

Ueber Plan- und Reliefcurven.

Von

Fr. Graberg.

Im 104. Bande des Journals f. Math. führt Schröter einige Erzeugungsweisen von ebenen Curven 3. O. auf Büschel der Polarcuren in Verbindung mit einem linearen Strahlbüschel zurück. Allein solche Auseinandersetzungen geben noch kein zusammenhängendes Bild von dem Verlauf der Curven und deren Anordnung in der Fläche, wie es der Vorstellung geläufig sein muss, wenn sie Curven gleich den Strahlen beim räumlichen gestalten verwenden soll. Frühere Arbeiten in dieser Vierteljahrsschrift ergänzend, erlaube mir daher eine Zeichentafel vorzulegen, welche Curven verschiedener Ordnungen in Plan und Relief vergegenwärtigt. Zur Verständigung sei mir gestattet, im Eingang der Erläuterungen zu derselben die Grundanschauung des Zeichenverfahrens darzustellen und den Zeichenwerth der Linien zu begründen.

Einleitung.

1. Grundanschauung. Zeichen sind sichtbare Linien, welche sich auf Vorstellungen beziehen. Im Dreieck bedingen die Richtungen der Seiten deren gegenseitige Begrenzung und bestimmen Massverhältnisse. Jedes sichtbare Dreieck zeigt diese Massverhältnisse, wenn dieselben an vorausgegangenen Beispielen durch

Messung geprüft und durch Blickbewegungen eingeübt sind. Dann vermitteln die Massverhältnisse die Beziehung der sichtbaren Linien zu der räumlichen Vorstellung. Das Dreieck dient als Masszeichen.

Masszeichen deuten auch Richtungen und Begrenzungen von Linien, mithin Massverhältnisse im Relief durch Linien des Planes an, wenn man sich vorstellt, dass jedem Punkt des Planes die Reliefpunkte des Lothes entsprechen, das in dem gegebenen Planpunkt auf der Zeichenebene, dem Plan errichtet wird.

Beschränken wir uns auf den Raum der Erfahrung, so können wir eine unendlichferne Zielebene als Ortsfläche der unendlichfernen Geraden des Raumes betrachten. Diese Zielebene enthält die gemeinsamen Ziele aller Bündel von Parallelen des Raumes; die Geraden jener Ebene sind die Zeilen der Büschel paralleler Ebenen. Den Plan denken wir uns wagrecht; das Ziel der Lothe zu demselben ist der Zenit. Die Zielebene ist demnach als unendlichferne lothrechte Wand zu denken.

Eine Reliefgerade wird im Plan durch die Spur ihrer Lothebene und den Stosspunkt ihrer Richtung bezeichnet. Letzterer ist der Scheitel des Spurenbüschels zu dem Ebenenbüschel, das die Reliefgerade zur Axe hat.

Zwei windschiefe Reliefgerade werden durch einen Regelstrahl verbunden, der beide trifft. Ist die Höhe des einen dieser Treffpunkte über dem Plane bekannt, so ist mit der Richtung und dem Stoss des Regelstrahles auch die Höhe des andern Treffpunktes gegeben, mithin die Lage aller 3 Reliefgeraden zum Plan bestimmt. Da die räumlichen Betrachtungen im Allgemeinen die An-

nahme einer solchen Höhe nicht erfordern, so bleibt sie dem Leser überlassen.

Die sichtbaren Linien des Planes bilden die Grundlage, auf welcher die Reliefgestalteten gebaut sind; die gedachten Linien der Zielebene deuten die Ziele an, nach welchen sich die Linien und Flächen des Reliefs richten. Zeichnend bauen wir also auf die Linien des Planes das Relief, wie sich in Folge der Tiefenwahrnehmung die Flächenanschauung des Sehfeldes zur räumlichen Auffassung erweitert; nur mit dem Unterschiede, dass wir anstatt der zwei zusammenspielenden Augenaxen eine Senkrechte zur Ebene des Planes als einheitliche Masslinie verwenden.

An Plan- und Reliefgestalten unterscheiden wir das feste Gerüst der Masslinien und -flächen von den beweglichen Spielelementen. Zu jenen gehören Leitlinien, Scheitel und Axen für die Büschel, Bündel und Flächen, deren Elemente gleiten, sich drehen, rollen oder schrauben und dabei durch Schnitt oder Umhüllung die Ortlinien und Ortflächen erzeugen, welche selbst wieder als leitende Massgestalten oder als wechselnde Theil- oder Zeigelemente aufgefasst werden können.

2. Zeichenwerth der Linien. Die sichtbare Linie besitzt scheinbar weder Schärfe noch Allgemeinheit des Begriffes, welche wir mit Namen und Zahlen zu verbinden gewohnt sind. Jedoch dient die Linie nicht als Zeichen, insofern sie sichtbar ist, Lichtstrahlen zu ihrer Wahrnehmung dienen, sondern weil sie einen Zug der Hand, eine Tastbewegung darstellt und bei dem Leser eine entsprechende Blickbewegung anregt. Heymans hat im 12. Jahrgang der Vierteljahrsschrift für wissen-

schaftl. Philosophie gezeigt, dass auch die Blindgeborenen aus ihren Tastbewegungen alle wesentlichen Eigenschaften der Ausdehnung erkennen, die wir mit dem Raumbegriff verbinden. Folglich sind unsere Organbewegungen die eigentliche Grundlage unserer Raumvorstellungen. Diese Organbewegungen der Hand und des Auges werden beim Zeichnen und beim Lesen von Zeichnungen vervielfältigt, dadurch die Raumvorstellungen im Zusammenhang befestigt.

