte. — [2]) Aus meiner 40000 Würfe umfassenden Versuchsreihe ergaben sich für 4-, 5-, 6- und 7-fache Wiederholung eines bestimmten Wurfes unter

sonders geltend machte, erheblich mehr als es die Theorie erwarten liess. — Die nach oben von Nicolaus Bernoulli gestellten Probleme wurden bald auch in andern Kreisen besprochen und dabei häufig in der Weise modificirt, dass man, anstatt den Wurf 6 den übrigen Würfen gegenüberzustellen, das Würfelspiel «Gerade und ungerade» oder das Letztern in dieser Beziehung equivalente Spiel «Schrift oder Schild (croix ou pile, head or tail)» ins Auge fasste, so dass x und damit jedes Glied der Reihe 3 gleich $^1/_2$, folglich die Summe aller Glieder gleich $^1/_2\, h$ wurde, also, da theoretisch für h keine obere Grenze existirt, die Erwartung den Werth unendlich annahm, während der gesunde Menschenverstand es als unsinnig bezeichnete, dem Spieler B einen Einsatz von auch nur etwas erheblicher Grösse zumuthen zu wollen. Es entstand so die neue Aufgabe, diesen scheinbaren Widerspruch, in dem Manche eine Unrichtigkeit der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung erkennen wollten, in befriedigender Weise zu heben, und da sich nun namentlich der damals in Petersburg residirende Daniel Bernoulli in seinem «Specimen theoriae novae de mensura sortis (Comment. Petrop. Tom. V von 1730—31, ausgeg. 1738)» eingehend mit derselben befasste, so wurde sie gemeinhin als Problème de St. Pétersbourg bezeichnet, obschon sich auch der Genfer Gabriel Cramer, und zwar muthmasslich mehrere Jahre vor Bernoulli, in anerkennenswerther Weise um ihre Lösung bemühte. Letzterer schrieb nämlich (vgl. die eben erwähnte Abhandlung)

1000 Würfen die Erfahrungswahrscheinlichkeiten 0.796, 0.104, 0.017 und 0.004, so dass allfällig noch ein vierfacher Wurf zu erwarten gewesen wäre, dagegen ein fünffacher bereits ein auffallendes Ereigniss darstellte.

schon 1728 an Nicolaus Bernoulli: «Je ne sais si je ne me trompe, mais je crois tenir la résolution du cas singulier que Vous avez proposé à Mr de Montmort dans votre lettre du 9 Sept. 1713, Probl. 5 pag. 402. Pour rendre le cas plus simple je supposerai que A jette en l'air une pièce de monnaie, B s'engage de lui donner un écu si le coté de la croix tombe le premier coup, 2 si ce n'est que le second coup, 4 si c'est le troisième coup, 8 si c'est le quatrième coup, etc. Le paradoxe consiste en ce que le calcul donne pour l'équivalent que A doit donner à B une somme infinie, ce qui paraît absurde, puisqu'il n'y a personne de bon sens, qui voulut donner 20 écus. On demande la raison de cette différence entre le calcul mathématique et l'estime vulgaire. Je crois qu'elle vient de ce que (dans la théorie) les mathématiciens estimant l'argent à proportion de sa quantité et (dans la pratique) les hommes de bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire. Ce qui rend l'espérance mathématique infinie c'est la somme prodigieuse que je peux recevoir, si le coté de la croix ne tombe que bien tard, le centième ou le millième coup. Or cette somme si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour moi, ne me fait pas plus de plaisir, ne m'engage plus à accepter le parti, que si elle n'était que 10 ou 20 millions d'écus. Supposant donc que toute somme au dessus de 10 millions ou (pour plus de facilité) au dessus de $2^{24} = 16\,777\,216$ d'écus lui est égale, ou plutot que je ne puisse jamais recevoir plus de 2^{24} écus, quelque tard que vienne le coté de la croix, mon espérance se réduira à

$$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\ldots+\frac{1}{2^{25}}\times 2^{24}+\frac{1}{2^{26}}\times 2^{24}+\frac{1}{2^{27}}\times 2^{24}+\ldots=$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots}_{12}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}_{1}=13 \qquad (9$$

Ainsi moralement parlant mon espérance est réduite à 13 écus et mon équivalent à autant, ce qui parait bien plus raisonnaible que de le faire infini.» — Es geht sowohl aus Obigem als aus dem weitern Verlaufe seines Briefes unzweifelhaft hervor, dass Cramer ganz gut fühlte, es beruhe seine Rechnung auf einer willkürlichen Annahme und es sei das erhaltene Resultat anfechtbar; aber immerhin war sein Versuch, und namentlich der bei ihm auftretende Gedanke, dass eine gewisse Beschränkung einzutreten habe, eine erhebliche Leistung, welche allerdings erst in der neuern Zeit volle Anerkennung finden konnte, während damals der bald darauf durch Daniel Bernoulli eingeschlagene Weg entschieden als vorzüglicher erschien. Dieser Letztere ging nämlich von dem ziemlich plausibeln Satze aus, dass der moralische Werth eines Gewinnes nicht von der absoluten Grösse desselben, sondern von seinem Verhältnisse zu dem Vermögen des Gewinners abhänge, und leitete nun das Weitere durch mathematische Entwicklung wesentlich in folgender Weise aus demselben ab[3]): Bezeichnet X das wirkliche Vermögen, dX eine Zunahme desselben und k eine Constante, so stellt nach dem angenommenen Grundsatze $k \,.\, dX : X$ die entsprechende moralische Vermögenszunahme vor, und somit das Integrale

$$Y = k \,.\, \mathrm{Ln}\, X + .\, \mathrm{Ln}\, h \tag{10}$$

wo Ln h eine Constante ist, das dem wirklichen Vermögen X entsprechende moralische Vermögen. Ist nun a das ursprüngliche Vermögen von B, während p, q, r, ... die Wahrscheinlichkeiten sind, dass er gegen den seiner

[3]) Meine Entwicklung schliesst sich nahe an die von Laplace in seine „Théorie des probabilités“ (pag. 432 f.) aufgenommene an.

Erwartung gleichen Einsatz x entweder α, oder β, oder γ, etc. gewinnen werde, so wird sein wirkliches Vermögen einen der Werthe

$$a+\alpha-x \quad a+\beta-x \quad a+\gamma-x \quad \ldots\ldots$$

somit nach 10 sein moralisches Vermögen einen der Werthe

$$k.\mathrm{Ln}(a+\alpha-x)+\mathrm{Ln}\,h \quad k.\mathrm{Ln}(a+\beta-x)+\mathrm{Ln}\,h \quad k.\mathrm{Ln}(a+\gamma-x)+\mathrm{Ln}\,h \quad \ldots\ldots$$

annehmen, und man wird somit den wahrscheinlichsten Werth des Letztern erhalten, wenn man jeden einzelnen dieser Werthe mit dessen Wahrscheinlichkeit multiplicirt, und die Summe der so erhaltenen Produkte mit der Summe aller Wahrscheinlichkeiten (also mit der Einheit) dividirt, d. h. es wird derselbe

$$Y=kp.\mathrm{Ln}(a+\alpha-x)+kq.\mathrm{Ln}(a+\beta-x)+\ldots+\mathrm{Ln}\,h \quad (11$$

sein. Setzt man aber die beiden Werthe 10 und 11 einander gleich, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\mathrm{Ln}X=p.\mathrm{Ln}(a+\alpha-x)+q.\mathrm{Ln}(a+\beta-x)+r.\mathrm{Ln}(a+\gamma-x)+\ldots$$

oder (12

$$X=(a+\alpha-x)^p.(a+\beta-x)^q.(a+\gamma-x)^r.\ \ldots\ldots$$

so dass der muthmassliche Gewinn von B

$$X-a=(a+\alpha-x)^p.(a+\beta-x)^q.(a+\gamma-x)^r.\ \ldots-a$$

sein wird, — also, da dieser bei ehrlichem Spiele gleich Null sein soll, x so bestimmt werden muss, dass die Gleichheit

$$(a+\alpha-x)^p.(a+\beta-x)^q.(a+\gamma-x)^r.\ \ldots=a \quad (13$$

besteht. Um diese Bestimmung mit Hülfe logarithmischer Tafeln leicht auszuführen, thut man am Besten $a-x=1:z$ zu setzen, da hiefür 13 in

$$(1+\alpha z)^p.(1+\beta z)^q.(1+\gamma z)^r.\ \ldots=1+x.z \quad (14$$

übergeht, also für jeden Werth von z successive leicht $1+x.z$, x und a berechnet werden können. — Um nun mit Hülfe dieser Beziehungen eine dem von Daniel Bernoulli aufgestellten Grundsatze entsprechende Lösung des Petersburger-Problemes zu erhalten, bleibt aber offenbar nichts mehr zu thun übrig, als in den 13 und 14 die α, β, γ, ... durch 1, 2, 4, etc. und die p, q, r, etc. durch $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, etc. zu ersetzen, wodurch sie in die Gleichungen

$$\sqrt{a+1-x}\,.\,\sqrt[4]{a+2-x}\,.\,\sqrt[8]{a+4-x}\,.\,\sqrt[16]{a+8-x}\,.\,\ldots=a \qquad (15$$

$$\sqrt{1+z}\,.\,\sqrt[4]{1+2z}\,.\,\sqrt[8]{1+4z}\,.\,\sqrt[16]{1+8z}\,.\,\ldots=1+xz \qquad (16$$

übergehen, deren Erste vollständig mit der von Bernoulli selbst erhaltenen Hauptgleichung übereinstimmt, während er statt der Zweiten die Näherungsformel

$$x=\sqrt{a+1}\,.\,\sqrt[4]{a+2}\,.\,\sqrt[8]{a+4}\,.\,\sqrt[16]{a+8}\,.\,\ldots-a \qquad (17$$

gab, nach welcher er die correspondirenden Werthe

$$\begin{array}{lllll} a=0 & a=10 & a=100 & a=1000 & \ldots\ldots \\ x=2 & x \doteq 3 & x \doteq 4 & x \doteq 6 & \ldots\ldots \end{array}$$

erhielt.[4]) — So scharfsinnig und unanfechtbar jedoch die mathematischen Deductionen sind, welche ich soeben nach Daniel Bernoulli mittheilte, so stehen oder fallen die erhaltenen Resultate natürlich mit seinem Grundprincipe, welches denn doch fraglicher Natur ist und namentlich auf Betrachtungen beruht, die dem vorliegenden Probleme eigentlich fremd und somit strenge genommen eher ge-

---

[4]) Die 17 geht aus der 15 sofort hervor, wenn in Letzterer vorerst $a - x = b$ gesetzt und sodann näherungsweise a für b eingeführt wird. — Für die Annahme $a = 0$ gibt 17

$$x = 2^{1/4}\,.\,4^{1/8}\,.\,8^{1/16}\,.\,16^{1/32}\,.\,\ldots = 2^{1/4}\,.\,2^{2/8}\,.\,2^{3/16}\,.\,2^{4/32}\,.\,\ldots$$

folglich mit Hülfe von 2

$$\text{Lg}\,x = {}^1/_2\,({}^1/_2+{}^2/_4+{}^3/_8+{}^4/_{16}+\ldots)\,.\,\text{Lg}\,2 = \text{Lg}\,2 \text{ oder } x = 2,$$

so dass die erste Correspondenz Bernoulli's mathematisch gerechteignet sind irre zu führen, als dasselbe zu lösen, so dass wohl der von d'Alembert in seine Abhandlung «Doutes et questions sur le calcul des probabilités (Oeuvres de d'Alembert. Paris 1821—22, 5 Vol. in 8; I 451—462)» bei Anlass des Petersburger-Problemes eingeflochtene Tadel «Plusieurs grands mathématiciens se sont efforcés de résoudre ce cas singulier; mais leurs solutions, qui ne s'accordent nullement, *et qui sont tirées de circonstances étrangères à la question*, prouvent seulement combien cette question est embarassante», zunächst an die Adresse von Daniel Bernoulli gerichtet war, während er die Arbeit von Cramer nur obenhin berührte. Wäre Letzterer mit der zwar damals durch Jakob Bernoulli bereits inaugurirten, aber doch eigentlich kaum vor Lambert näher in Betracht gezogenen und erst in der neuesten Zeit zu einer ausgiebigen Entwicklung gelangten Lehre von der Erfahrungswahrscheinlichkeit bekannt gewesen, so hätte er nämlich das sein Verfahren discreditirende Willkürliche leicht abstreifen können: Er wäre sich bewusst gewesen, dass bei so einfachen Verhältnissen, wie diese bei den zu Grunde liegenden Spielen vorliegen, schon eine relativ geringe, also praktisch wirklich leicht erreichbare Anzahl dieser Letztern genügt, um die wünschbare Ausgleichung, d. h. eine nahe Uebereinstimmung zwischen der mathematischen und der sich aus der Erfahrung ergebenden Wahrscheinlichkeit herbeizuführen, — dass bei einer solchen Anzahl von

fertigt ist, obschon es etwas sonderbar erscheint, Jemanden, der absolut nichts besitzt, eine Einlage von 2 Thalern zuzumuthen. Man kann doch höchstens von B verlangen, dass er seinen ganzen Besitz einlege oder dass $x = a$ sei, wofür sodann aus 15 ebenfalls $x = 2$ folgen, aber diesem x ein Vermögen $a = 2$ entsprechen würde. Die übrigen Werthe Bernoulli's sind dagegen richtige An-