Ohne Zweifel ist die Combination allgemeiner Symbole, der Buchstaben, ein wesentliches Hülfsmittel zur Ausbildung der Raumschauung. Aber die Verwendung der Buchstaben setzt Vorstellungen von Linien voraus. Strahlen, Curven, Flächen und Gestalten aus denselben bilden stets den ursprünglichen Inhalt der Raumbegriffe, während Buchstaben nur vermöge der Association von Raum- und Zahlbegriffen räumliche Ausdehnungen bezeichnen, weil man Buchstaben erst braucht, um eine Mehrheit von Linien (bez. Punkten, Flächen) zu zählen, zu ordnen.

Nun lernt man durch vielfach in gleicher Folge wiederholte Ausführung die Bedeutung der Linien, die Reihenfolge ihrer Verbindung auch ohne Buchstaben erkennen. Hiebei achtet man weit mehr auf den ganzen Zeichenvorgang, als bei der Combination der Buchstaben, prägt sich daher die ganze Anordnung der Strahlen, den ganzen Verlauf der Curven vollkommener ein. Solche feste Aneignung bleibt nur so lang in speziellen Formen befangen, als die Uebung nicht vielseitig genug ist, um das Wesentliche der Raumbegriffe abzuklären. Dann aber, wenn der Blick den Zug der Linien, den Ort der Schnitte sicher schätzt, sind dieselben nicht nur in Lehrsätzen und

Formeln vorhanden, sondern die Linien werden als solche auch richtig verwendet.

An Stelle der Buchstaben treten also beim Zeichnen allmählig die Linien, solche werden unmittelbar combinirt. Die Reihenfolge der Blickbewegungen, dadurch geregelt, erlangt allgemeine Bedeutung eines räumlichen Begriffes; die Zeichnung, der Ausdruck dieser Blickbewegungen, erscheint als Sinnbild für denselben. In solcher Weise verstanden, sind sichtbare Linien, wie Namen und Zahlen, Sinnbilder für Begriffe, weil nicht ihre sinnliche Erscheinung, sondern die geistige Thätigkeit, welche sie anregen, ihre Bedeutung bestimmt.

Wie nun die Masszeichen beim Ausdruck räumlicher Gedanken zusammenwirken mit der Buchstabenschrift, welche die Reihenfolge und Verbindungsweise der Linien anzeigt, mit Benennungen und Satzbau, möge die nachstehende Darlegung zeigen. Die Wahl eigener Ausdrücke wolle der Leser mit dem Bestreben entschuldigen, auch in Worten den thatsächlichen Vorstellungen gerecht zu werden; fremdartige Vorstellungen, wie den Sehkegel, fernhaltend, kurz und bündig zu sagen, worauf man in jedem gegebenen Fall zu achten hat. Je genauer Linien, Ziffern, Worte die wirklichen Vorstellungen spiegeln, um so rascher vollzieht sich im Bewusstsein der Gedankenverlauf.

Die Bedeutung gezeichneter Linien wird noch vermehrt, wenn man sich vorstellt, dass dieselben ihre Lage oder Gestalt verändern. So können wenige Linien und Punkte ein über das ganze Zeichenfeld verbreitetes, ja bis ins Unendliche reichendes Netz andeuten. Die sichtbare Figur wird dadurch zum Anhalt für manigfaltige Formen der Blickbewegung, die alle nach gleichartigen

Massverhältnissen erfolgen, vermöge welcher der Blick die Zeichenfläche beherrscht. Aus diesem Grunde wollen wir nicht die Figuren, sondern die Felder¹⁾ unserer Tafel voneinander unterscheiden und diese nach ihrem Inhalte zu Stäben aneinander reihen. Jedes Feld bedeutet einen Massplan, eine Ebene, über welche der Blick nach bestimmten Massverhältnissen hingeleitet. Sofern dabei die Linien zugleich im Relief gedacht werden, bezeichnet das Feld einen Massraum. Die Beziehung zwischen Plan und Relief, für die Zeichnung massgebend, verliert nämlich ihre Bedeutung, wenn alle Linien im Relief gedacht sind.

Unsere Tafel zerfällt in 2 Stäbe. Die Felder des ersten enthalten Plancurven, die des zweiten dagegen stellen Relieffcurven dar. Um das Wesentliche jeder Figur deutlich zu erhalten sind Linien und Buchstaben gespart, bleiben die einfacheren Operationen den Andeutungen des Textes und der Selbstthätigkeit des Lesers überlassen, wie das auch bei analytischen Darstellungen geschieht. Denn der Werth der Linien steigt, wie derjenige der Zahlzeichen, mit dem Grade der Abstraction, der ihre Anschauung begleitet.

Stab I. Plancurven.

Feld I₁. Plancurven verschiedener Ordnungen im Strahlbüschel.