Spielen auch die wirklich auftretenden Wiederholungen sehr nahe mit den aus ihrer Wahrscheinlichkeit berechneten übereinkommen, und somit für die in den Formeln 1—6 erscheinende Grösse h leicht eine zulässige obere Grenze bestimmt werden kann, anstatt sie, wie er es bei seiner Lösung machte, willkürlich anzunehmen, — und dass endlich Ausnahmsfälle, die zwar selten vorkommen, aber immerhin vorkommen können, durch die Vorschrift, es soll jedes Spiel beim Erreichen jener obern Grenze abgebrochen, d. h. bei der Berechnung in die oberste der gestatteten Klassen versetzt werden, unschädlich zu machen seien. Unter Befolgung dieser Grundsätze wäre aber die von Cramer vorgeschlagene Lösung des Petersburger-Problemes eine perfekte geworden, indem er für

$$n = 100 \qquad \text{oder} \qquad n = 1000$$

wegen $100 : 2^7 = 0{,}78 > {}^1\!/_2$, $100 : 2^8 = 0{,}39 < {}^1\!/_2$ und $1000 : 2^{10} = 0{,}98 > {}^1\!/_2$, $1000 : 2^{11} = 0{,}49 < {}^1\!/_2$

$$h = 7 \qquad \text{oder} \qquad h = 10$$

und sodann für $x = {}^1\!/_2$ nach 1—6 bei Berücksichtigung der für die Ausnahmsfälle aufgestellten Regel [5]) die, wie wir

---

näherungen, indem z. B. nach 16 die Werthe $z = 0{,}01$, Lg $(1 + 0{,}01 . x) = 0{,}018\,654$, $x = 4{,}389$ und $a = 104{,}389$ correspondiren. — [5]) Zur Erläuterung mag Folgendes beigefügt werden: Von n Spielen werden durchschnittlich, da die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine ungerade Zahl zu werfen $x = {}^1\!/_2$ ist, $n\,x$ Spiele auf den ersten Wurf eine solche ergeben, also durch A gewonnen sein. Bei den übrigen $n\,x$ Spielen wird dagegen ein zweiter Wurf nöthig werden, der in $n\,x^2$ Fällen eine ungerade Zahl hervorbringen und dadurch das Spiel beendigen, aber zugleich A verpflichtet wird, für den ersten geraden Wurf die von ihm versprochene Summe a_1 einzubezahlen. Die nunmehr noch unerledigten $n\,x^2$ Spiele bedingen einen dritten Wurf, der in $n\,x^3$ Fällen das Spiel vollenden, jedoch A zu einer Einzahlung $a_1 + a_2$ für die beiden vorangehenden geraden Würfe nöthigen wird, — etc., bis mit dem h^{ten} Wurfe $n \,.\, x^h$ Spiele gegen Erlegung von $\Sigma a = a_1 + a_2 + \ldots + a_{h-1}$ zum Abschlusse komsofort sehen werden, auch nach Erfahrung als zulässig erscheinenden Werthe b für die Erwartung von B

n	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
100	0,984	1,875	3,000	10,391	4,969	17,375
1000	0,998	1,979	4,500	37,443	5,760	23,287

erhalten hätte. Ich habe nämlich zur endgültigen Prüfung dieser Verhältnisse auf Grund meiner frühern Versuchsreihen[6]) in Tab. I und II die Resultate m von 10×100 und von 10×1000 Spielen[7]) in der Weise zu-

men. Wird nun h so gewählt, dass $n \cdot x^h > \frac{1}{2}$ und $n \cdot x^{h+1} < \frac{1}{2}$ ist, so treten die allfällig noch folgenden Spiele nach dem Obigen als Ausnahmefälle auf und belasten A ebenfalls nur mit Σa, sodass, wenn wir die Erwartung von B mit b bezeichnen, für ein ehrliches Spiel die Gleichheit

$$n \cdot b = n x^2 . a_1 + n x^3 (a_1 + a_2) + \ldots + (n \cdot x^h + n \cdot x^{h+1} + \ldots) \cdot \Sigma a$$

bestehen, also

$$b = (x^2 + x^3 + \ldots + x^h) . a_1 + (x^3 + x^4 + \ldots + x^h) . a_2 + (x^4 + x^5 + \ldots + x^h) . a_3 +$$
$$+ \ldots + (x^{h-1} + x^h)\, a_{h-2} + x^h \cdot a_{h-1} + x^h (x + x^2 + \ldots) \cdot \Sigma a$$
$$= \frac{x^2 - x^{h+1}}{1-x} . a_1 + \frac{x^3 - x^{h+1}}{1-x} . a_2 + \frac{x^4 - x^{h+1}}{1-x} . a_3 + \ldots + \frac{x^{h-1} - x^{h+1}}{1-x} . a_{h-2} +$$
$$+ \frac{x^h - x^{h+1}}{1-x}\, a_{h-1} + x^h \frac{x}{x-1} \cdot \Sigma a$$

sein muss, oder, da für $x = \frac{1}{2}$ auch $1 - x = x$ ist,

$$b = x \cdot a_1 + x^2 . a_2 + x^3 . a_3 + \ldots\ldots + x^{h-1} . a_{h-1}$$

so dass für die bei 1—6 angenommenen Werthe der a mit Hülfe jener Formeln, in welchen x durch $\frac{1}{2}$ und h durch $(h-1)$ zu ersetzen ist, die Erwartungen

$$b_1 = 1 - \tfrac{1}{2}{}^{h-1},\quad b_2 = 2 - (1+h) . \tfrac{1}{2}{}^{h-1},\quad b_3 = \tfrac{1}{2}(h-1),\quad b_4 = (\tfrac{3}{2})^{h-1} - 1,$$
$$b_5 = 6 - (3 + 2h + h^2) . \tfrac{1}{2}{}^{h-1},\qquad b_6 = 26 + (1 - 9h - 3h^2 - h^3) . \tfrac{1}{2}{}^{h-1}$$

folgen, welchen für $h = 7$ und $h = 10$ die in obige Tafel eingetragenen Werthe entsprechen. — [6]) Vergl. Mitth. 53 und 54 von 1881. — [7]) Zur Absolvirung der 10000 Spiele waren im Ganzen 20339 Würfe nothwendig, während man theoretisch nur 20000 erwarten sollte, da die 10000 Spiele mit 10000 ungeraden Würfen

Tab. I. **Versuche mit dem weissen Würfel.**

h	1 bis 100	101 bis 200	201 bis 300	301 bis 400	401 bis 500	501 bis 600	601 bis 700	701 bis 800	801 bis 900	901 bis 1000	Mittel
0	52	48	42	52	41	53	51	43	53	51	48,6
1	23	25	25	22	29	23	27	28	26	24	25,2
2	14	20	19	15	12	11	12	13	7	16	13,9
3	3	2	12	5	9	8	6	9	4	5	6,3
4	4	4	2	3	3	3	2	4	4	3	3,2
5	4	0		0	2	2	2	3	2	0	1,5
6		1		2	3				3	0	0,9
7				1	0				1	0	0,2
8					0					0	0,0
9					1					0	0,1
10										0	0,0
11										0	0,0
12										0	0,0
13										1	0,1
14											0,0
15											0,0
I A	96	93	107	98	127	91	87	112	103	90	100,4
I B	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98,0
I D	− 2	− 5	9	0	29	− 7	− 11	14	5	− 8	2,4
II A	183	158	174	197	270	164	149	206	232	160	189,3
II B	187	187	187	187	187	187	187	187	187	187	187,0
II D	− 4	− 29	− 13	10	83	− 23	− 38	19	45	− 27	2,3
III A	270	222	196	400	551	219	197	283	513	279	313,0
III B	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300,0
III D	− 30	− 78	−104	100	251	− 81	−103	− 17	213	− 21	13,0
IV A	762	655	337	2088	2741	533	475	720	2693	1366	1237,0
IV B	1039	1039	1039	1039	1039	1039	1039	1039	1039	1039	1039,0
IV D	−277	−384	−702	1049	1702	−506	−564	−319	1654	327	198,0
V A	475	364	348	579	828	390	341	504	760	404	499,3
V B	497	497	497	497	497	497	497	497	497	497	497,0
V D	− 22	−133	−149	82	331	−107	−156	7	263	− 93	2,3
VI A	1557	1118	828	2303	3318	1160	1001	1544	3190	1432	1745,1
VI B	1737	1737	1737	1737	1737	1737	1737	1737	1737	1737	1737,0
VI D	−180	−619	−909	566	1581	−577	−736	−193	1453	−305	8,1

Tab. II. **Versuche mit dem weissen Würfel.**

h	1 bis 1000	1001 bis 2000	2001 bis 3000	3001 bis 4000	4001 bis 5000	5001 bis 6000	6001 bis 7000	7001 bis 8000	8001 bis 9000	9001 bis 10000	Mittel
0	486	491	511	475	491	505	496	448	491	471	486,5
1	252	244	250	260	256	227	259	261	248	261	251,8
2	139	133	113	138	121	107	131	146	129	138	129,5
3	63	64	71	64	59	72	53	77	66	74	66,3
4	32	36	29	32	40	51	33	27	31	27	33,8
5	15	15	13	14	18	20	9	15	19	13	15,1
6	9	14	5	14	9	11	11	13	7	9	10,2
7	2	3	5	2	4	4	6	8	5	5	4,4
8	0		2	0	2	2	1	2	3	2	1,4
9	1		0	0		1	0	2	1		0,5
10	0		1	1			1	0			0,3
11	0							0			0,0
12	0							0			0,0
13	1							0			0,1
14								0			0,0
15								1			0,1
I A	1009	1026	961	1034	1023	1080	983	1145	1033	1037	1033,1
I B	998	998	998	998	998	998	998	998	998	998	998,0
I D	11	28	- 37	36	25	82	- 15	147	35	39	35,1
II A	1937	1990	1872	1993	2016	2250	1925	2370	2066	1985	2040,4
II B	1979	1979	1979	1979	1979	1979	1979	1979	1979	1979	1979,0
II D	- 42	11	- 107	14	37	271	- 54	391	87	6	61,4
III A	4410	3359	4407	4195	3775	4659	4530	6498	4503	3713	4404,9
III B	4500	4500	4500	4500	4500	4500	4500	4500	4500	4500	4500,0
III D	90	- 1141	- 93	- 305	- 725	159	30	1998	3	- 787	- 95,1
IV A	49549	13238	47727	41424	19473	30828	47247	73983	32855	19729	37607,3
IV B	37443	37443	37443	37443	37443	37443	37443	37443	37443	37443	37443,0
IV D	12106	-24205	10284	3981	-17970	-6615	9804	36500	-4588	-17714	164,3
V A	5383	5404	5342	5515	5664	6654	5571	7370	6026	5039	5836,8
V B	5760	5760	5760	5760	5760	5760	5760	5760	5760	5760	5760,0
V D	- 377	- 356	- 418	- 245	- 96	894	- 189	1610	266	- 721	76,8
VI A	20933	19246	21390	20923	21216	25986	22547	32094	24080	20273	22868,8
VI B	23287	23287	23287	23287	23287	23287	23287	23287	23287	23287	23287,0
VI D	-2354	- 4041	-1897	-2364	- 2071	2699	- 740	8807	793	3014	- 418,2

sammengestellt, dass in Tab. I diejenigen der 10×100, in Tab. II diejenigen der 10×1000 Spiele für jeden Werth von h aufgenommen sind. Man ersieht so auf den ersten Blick, dass z. B. von den ersten 100 Spielen $m_0 = 52$ derselben mit einem unpaaren Wurf begannen, also mit dem ersten Wurf erledigt wurden und somit A je einen Gewinn b zubrachten, — dass dagegen bei $m_1 = 23$ Spielen erst auf einen paaren Wurf ein unpaarer folgte, also je durch A die versprochene Einlage a_1 zu machen oder gegen den entsprechenden Werth von b zu verrechnen war, — dass bei $m_2 = 14$ Spielen successive 2, bei $m_3 = 3$ Spielen successive 3, bei $m_4 = 4$ Spielen successive 4, und bei $m_5 = 4$ Spielen successive 5 paare Würfe erhalten wurden, und somit A respective je zu den Einlagen $(a_1 + a_2)$, oder $(a_1 + a_2 + a_3)$, oder $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, oder $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ genöthigt wurde, ehe durch das Erscheinen eines unpaaren