1. Ortstrahl. Liegen die Leitungen $|b_1, b_2|$ zweier Strahlbüschel $.A_1, A_2.$ in dem Plane, so schneiden sich $|b_1, b_2|$ in $.B.$, was bezeichnet wird durch:

$$|b_1 .B. b_2|$$

¹⁾ „Die Fläche, in welche das Auge alle gleichzeitig sichtbaren Punkte in der Richtung der Visirlinien verlegt, nennen wir das Sehfeld.“ Wundt. Physlg. Pschlg., 2. Aufl. Bd. II. pg. 93.

Die Leitungen $|b_1, b_2|$ werden auch von den Strahlen eines Theilerbüschels $.C$. im Plane getroffen und nach bündigen Reihen getheilt, wenn $|CB|$ Theiler für beide Reihen ist. (Zwei Balken, die sich in derselben Ebene kreuzen, nennt man «bündig». «Perspectiv» wird vermieden, weil der Ausdruck zu sehr an die ältere, ungenaue Vorstellung des Sehprozesses erinnert.)

Durch das Theilerbüschel $.C$. sind die Leitungen $|b_1, b_2|$, damit auch die Zeigerstrahlen der Büschel $.A_1, A_2$. auf einander bezogen; und zwar linear, wenn der Scheitel des Theilerbüschels $.c$. auf dem Bindestrahl $|A_1 A_2|$ liegt, dagegen polar, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Liegt nämlich $.c$. auf $|A_1 A_2|$, so kann dieser Punkt den Stoss einer Reliefgeraden $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2|$ mit dem Plane sein; die Strahlen $|c'|$ des Theilerbüschels $.c$. sind dann Spuren der Spielebenen im Ebenenbüschel $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2|_\gamma$ und bezeichnen auf den Leitungen $|b_1, b_2|$ die Stosspunkte $.b_{1i}, b_{2i}$. entsprechender Schnitte des Ebenenpares $[\mathfrak{A}_1 b_1, \mathfrak{A}_2 b_2]$ mit der Spielebene $[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 c']$. Die Ebenen $[\mathfrak{A}_1 b_1, \mathfrak{A}_2 b_2]$ haben $|b|$ gemein; auf dieser treffen sich die Spielstrahlen der Büschel $.A_1, A_2$., die derselben Spielebene von $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2|_\gamma$ angehören. Im Plan erscheint $|b|$ als Spur der Lothebene durch diese Reliefgerade; dieselbe ist der Ortstrahl für die Schnitte entsprechender Spielstrahlen der Büschel $.A_1, A_2$., welche durch das Theilerbüschel $.c$. linear aufeinander bezogen sind und sich gegeneinander in bündiger Lage befinden.

2. Polarortcurve. Liegt der Scheitel $.C$. des Theilerbüschels neben dem Bindestrahl $|A_1 A_2|$, so bezeichnen die Theilstrahlen auf dem letztern eine Punktreihe $|c_i|$. Die Leitungen $|b_1, b_2|$ und die entsprechenden Pare der Spielstrahlen aus den Büscheln $.A_1, A_2$. bilden

ein Vierseit, in welchem die Theilstrahlen $|c'_i|$ Diagonalen sind, denen die Ortstrahlen $|b'_i|$ zu den Schnitten $|A_1 A_2 . c_i . c'_i|$ als 2. Diagonalen entsprechen. Auf jedem Ortstrahle $|b'_i|$ liegt ausser $.B$. noch ein Punkt $.e_i$. der Polarortcurve, $(\varepsilon)^2$, welche durch die Schnitte entsprechender Spielstrahlen der Büschel $.A_1, A_2$. erzeugt wird und deren polare Massverhältnisse durch die involutorische Theilung des Bindestrahles $|A_1 A_2|$, nämlich die Punktepaare $.A_1 B_2, A_2 B, c_i b_i$. begründet sind. Dieselbe Theilung $|A_1 B_2, A_2 B_1|$ bedingt mit den Zeigerbüscheln $.B, C$. eine zweite Polarortcurve $(\varepsilon_1)^2$. Wie Feld I_1 zeigt, geht $(\varepsilon_1)^2$ durch $.B, C$., ferner durch die Schnitte $|A_1 B . e_1 . B_2 C, A_1 C . e_2 . B_2 B|$ und die analogen, welche sich aus $.A_2 B_1$. ergeben.

Trifft $|BC . c_0 . A_1 A_2|$ und ist $.b_0$. der involutorisch entsprechende, so gehen durch diesen die Tangenten zu $.B, C$. Zeigt die involutorische Theilung Doppelpunkte, so wird die Polarcurve $(\varepsilon_1)^2$ in denselben von der Leitung $|A_1 A_2|$ geschnitten.

3. Trilinear- und Bipolarortcurven. Die angeführten Masszeichen dienen auch dann, wenn das Zeigerbüschel $.C$. sich zu einer Tangentenschar erweitert, welche durch dieselbe involutorische Theilung von $|A_1 A_2|$ bedingt wird, wie das Strahlbüschel $.B$. Die Ortcurve $(\varepsilon_2)^3$ ist dann trilinear, wenn die Hüllcurve der Tangentenschar die Leitung berührt; dagegen wird jene Curve $(\varepsilon_3)^4$ bipolar, sofern diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Das Feld I_1 unserer Tafel lässt nun diese stufenweise Entstehung der Curven im Büschel $.B$. von den Ortstrahlen $|b'|$ bis zur Curve $(\varepsilon_3)^4$ übersehen, gestattet den Verlauf dieser Curven zu verfolgen, dieselben mit-

einander zu vergleichen, deutet die verwandten Curven gleicher und höherer Ordnungen an, welche sich in dem Plane unter analogen Annahmen denken lassen. So ist $.B.$ Doppelpunkt für $(\varepsilon_2^3, \varepsilon_3^4)$, denn die Strahlen, welche den Tangenten aus $.B.$ an die Hüllkreise $(k, k_1)^2$ involutorisch entsprechen, stellen die Tangentenpare zu $.B.$ dar. Aus jedem Schnittpunkt $|t_b . c_i . A_1 A_2|$ gehen an $(k)^2$ noch eine, an $(k_1)^2$ noch 2 Tangenten, welche auf der entsprechenden Tangente des Doppelpunktes noch einen, bez. noch 2 Punkte bestimmen. Dieses Masszeichen gilt für alle Strahlen des Büschels $.B.$ und zeigt jeweilen den Grad der Ortcurve an, indem bei der Trilinearcurve je nur ein Punkt auf einem solchen Strahle liegt, bei der Bipolarcurve dagegen deren 2 vorkommen.

Liegt $.B.$ innerhalb des Hüllkreises, so wird der Doppelpunkt imaginär, für Punkte des Hüllkreises selbst sinkt die Ordnung der Curve um 1 Grad. Den Punkteparen der Leitinvolution entsprechen Tangentenpare, deren Schnitte für jede der 3. Zuordnungen jener Punkte auf einer Massdiagonale $|d|$ liegen. Diese wird nämlich durch 2 Tangentenpare bestimmt und ist Ort des Bindepunktes für jedes weitere Tangentenpar, das von dem Pole der Massdiagonale zu $(k)^2$ aus projectiv getheilt wird. Kreuzen sich die Reihen der Leitinvolution, so bezeichnen die Schnitte der Massdiagonale mit dem Hüllkreis die Tangenten, welche die Doppelpunkte jener Theilung anzeigen. Dieselben gelten als einfache Punkte der Trilinearcurve, dagegen als doppelte der Bipolarcurve.

Das Tangentenpar aus $.B.$ an $(k)^2$ trifft die Massdiagonale je in einem Punkte von $(\varepsilon)^3$ und die 2. Tangente aus demselben an $(k)^2$ bezeichnet auf der Leitung den Richtpunkt einer Tangente zu $.B.$ Den 3. Punkt

. D . hat $|d|$ mit der Leitung gemein, welcher vermöge der 2. Tangente aus . D . an $(k)^2$ dem Berührungspunkt desselben zugeordnet ist.

Dem Büschel . D . entsprechen die Kreuz- und Laufinvoluntionen der Leitung, deren Grenze durch die 2. Tangente aus . D . an $(k)^2$ bezeichnet wird. An dieser Grenze zerfällt $(\varepsilon)^3$ in das zusammenfallende Geradenpar $|BD|$ und die Massdiagonale selbst. Die Tangenten des Doppelpunktes . B . liegen nämlich in diesem Falle beide auf $|BD|$, die Curvenzüge, die sich sonst in . B . kreuzen, fallen verkehrt aufeinander.

Von den übrigen Strahlen des Büschels . D . ist noch $|BD|$ als Massdiagonale hervorzuheben, weil unter solchen Umständen das Tangentenpar aus . B . an $(k)^2$ zugleich für . B . als Doppelpunkt der Trilinearcurve gilt.

Da die Massdiagonale die Theilung auf der Leitgeraden $|A_1A_2|$ bestimmt und diese zugleich für Polar-, Trilinear- und Bipolarcurven $(\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4)$ massgebend ist, so können der Hüllkreis $(k)^2$ und das Büschel der Massdiagonalen zugleich als Masszeichen für alle diese Curven gelten. Directer erhält man die Bipolarcurve mit Hilfe des Punktsystemes, welches die Tangentenpare von $(k_1)^2$ auf der Leitung $|A_1A_2|$ bestimmen. Wird diese zur Zeile des Planes, so führt das Zeichenverfahren auf die bekannten Fusspunktencurven des Kreises.*)

Das Masszeichen des Feldes 1 erlangt weitere Bedeutung, wenn die Tangenten der Hüllcurve nicht als Zeiger verwendet, sondern als Theiler zwischen $|b_1, b_2|$ eingeschaltet werden und diese Geraden dann Leitungen von Zeigerbüscheln oder Zeigertangentenscharen sind.

*) Diesen Ortcurven (ε) stehen Hüllcurven gegenüber, welche eine Doppeltangente $|b|$ besitzen.

Alsdann entstehen Curven höherer Ordnung. Diese weisen den erwähnten Curven analoge Verhältnisse auf, was indessen hier nicht weiter auszuführen ist.