---

vollendet werden, welchen bei $x = 1/2$ auch 10000 gerade Würfe entsprechen sollten. Dieser Unterschied rührt nun allerdings zum Theil davon her, dass bei der in Rechnung gebrachten Anzahl von Würfen noch keine vollständige Ausgleichung eingetreten ist, zum grössern Theil wohl aber von der Abweichung des gebrauchten von einem geometrisch richtigen und vollständig homogenen Würfel. Und in der That, wenn wir unter letzterer Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit mit dem benutzten weissen Würfel einen unpaaren Wurf zu erhalten durch p, also diejenige einen paaren Wurf zu erhalten durch $1 - p$ ausdrücken, so besteht nach obigem Erfahrungsresultate die Proportion

$$p : (1 - p) = 10000 : (20339 - 10000)$$

woraus sich $p = 0{,}49166$ und $1 - p = 0{,}50834$ ergibt, während bei der frühern Untersuchung des weissen Würfels nahe übereinstimmend damit $p = 0{,}48890$ und $1 - p = 0{,}51110$ erhalten wurde. In die obigen Untersuchungen statt $x = 1/2$ diese Werthe $x' = 0{,}49$ und $x'' = 0{,}51$ einzuführen, würde sich jedoch, gegenüber der sehr bedeutenden Complicirung, kaum gelohnt haben, da dadurch kaum

Wurfes das betreffende Spiel zum Abschlusse kam, und damit B zu der Gegenleistung b verpflichtet war. In entsprechender Weise zeigen die beiden Tafeln die Ergebnisse der übrigen und die beiden Mittelresultate der sämmtlichen Serien, und man ersieht, dass von den 10 Hunderter-Serien volle 8 normal verliefen, und nur bei der fünften (wo sich einmal 9) und bei der zehnten Serie (wo sich einmal 13 paare Würfe folgten) je ein Ausnahmefall stattfand, so dass also auf 1000 Spiele nur zwei strenge genommen mit dem achten Wurfe noch nicht vollendet und somit für die Berechnung nach der aufgestellten Vorschrift zu behandeln waren, — ebenso dass bei den 10 Tausender-Serien diess immer noch bei 8 der Fall war, und nur bei der ersten (wo sich einmal 13) und bei der achten Serie (wo sich einmal 15 paare Würfe folgten) je ein Ausnahmfall stattfand, so dass sogar auf 10000 Spiele nur zwei, strenge genommen, mit dem eilften Wurfe noch nicht vollendet und somit dem Specialverfahren zu unterwerfen waren.[8]) — Die Tab. I und II enthalten überdiess die sich auf Grund dieser Erfahrungszahlen m unter den im Eingange gegenwärtiger Notiz nach Nicolaus Bernoulli aufgestellten sechs Suppositionen und unter Benutzung der ihnen entsprechenden, umstehend beigefügten Hülfstafel ergebenden Spielresultate, und zwar gibt $A = \Sigma(m \,.\, \Sigma a)$ die Gesammtleistung von A, $B = n \,.\, b$ den Gesammtbetrag der von B geleisteten Zahlungen, sowie endlich $D = A - B$

---

erhebliche Veränderungen entstanden wären. — [8]) Wie selten sich überhaupt Ausnahmefälle einstellen, wird durch das Factum belegt, dass bei den sämmtlichen 40000 Würfen, welche ich zur Zeit mit dem weissen und rothen Würfel ausführte, ausser dem bereits namhaft gemachten Falle, wo sich (bei dem weissen Würfel) 15 gerade Würfe folgten, nur noch (und zwar beim rothen Würfel) Ein weiterer Fall dieser Art ergab, und eine grössere Zahl als 15

h	I		II		III		IV		V		VI	
	a	Σa	a	Σa	a	Σa	a	Σa	a	Σa	a	Σa
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	5	8	9
3	1	3	3	6	4	7	9	13	9	14	27	36
4	1	4	4	10	8	15	27	40	16	30	64	100
5	1	5	5	15	16	31	81	121	25	55	125	225
6	1	6	6	21	32	63	243	364	36	91	216	441
7	1	7	7	28	64	127	729	1093	49	140	343	784
8	1	8	8	36	128	255	2187	3280	64	204	512	1296
9	1	9	9	45	256	511	6561	9841	81	285	729	2025
10	1	10	10	55	512	1023	19683	29524	100	385	1000	3025

den auf B fallenden Gewinn oder den ihm gleichen Verlust von A. Der einfache Anblick dieser Zahlen zeigt, dass D in weitaus den meisten Fällen in einem angemessenen Verhältnisse zu den für A und B in Frage kommenden Summen steht, d. h. dass unter Befolgung der aufgestellten Vorschriften bei den meisten Serien nur mässige Gewinnste und Verluste vorkommen, wie solche bei einem Spiele auftreten müssen, wenn es Reiz haben soll, — dass sich diese Gewinnste und Verluste schon bei zehnfacher Wiederholung recht nahe ausgleichen, — dass schon 100 Spiele eine ganz rationelle Serie ergeben, und für die Praxis zehn Serien von 100 Spielen den entschiedenen Vorzug vor Einer Serie von 1000 Spielen verdienen[9]) — etc., — und ich glaube somit zum Schlusse aussprechen zu dürfen, dass sich nicht nur die von mir in weiterer Ausführung der Ideen von Cramer aufge-

gar nie erreicht wurde. — [9]) Bei Vergleichung der Mittelreihe auf Tab. I mit der ersten Reihe auf Tab. II ist der Umstand nicht zu übersehen, dass die Erwartung von B wesentlich ändert, wenn man statt 100 volle 1000 Spiele auf Eine Serie verlegt.

stellten Principien für Lösung des Petersburger-Problemes bewährt haben, sondern dass namentlich durch Vorstehendes ein neuer Beweis für den Nutzen der in früherer Zeit viel zu wenig beachteten, allerdings nicht aus mühelosen Träumereien, sondern nur aus strenger Arbeit hervorgegangenen Erfahrungswahrscheinlichkeit geleistet ist.

Ich lasse ferner eine einzelne Ergänzung zur Sonnenfleckenliteratur folgen, welche schon für die vorhergehende Nummer der Mittheilungen bereit lag, aber keinen Platz mehr fand:

602) P. M. Garibaldi, Amplitudine dell' oscillazione media mensile ed annua dell' ago di declinazione diurna in Genova per l' anno 1888 ed epoca probabile della congruenza di un minimum di macchie solari e variazioni declinometriche in esso avvenuto (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1889).