4. Reliefbau. Dagegen gedenken wir der Reliefgestalten, welche auf unseren Massplan sich bauen lassen.

a. Ortebene. $.B.$ sei der Stoss einer Reliefgeraden $|b|$. Diese bestimmt mit $|b_1, b_2|$ die Leitebenen $[\beta_1, \beta_2]$. Die Axe des Theilebenenbüschels $|c|\gamma$ stosse in $.c.$ auf den Bindestrahl $|A_1 A_2|$ im Plan, in $.c_1, c_2.$ durchbohre dieselbe $[\beta_1, \beta_2]$. Die Spuren der Spielebenen $[\gamma]$ theilen dann $|b_1, b_2|$ so, dass die entsprechenden Zeiger $|a'_1, a'_2|$ der Büschel $.A_1, A_2.$ auf dem Ortstrahle $|b_i|$ des Büschels $.B.$ zusammentreffen. Indessen schneidet jede Zeigerebene $[A_1 c_1 a'_1, A_2 c_2 a'_2]$ die Leitebene $[\beta_1, \beta_2]$ in einem Strahlbüschel $.c_1, c_2.$ und die entsprechenden Zeiger treffen auf $|b|$ zusammen.

Die Reihen $|b_i, b|$ verbindet $.B.$ und die Strahlen durch entsprechende Punktepaare treffen im Schnitt $|A_1 c_1 .\mathfrak{B}. A_2 c_2|$ der Zeigeraxen zusammen. Dieser $\mathfrak{B}.$ liegt in der Ortebene $[b b_i]$ und durchläuft den Schnitt $[A_1 A_2 c|\mathfrak{B} b_0|b b_i]$, wo $|A_1 A_2 .b_0 . b_i|$; wenn $|c|$ das Büschel $.c|c_1 B_1|$ durchläuft.

b. Ortkegel. Liegt der Scheitel $.C.$ des Theilerbüschels im Plane neben dem Bindestrahl $|A_1 A_2|$, so ist er Pol einer Curve $(\varepsilon)^2$, auf welcher die entsprechenden Zeiger der Büschel $.A_1, A_2.$ zusammentreffen. Die Axen $|A_1 c_1, A_2 c_2|$ der Zeigerebenenbüschel können sich in diesem Falle nur dann in $\mathfrak{B}.$ treffen, wenn derselbe auf $|b|$ liegt und die Axe des Ordenbüschels aufnimmt. Mit $(\varepsilon)^2$ als Leitcurve bestimmt dann $\mathfrak{B}.$ einen Ortkegel $\mathfrak{B}(\varepsilon)^2$.

c. Ortregelflächen. Im Allgemeinen ist $|c|$ Regelstrahl zu den windschiefen Zeigeraxen $|A_1 c_1, A_2 c_2|$. Die

entsprechenden Zeiger in $[\beta_1, \beta_2]$ dagegen liegen in derselben Spielebene des Theilerbüschels $|c|$, treffen sich deshalb auf $|b|$ und bezeichnen dadurch die Richtung eines Regelstrahles $|e_i|$ durch $.e_i.$ auf der Leitcurve $(\varepsilon)^2$, der die $|A_1 c_1, A_2 c_2|$ trifft. Die Regelstrahlen $|e_i|$ bilden eine Schar, welche die Leitungen $|A_1 c_1, A_2 c_2, b|$ schneidet und mit ihnen auf einer polaren Regelfläche $\|A_1 c_1, A_2 c_2, b\|^2$ liegt.

Legen wir nun das Büschel von Curven steigender Ordnung $(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^3, \varepsilon_3^4)$ zu Grunde, welches durch die involutorisch getheilte Leitung $|A_1 B_2, A_2 B_1|$ bestimmt, durch das Polarstrahlbüschel $.B^2$. einerseits, das Büschel $.C^2$. oder die Tangentenscharen $(k_1, k_2)^2$ anderseits gezeigt wird. Die Strahlen des Büschels $.B^2$. bestimmen mit der Reliefgeraden $|b|$ ein polares Ebenenbüschel $|b|\beta^2$, ein Reliefpunkt $.C$. bestimmt mit den Strahlen von $.C^2$. ein zweites Ebenenbüschel $|c|\gamma^2$, mit den Tangenten eines Hüllkreises $(k, k_1)^2$ eine Kegelfläche $.C(k, k_1)^2$.

Liegt nun $.C$. in $[b B C]$, so wird, wie oben $|c .B. b|$ die Spitze einer Kegelfläche, welche $(\varepsilon_1)^2$ zur Leitspur hat. Bei allgemeiner Lage von $.C$. dagegen; insbesondere, wenn die Zeigebenen $[\gamma]$ Kegel einhüllen, entsteht durch die parweisen Schnitte der Zeigebenen $[\beta, \gamma]$ eine Regelfläche. In der Hülfebene $[C b]$ zeigen die Schnitte von $[\gamma]$ auf $|b|$ die Richtpunkte $.b_i.$ der Regelstrahlen $|e_i|$ zu den Stosspunkten $.e_i.$ auf $(\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4)$. Solche Richtpunkte $.b_i.$ sind einfach durch die Zeigebenen des Büschels $|c|\gamma^2$ bestimmt; dieselben gelten doppelt für die Pare der Berührebenen an die Zeigerkegel $.C(k, k_1)^2$, welche ihren Schnitt mit $[C b]$ gemein haben. Jedem Zeiger des Büschels $.B$. entspricht auf der Trilinear-

curve ein Punkt, auf der Bipolarcurve dagegen ein Punktepar; aus gleichem Grunde erhält man auf $|b|$ für $(\varepsilon)^3$ einfache, für $(\varepsilon)^4$ geparte Richtpunkte. Es ist somit $|b|$ für die polare Regelfläche einfache Leitung, für die trilineare dagegen Doppelleitung, für die bipolare Quadrupelleitung der Zeigerschar. Doch enthält jede Büschelebene $[\beta_i]$ ein Par Richtpunkte, in welchen mit den Regelstrahlen derselben auch je ein Regelstrahl ausser ihr zusammentrifft. Die Strahlenpare derselben Büschel Ebene zeigen, dass die Regelfläche nach einer Polarcurve gebrochen ist, welche durch die Doppelpunkte der Leitung und $.C.$ geht. Der Fusspunktencurve eines Kreises entspricht ein Kreis als Doppelcurve der Regelfläche.

d. Meridianflächen. Das Ebenenbüschel $|BC|_{\mu}$ ergibt eine Meridianfläche von der Ordnung der Plancurve, wenn $|BC|$ durch den Mittelpunkt der $|A_1 A_2|$ berührenden Hüllcurve geht und die Massdiagonale zu der Richtung dieses Durchmessers conjugirt ist. Vermöge dieser Beziehung durchläuft nämlich die Massdiagonale während der Drehung der Meridiane eine Ebene $[\delta]$, die Tangenten an ihre Schnitte $|d.k_p.k|$ mit dem Meridian der Polarfläche $(K)^2$, welche durch die Umdrehung der Hüllcurve $(k)^2$ um $|BC|$ entsteht, beschreiben einen Kegel, dessen Spitze $.D_p.$ Pol der Diagonalebene $[\delta]$ ist. Einen gleichartigen Kegel mit der Spitze $|BC.c.A_1 A_2|$ durchläuft die Leitgerade. Die Kegelflächen $\|D_p, c\|_k^2$ sind durch ihre gemeinsame Axe $|BC|$ miteinander verbunden, schneiden sich daher nach einer Polarcurve $(\varphi)^2$,¹⁾ deren Ebene zu $|BC|$ conjugirte Lage hat, wesshalb der Mittelpunkt auch dieser Polarcurve in die gemeinsame Axe

¹⁾ Eigentlich gibt es zwei $(\varphi)^2$; die Lage von $.B.$ zu $.c, D_p.$ entscheidet, welche von beiden zu verwenden sei.

$|BC|$ fällt. $(\varphi)^2$ ist eine Zone aller Meridianflächen, welche das Ebenenbüschel $|BC|_\mu$ ergibt. Auf der Polarfläche $(E)^2$ ist diese Zone einfach. Auf der Trilinearfläche $(E)^3$ wird $(\varphi)^2$ durch die Zeile ihrer Ebene, die sie mit der zu ihr parallelen Diagonalebene $[\delta]$ gemein hat, zum trilinearen Schnitt ergänzt. Auf der Bipolarfläche $(E)^4$ ist $(\varphi)^2$ Doppelcurve.

Ist die Massdiagonale nicht conjugirt zum Durchmesser $|BC|$, so wird ihre Drehung am zweckmässigsten durch Polarkegel zu den Hüllflächen $(K)^2$ geregelt. Solche Kegel schneiden $(K)^2$ nach Paaren dem Durchmesser conjugirter Polarcurven und deren Polarkegel $\|D_{p1,2}\|^2$ ergeben auf dem Berührkegel der Leitungen $\|c\|^2$ 2 (4) Zonen $(\varphi)^2$, denen auch Doppelmeridiane entsprechen. Die Strahlen des Diagonalenkegels weisen die diametralen Gegenpunkte verschiedener Zonen von $(K)^2$ demselben Meridiane von $(E)^{4,6,8}$ zu.

Die trilinearen Doppelmeridiane kreuzen sich ausser in $.B.$ noch in einem zweiten $.B_I.$ der Axe $|BC|$. Der Berührkegel der Leitungen zeigt nämlich durch die diametralen Gegenstrahlen der letztern auf dem Kegel der Massdiagonalen eine Polarcurve $(\varphi)_I^2$. Die zweite Tangente aus $\varphi_I.$ an $(k_i)^2$ bezeichnet auf der Axe $.B_I.$, welcher allen Trilinearmeridianen gemein ist. $|cA_{II}.c^*.$ $\varphi_{II}B_I|$ ist $.c.$ involutorisch zugeordnet; das Tangentenpar aus $.c^*$ an $(k_i)^2$ bezeichnet mithin auf $|BC|$ zwei Pole $.B_{II,1,2}$ für sämtliche bipolaren Doppelmeridiane.

Bedenken wir, dass $.B.$ für Doppelmeridiane zweifacher Doppelpunkt ist, so ergeben sich für Meridianflächen aus bipolaren Doppelmeridianen 4 Doppelpunkte auf der Axe, für solche Flächen aus trilinearen Doppelmeridianen 3 Doppelpunkte auf derselben. Selbstver-

ständig kann die Fläche aus polaren Doppelmeridianen nur 2 Doppelpunkte aufweisen, da jeder von ihnen für die Polarcurve selbst nur als einfacher Punkt gilt.

Von dem Ortstrahle ausgehend, hat die Betrachtung des Massplanes I_1 zu den Polar-, Trilinear- und Bipolarcurven geführt, auf welche die entsprechenden Kegel- und Regelflächen gebaut wurden, während das Ebenenbüschel die einfachen und doppelten Meridianflächen lieferte. Zu diesen Gestalten bieten die Curven des Massplanes nicht nur einzelne Angaben, sondern stetig sich entwickelnde Vorstellungen. Wir ersehen daraus, wie die einzelnen Curven verlaufen, wie dieselben sich über die Fläche vertheilen, ineinander verwandeln, erschliessen mit Hülfe dieser Vorstellung Gestalt, Anordnung und Verwandlung der Flächen im Relief.