Herr Garibaldi gibt in seiner Note für die Jahre 1872—88 die umstehend folgende Tafel der in Genua erhaltenen Monat- und Jahresmittel der täglichen Variationen. — Die Jahresmittel in gewohnter Weise zur Ermittlung einer Variationsformel benutzend, erhielt ich daraus für Genua die nicht gerade unbefriedigende Formel

$$v = 6{,}43 + 0{,}045 \,.\, r \pm 0{,}48$$

welche jedoch für die sämmtlichen Jahre 1873—84 etwas zu grosse, für die sämmtlichen Jahre 1885—88 dagegen etwas zu kleine Variationen ergab, also auf einen systematischen Unterschied der beiden Gruppen hinwies. Und in der That erhielt ich aus der erstern Gruppe von Jahren

$$v = 6{,}18 + 0{,}045 \,.\, r \pm 0{,}18$$

und aus der zweiten

$$v = 7{,}18 + 0{,}045 \,.\, r \pm 0{,}26$$

Jahr	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Mittel
1872	—	—	—	—	—	13,42	12,96	12,76	12,16	10,83	7,95	4,47	—
73	7,37	7,11	11,72	13,90	10,18	11,17	10,84	10,06	9,52	8,60	6,25	4,92	9,30
74	6,23	7,69	9,77	11,47	9,88	9,35	9,77	8,61	9,25	8,03	5,29	4,26	8,30
75	4,63	4,95	8,08	10,62	8,80	8,89	8,15	8,29	7,83	6,44	4,91	3,84	7,12
76	4,44	4,62	7,09	9,50	6,87	8,80	9,01	8,07	7,32	7,16	4,86	3,70	6,78
1877	4,16	4,46	6,89	8,33	7,31	7,90	8,41	7,56	7,00	7,04	5,02	3,32	6,45
78	3,98	4,61	6,95	8,59	7,48	8,95	7,46	7,47	7,09	6,30	3,98	4,11	6,41
79	4,19	4,79	6,85	7,73	7,94	8,22	8,27	8,40	7,96	7,06	4,60	3,66	6,64
80	3,88	4,96	7,92	10,61	7,85	8,70	8,96	10,29	9,71	9,83	6,59	4,25	7,79
1881	4,19	6,71	9,21	10,01	9,23	11,02	9,81	10,10	10,82	9,07	6,28	5,45	8,49
82	4,05	6,85	9,16	11,47	11,95	9,42	8,19	9,69	10,11	9,20	7,73	4,42	8,58
83	5,76	6,47	9,64	11,71	8,94	10,44	9,36	9,60	10,74	10,88	6,80	4,71	8,75
84	6,09	8,98	11,74	12,28	9,45	10,63	8,64	8,60	10,53	9,89	6,95	5,35	9,09
1885	4,86	6,37	9,48	10,80	12,25	12,35	12,29	11,90	10,60	8,32	6,10	4,02	9,11
86	5,99	6,06	9,77	11,02	11,26	10,31	9,79	9,52	8,20	8,67	5,79	4,80	8,43
87	5,37	5,90	8,10	10,29	10,46	9,79	10,51	10,07	9,10	6,96	5,26	4,62	8,04
88	4,91	5,71	7,79	9,59	8,84	9,21	9,34	10,01	8,62	7,84	4,98	3.51	7,53

so dass die Angaben der beiden Gruppen nicht ganz homogen zu sein scheinen. Ob diess von einem Wechsel des Beobachtungsverfahrens oder von einer andern Ursache herrührt, kann ich nicht entscheiden.

Zum Schlusse füge ich noch eine kleine Fortsetzung des Sammlungs-Verzeichnisses bei:

335) Immerwährender Kalender. — Geschenkt von Prof. Wolf.

Dieser in Klein-Octav disponirte, auf Pergament geschriebene Kalender wurde von mir Ende der 70ger Jahre bei Antiquar J. A. Sprecher in Chur erstanden. Er besitzt kein Titelblatt, sondern zeigt an dessen Stelle nur die Inscription: „1580. Conradus a plantt. Burger zu chur.“ Nachher folgt der eigentliche Kalender, der für jeden Monat zwei Seiten beschlägt, und vorläufig seiner Einrichtung nach durch die Probe:

		K	L.	Jenner 31 tag	
8	4	a	1	A	beschneidung xpi
		b	2	b	Steffan acht
15	12	c	3	c	Johans acht
		d	4	d	Kindlin acht
5	1	e	5	e	Simon bisch.
	9	f	6	f	Drykünigtag
13		g	7	g	Valentin bisch.
	17	h	8	A	Erhart bisch.
2		i	9	b	
10	6	k	10	c	Paul einsidl.
18	14	l	11	d	Son im wass.
		m	12	e	Johans bapst
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

erläutert werden mag. Ein folgendes Blatt hat die Ueberschrift „Die tafel der lessy", — ein zweit folgendes „Wie vil entzwischen ist", — ein dritt folgendes „Guldin zalle", — und ein Letztes „Sontag buchstab". Unter dem vorletzten Blatt liest man in derselben Handschrift, welche der Kalender und die ihm angehängten vier Blätter zeigen: „Sebastianus Ruhemberg Burger zu Memmingen 1500 . 13 Jar", — während unter dem letzten Blatt in einer ganz andern, so ziemlich derjenigen auf dem Eingangsblatte entsprechenden Schrift unter Beifügung des Planta-Wappens (einer Bärentatze) nochmals das „Conradus a plantta. 1580" erscheint. Es ist somit der vorliegende Kalender unzweifelhaft 1513 durch einen Sebastian Ruhemberg, über den ich leider keine weitern Nachrichten finden konnte, erstellt worden und sodann 1580 in den Besitz des in Notiz 408 behandelten Conrad von Planta gekommen. — Von den nach obiger Probe in dem Kalender enthaltenen 6 Columnen gibt die vierte, welcher „Tagszalle" beigeschrieben ist, in der jetzt noch gebräuchlichen Weise die Monatstage, — die fünfte, die spätestens im 13. Jahrhundert durch Sacrobosco als Repräsentanten der Wochentage eingeführten Buchstabenfolgen: A, b, c, d, e, f, g, — und die sechste, analog wie es schon in dem Calendarium von Regiomontan (vgl. Mitth. 32 von 1873) vorkömmt, theils einige Festtage und Verweisungen, theils die Eintritte der Sonne in die Zeichen des Thierkreises. Die dritte Columne, welcher