Feld I_2 . Trilinearcurven im polaren Curvenbüschel. Tritt an die Stelle des Polarstrahlbüschels B^2 . ein Polarcurvenbüschel, so bleiben dabei die Massverhältnisse unverändert. Wir erhalten daher aus der Verbindung mit einem linearen Strahlbüschel eine Trilinearcurve, aus derjenigen mit Polarbüscheln bei gemeinsamer Leitung Bipolarcurven. Um Wiederholungen zu vermeiden, beschränken wir uns von nun an in gegenwärtiger Arbeit auf die Betrachtung von Trilinearcurven, nachdem oben die verwandten Gestaltungsverhältnisse der Bipolarcurven angedeutet worden. Aus ähnlichen Gründen kommen hier nur Curvenbüschel mit 4 reellen Scheiteln in Betracht. Die von Schröter a. a. O. besprochenen Erzeugungsweisen der Trilinearcurven lassen sich nun wie folgt zusammenfassen.

1. Leitungsdreiseit. Diese 4 Scheitel sind selbst gegeben, wenn die Strahlentrippl von 3 linearen Büscheln

$.A_{1,2,3}$. durch einen Theilstrahl so auf einander bezogen werden, dass dieselben in einem Punkt zusammentreffen. Ist im Feld I_2 $|a'_{1i}|$ ein Strahl des Büschels $.A_1.$, welchem $.b_{1i}$. der Leitung $|b_1|$ zugehört, so bezeichnet das Theilerbüschel $.b_{1i}$. auf den Leitungen $|b_2, b_3|$ die Richtpunkte eines Zeigerpares aus den Büscheln $.A_2, A_3.$, welche die Polarcurve $(A_2 A_3 B_1 D e_i)^2 = (\varepsilon_i)^2$ erzeugen, wobei $|b_2 . B_1 . b_3|$, $|A_2 B_2 . D . A_3 B_3|$ mit $.A_2, A_3.$ die 4 Scheitel des Curvenbüschels $(A_2 A_3 B_1 D)^2$ bilden, dem die Reihe $|b_1|$ als Polort entspricht. Die Schnitte $|a'_{1i} . e_{1,2} . \varepsilon_i^2|$ gehören der Ortscurve $(A_1 A_2 A_3 D B_1 B_2 B_3)^3 = (\eta)^3$ an. Diese ist trilinear, weil auf jedem Zeiger 3 Punkte der Curve liegen. Die 2 Strahlen jedes Polarbüschels $.b_{1i}^2.$, welche $.e_{i1}, e_{i2}$. liefern, ordnen die Zeigerpare von $.A_2, A_3.$ dem $|a'_{1i}|$ von $.A_1.$ zu.

2. Zeigervierseit. Sind die Büschel $.A_1, B_1.$ durch die gemeinsame Leitung $|b_1|$ miteinander verbunden, dienen die Strahlen von $.B_1.$ als Leitungen für ein Büschel $.A_3.$ und ist das letztere durch das Theilerbüschel $.B_2.$ vermöge der Leitung $|b_2|$ mit dem Büschel $.A_2.$ verbunden, so bedingen $.A_2, A_3.$ ein Polarbüschel, dessen Schnitt mit dem Linearbüschel $.A_1.$ eine Trilinearcurve gibt. Umgekehrt bedingt das Büschelpaar $.A_1, A_3.$ vermittelt des Poles $.B_1.$ den Leitungen $.B_2.$ und des Linearbüschels $.B_2.$ dieselbe Curve. Andererseits entsteht bei Vertauschung der Zeiger- mit den Leitungsbüscheln $.B.$ eine zweite Trilinearcurve. Die ganze Gestaltung in's Auge fassend, kann man sich daher ein Zeigervierseit mit 2 Gegenecken auf festen Leitungen gleitend vorstellen. Für jedes Curvenbüschel dieser Erzeugungsweise gilt, wenn man beispielsweise an dem erstbeschriebenen Verfahren festhält: $|b_2 . E_1 . B_2 A_3|$; $|b_2 . b_{20} . B_2 B_1|$, $|A_2$

$b_{20} . E_2 . A_3 B_1$]; es sind daher: $.A_2, A_3, E_1, E_2$. die vier Scheitel des Curvenbüschels.