„Lessi" beigeschrieben ist, enthält eine Folge von 27 Buchstaben und Zeichen, die sich offenbar auf die bereits erwähnte „Tafel der lessy (Aderlass-Tafel)" beziehen, indem Letztere auf ihrer Vorderseite 19 den goldenen Zahlen entsprechende Columnen zeigt, in deren jede diese sämmtlichen 27 (jedoch unter Wechsel des Anfangsbuchstabens) der Reihe nach eingetragen sind, während links die Zeichen des Thierkreises (Krebs, Scorpion und Fische je 3 mal, die übrigen je 2 mal) und rechts die Epitheta „gut, mittl, böss" (jedes 9 mal) stehen; über die nähere muthmasslich ziemlich willkürliche Anordnung dürfte es sich jedoch kaum lohnen, eigentliche Studien anzustellen, — so wenig als für die Rückseite, welche die günstigen Tage für „hüser buen, ein wib nemen, badenn, etc." auszuwählen lehrt. Die erste und zweite Columne endlich, welchen „nüwman" und „vollman" beigeschrieben sind, entsprechen dem frühern, auch in Regiomontan's Calendarium befolgten Gebrauche jede goldene Zahl den Monatstagen beizuschreiben, auf welche in dem durch sie vertretenen Jahre Neumonde oder Vollmonde fallen, und die von Ruhemberg gegebenen Zahlen weichen von denjenigen Regiomontan's fast nur dadurch ab, dass bei Erstern die Stunden und Minuten des Eintrittes nicht beigefügt wurden, doch äussert sich immerhin in kleinen Differenzen eine gewisse Selbständigkeit. Die gebrauchten Monatsnamen sind folgende: „Jenner, Hornung, Mertz, Appril, May, Brachman, Houmonat, Erst Herbstmo (augsten), And' Herbst (erst Herbst), winmon (ander Herbst), Wintermon (drit Herbst), Ande Herbst (erst mon)", so dass volle fünf Monate als Herbstmonate figuriren. Das mit „Guldin zalle" überschriebene Blatt zeigt einen Kreisring, in den die Zahlen 1 bis 19 eingetragen sind, so dass, da 1501 die goldene Zahl $g = [(1501 + 1) : 19] = 1$ besitzt, diejenige eines beliebigen folgenden Jahres durch einfaches Abzählen an dem Ringe gefunden werden kann. Entsprechend ist auf dem mit „Sontag buchstab" überschriebenen Blatte die Buchstabenfolge

$$\mathrm{c\ b\ a} \left|{\mathrm{g} \atop \mathrm{f}}\right| \mathrm{e\ d\ c} \left|{\mathrm{b} \atop \mathrm{a}}\right| \mathrm{g\ f\ e} \left|{\mathrm{d} \atop \mathrm{c}}\right| \mathrm{b\ a\ g} \left|{\mathrm{f} \atop \mathrm{e}}\right| \mathrm{d\ c\ b} \left|{\mathrm{a} \atop \mathrm{g}}\right| \mathrm{f\ e\ d} \left|{\mathrm{c} \atop \mathrm{b}}\right| \mathrm{a\ g\ f} \left|{\mathrm{e} \atop \mathrm{d}}\right|$$

in einem Kreise herum aufgetragen, so dass man ebenfalls, da 1501 im Sonnenzirkel die Nummer $s = [(1501 + 9) : 28] = 26$ oder also der Sonntagsbuchstabe *c* zukömmt, durch blosses Abzählen die Sonntagsbuchstaben der folgenden Jahre erhält. — Am interessantesten ist die mit „Wie vil entzwischen ist" überschriebene Tafel, da sie als eine der ältesten bequemen Ostertafeln zu bezeichnen sein dürfte, und ich glaube daher dieselbe sammt der auf der Rückseite beigegebenen Gebrauchsanweisung durch vollständige Aufnahme in diese Note zu allgemeiner Kenntniss bringen zu sollen. Sie bestehen in Folgendem:

		1	2	3	4	5	6
	a	b	c	d	e	f	g
1	9	9	9	9	8	8	8
2	7	7	7	7	7	7	7
3	10	10	10	10	10	9	9
4	9	8	8	8	8	8	8
5	7	7	7	7	6	6	6
6	10	10	9	9	9	9	9
7	8	8	8	8	8	7	7
8	11	11	11	10	10	10	10
9	9	9	9	9	9	9	8
10	8	8	7	7	7	7	7
11	10	10	10	10	10	10	10
12	9	9	9	8	8	8	8
13	7	7	7	7	7	7	6
14	10	10	10	10	9	9	9
15	8	8	8	8	8	8	8
16	7	7	7	6	6	6	6
17	10	9	9	9	9	9	9
18	8	8	8	8	7	7	7
19	11	11	11	10	10	10	10

„Wilt wissenn wie vil woch zwüschen dem Christag und der alten vasnacht ist, merck auf die gulden zall und uf welcher linge die guldi zal stat. Da gang hin und nimm den sontag buchstab und gang herab und wo die lingen zesammen kumpt 7.5.8 oder 9. dieselb zal ist die wochen zwischen dem Christag und der alten vasnacht, unnd die aller obrist zalle sendt die übrigen tag zu den obgenanten wuchen. Das wiste alles die tafel uss so vorgeschriben stat."

Tafel und Gebrauchsanweisung sind in Beziehung auf den julianischen Kalender und für gemeine Jahre ganz richtig und ausreichend; dagegen hätte Letztere durch die Bemerkung vervollständigt werden sollen, dass in Schaltjahren entweder (wie es z. B. die „Teutsch Astronomei" von 1545 bei einer ähnlichen Tabelle vorschreibt) für die Bestimmung der Wochen der zweite und für die Bestimmung der Supplementärtage der erste Sonntagsbuchstabe zu benutzen sei, oder, dass man durchweg den zweiten Buchstaben gebrauchen könne, dann aber im weitern wie für ein gemeines Jahr vorzugehen habe. Wendet man z. B. die erste dieser Regeln auf das Jahr 1512 an, welches die goldene Zahl 12 und die Sonntagsbuchstaben *d.c* hat, so erhält man aus der Tafel für 12 und *c* die Zwischenzeit von 9 Wochen, wozu sich für 12 und *d* noch 3 Supplementärtage ergeben; da nun Neujahr der Weihnachten in einer Woche, Ostern der alten Fassnacht in 6 Wochen folgt, so musste also Ostern in dem betreffenden Jahre $9 - 1 + 6 = 14$ Wochen und 3 Tage oder 101 Tage nach Neujahr, d. h. am 102. Tage des Jahres gefeiert werden und dieser fällt in einem Schaltjahre auf IV 11, wohin auch die Gauss'sche Formel die julianische Ostern legt. Wendet man dagegen die zweite Regel an, so erhält man zwar dieselbe Anzahl von Wochen, aber für 12 und *c* nur 2 Supplementärtage, und es wird somit Ostern auf den 101. Tag des Jahres verlegt, das aber nun als gemeines Jahr behandelt werden soll, und in einem solchen kömmt der 101. Tag ebenfalls mit IV 11 überein. Ein ganz anderes und total falsches Resultat würde aber aus alleiniger Benutzung des ersten Sonntagsbuchstabens hervorgehen, da für 12 und *d* aus der Tafel 8 Wochen und 3 Tage, folglich als Zwischenzeit zwischen Neujahr und Ostern nur 13 Wochen und 3 Tage hervorgingen, — und es wäre somit in der That absolut nothwendig gewesen, dass sich Ruhemberg über diesen Punkt ausgesprochen hätte.

336) Ein Nivellir-Tischchen. — Geschenkt von Prof. Wolf.

Eine aus einer starken Messingtafel bestehende kreisrunde Scheibe von 14^{cm} Durchmesser mit drei Fussschrauben.

337) Curvimeter mit Zifferblatt. — Angekauft.

Das Etui trägt die Aufschrift: „Le mesureur instantané des distances sur les cartes et les plans. Curvimètre à cadran et à manche F. C.," — der muthmasslich in Paris wohnende Constructeur nennt sich nicht. Das Instrumentchen selbst hat ein Laufrädchen von circa 6^{mm} Durchmesser, mit welchen man die zu messende gerade oder krumme Linie zu verfolgen hat. Seine

Bewegungen werden auf einen Zeiger übergetragen, der auf einem Zifferblatt von 3^{cm} Durchmesser spielt und nach den von mir gemachten Proben ziemlich genau einen Umlauf macht, wenn das Rädchen über einen Meter geführt wird. Das Zifferblatt zeigt zwei Theilungen: Eine äussere mit 100, und eine innere mit 80 Theilen. Bei der Erstern entspricht also ein einzelner Theil einem Wege von 10^{mm}, also bei einem Maassstab von $^1/_{100000}$ gerade einem Kilometer, — bei der Zweiten dagegen einem Wege von $12^1/_2{}^{mm}$, welche beim Maassstab von $^1/_{80000}$ ebenfalls einem Kilometer equivalent sind.

338) Hülfstafeln für die Reduction auf den Horizont. — Manuscript aus dem Nachlasse von Feer.

Dieses Manuscript besteht aus einem Octavbändchen und einem zugehörigen Heftchen von 24 Seiten. — Das Bändchen beginnt mit einem Titelblatte, auf welchem man liest: „Hülfs-Tafeln um die Reduction schiefgemessener Winkel auf den Horizont zu erleichtern, insofern die Schenkel derselben nicht über 10 Grade geneigt oder elevirt sind. Berechnet von Junk. Joh. Meis v. Teuffen im Jahr 1797"; dann folgen 14 unbeschriebene Blätter, auf welche muthmasslich die definitive Redaction der in dem später zu besprechenden Heftchen entworfenen Einleitung eingetragen werden sollte; den Schluss bilden sodann die Tafeln selbst, welche 60 Seiten beschlagen und der Reihe nach mit „Tafel für $b = 0°10'$, $0°20'$, $0°30'$, ... $10°0'$" überschrieben sind. Die erste Verticalcolumne jeder Seite enthält das Argument a, das jeweilen mit $a = 0°0'$ beginnt und dann mit dem Interval von $10'$ bis zu dem in der Ueberschrift enthaltenen Werthe von b fortschreitet, so dass die $b = 5°0'$ gewidmete Seite gerade auch mit $a = 5°0'$ abschliesst, während der leer gebliebene Raum der frühern Seiten gerade hinreichte, um dasjenige nachzutragen, was auf den entsprechenden spätern Seiten nicht mehr Platz finden konnte. Die zweite Columne gibt sodann die 7stelligen Logarithmen von $1/\mathrm{Co}\,a\,.\,\mathrm{Co}\,b$, — die fünfte die aus den Produkten $\mathrm{Tg}\,a\,.\,\mathrm{Tg}\,b$ hervorgehenden Zahlen ebenfalls auf 7 Decimalen, — die dritte, vierte, sechste und siebente endlich sind Differenz-Columnen, die durch Angabe der Veränderungen, welche die gegebenen Logarithmen und Zahlen bei Veränderung der a und b um je

1′ erleiden, die doppelte Interpolation erleichtern sollen. Die ganze Anlage ist, wenn auch die letzterwähnten Hülfsmittel einer etwelchen Kritik unterzogen werden könnten, im Allgemeinen eine geschickte und sorgfältige, und es bildet diese Tafel für ihren Berechner, welchem ich schon in Biogr. I, pag. 431—32, eine kurze Notiz gewidmet habe, ein ganz nettes Denkmal. — Das erwähnte Heftchen zeigt den Titel: „Tafeln zur erleichterten Berechnung der Reduction schief gemessener Winkel auf den Horizont, berechnet von Junker Hans Meis von Teuffen und mit einer kurzen Erläuterung von deren Gebrauch versehen und herausgegeben von Joh. Feer, Ingenieur“, womit also die damals bestehende Absicht documentirt ist, die Tafel zu veröffentlichen, — ein Plan, dessen Ausführung jedoch durch die bald darauf in die Schweiz einbrechende Revolution um so mehr verhindert wurde, als Letztere die beiden Freunde veranlasste, nach Sachsen zu expatriren. In der durch Feer entworfenen Einleitung wird zunächst hervorgehoben, wie die Anwendung des Spiegelsextanten auf trigonometrische Arbeiten immer häufiger und somit die Erstellung von Hülfsmitteln für die Reduction auf den Horizont immer wünschbarer werde, da die allerdings für einzelne Rechnungen bequeme Formel

$$Si\,{}^1/_2\,h = \sqrt{\frac{Si\,(s-a)\,.\,Si\,(s-b)}{\mathrm{Co}\,a\,.\,\mathrm{Co}\,b}} \quad \text{wo} \quad s = \frac{w-a-b}{2} \qquad (1$$

um aus dem schiefen Winkel w und den beiden Höhenwinkeln a und b den Horizontalwinkel h zu bestimmen, bei vielfacher Anwendung immerhin etwas mühsam sei, und die von Legendre (Mém. Par. 1787) gegebene Näherungsformel nur für ganz geringe Elevationen oder Depressionen ausreiche. Nachher wird sodann die Tafel von Meis besprochen und zu zeigen versucht, dass sich unter Anwendung derselben auf die Formel

$$\mathrm{Co}\,h = \frac{1}{\mathrm{Co}\,a\,.\,\mathrm{Co}\,b}\,.\,\mathrm{Co}\,w - \mathrm{Tg}\,a\,.\,\mathrm{Tg}\,b \qquad (2$$

die Reduction in allen Fällen, sowohl für w kleiner als grösser 90° und bei gleichen und verschiedenen Vorzeichen von $a < b$, leicht vollziehen lasse. Schliesslich werden mehrere Beispiele auf die angegebene Weise wirklich durchgerechnet.