3. Leitungsvierseit. Dem veränderlichen Vierseit der Zeiger mit dem festen Leitungspar steht ein festes Vierseit von Leitungen und ein Par Zeigerbüschel gegenüber. Jedes der beiden Leitungspare $|b, d|_{1,2}$, in welche man das Vierseit zerlegen kann, wird durch ein Strahlbüschel $.B_{1,2}$ in 2 Punktreihen getheilt, die durch die Schnitte $|b . E . d|_{1,2}$ verbunden sind. Treffen sich die Zeigerpare von $.A_1, A_2$., nach den Reihen $|b_1, b_2|$ gerichtet, auf den entsprechenden Bindestrahlen der Reihen $|d_1, d_2|$, so gehören diese Schnitte einer Trilinearcurve $(\eta)^3$ an. Jedem Zeiger $|a'_i|$ entspricht nämlich eine Polarcurve $(A_2, d_{1i}, E_2)^2$, welche auf jenem das Punktepar anzeigt, das $.A_1$ zum Trippel ergänzt. Auch in diesem Falle kann dieselbe Curve durch 2. Polarbüschel erhalten werden, je nachdem man von den Zeigern $.A_1, A_2$. ausgeht; ebenso entsprechen denselben Grundelementen je nach der Zuordnung der Leitungen noch weitere Ortcurven. Die anfänglich beschriebene Erzeugungsweise beispielsweise festgehalten, ergeben sich nebst $.A_2, E_2$. noch $|d_2 . E_4 . A_2 B_2|$; $|d_1 . D . d_2, D B_2 . b_{20} . b_2|$; $|d_1 . E_6 . A_2 b_{20}|$ als Scheitel des Polarbüschels $(A_2 E_2 E_4 E_6)^2$.

4. Hüllcurve der Binder. Nur angedeutet sei hier, dass die eben beschriebenen Erzeugungsweisen sich vereinfachen oder erweitern durch theilweises Zusammenfallen oder Vervielfältigung der Masselemente, wie Schröter a. a. O. weiter ausführte. Die Hüllcurve der Bindestrahlen zwischen den Reihen $|b_{1,2}|$ verdient hingegen noch Erwähnung in systematischer Hinsicht. Nach diesen Reihen $|b_{1,2}|$ richten sich nämlich bei allen Erzeugungsweisen die Zeigerpare $.A_{1,2}$. und da auf jeden Zeiger

noch 2 Ortpunkte fallen, so gehen auch von jedem $.b_{1i}$. 2 Bindestrahlen nach entsprechenden $.b_{2i}$. Beim Leitungsdreiseit und Zeigervierseit gehört der Schnitt $.B$. der Leitungen $|b_{1,2}|$ selbst der Trilinearcurve an, auf dem Zeiger $|A_1 B|$ durch diesen liegt mithin noch ein Punkt derselben, welchem die Nebenleitung $|b_2|$ als Bindestrahl zugehört. Beim Leitungsdreiseit und Zeigervierseit gehen folglich durch jeden $.b_{1i}$. 3 Tangenten der Hüllcurve, diese wird mithin 3. Classe sein. Beim Leitungsvierseit dagegen geht die Ortcurve $(\eta)^3$ nicht mehr durch den Schnitt $.B$., es wäre denn, dass die Theilerscheitel $.B_1, B_2$. auf einem Strahle durch $.B$. lägen. Auf dem Zeiger liegen daher im Allgemeinen 2 Ortpunkte und die Nebenleitung $|b_2|$ wird Doppeltangente der Hüllcurve, diese muss daher beim Leitungsvierseit von 4. Classe sein.

Der Bindestrahl der Zeigerscheitel $.A_1, A_2$. ist bei allen 3. Anlagen der Hüllstrahl, welcher den 3. Punkt $|A_1 A_2 .\eta_0 .\eta^3|$ bedingt, und die 2. Hüllstrahlen durch die Schnitte $|b_1 .b_{10} .A_1 A_2 .b_{20} .b_2|$ bezeichnen auf $|b_2, b_1|$ die Richtpunkte der Tangenten zu $.A_2, A_1$. der Ortcurve. Es kehren so bei den Trilinearcurven Massverhältnisse wieder, die schon bei Linear- und Polarorten in analoger Weise auftraten.

5. Trilinearcurve des Leitungsdreiseits. Drei Gerade einer Ebene bezeichnen deren Lage im Raum und die Strahlen dreier Büschel, welche sich nach jenen Geraden richten, können sich nur dann zu dreien in Punkten dieser Ebene treffen und eine Curve erzeugen, wenn die Scheitel der Büschel selbst in der Ebene der 3. Leitungen liegen. Das Leitungsdreiseit legt uns daher eine planare Vorstellung der Bewegung von Punkten nach

trilinearen Curven am nächsten. Die Vierseite dagegen gestatten die Annahme, dass die Leitungen Reliefgerade seien, die Scheitel der Büschel Reliefpunkte bedeuten, dass mithin die Ortcurve als Bild einer Reliefcurve erscheine. Aus diesem Grunde ziehen wir für unsere weiteren Betrachtungen das Leitungsdreiseit vor.

Im Feld I_2 sind also 3 Strahlbüschel $.A_{1,2,3}$ einander durch die Tangenten einer trilinearen Hüllcurve $\|\beta\|^3$ zugeordnet, welche auch die Leitungen $|b_{1,2,3}|$ sowie die Bindestrahlen $|A_1 A_2, A_1 A_3, A_2 A_3|$ berührt. Die Annahme von $.A_1$ auf $|B_1 D|$, sowie dieses Strahles selbst annähernd in der Mitte zwischen $|B_1 B_2, B_1 B_2|$ weist auf die Symmetrie des Büschels $.B_1$ und damit zugleich auf die symmetrische Anordnung der Curvenpare in demselben hin. Den gleichen Sinn hat in Bezug auf die Grundlinie $|B_2 B_3|$ die zu derselben parallele Richtung des Bindestrahles $|A_2 A_3|$.

Zur Herstellung der Trilinearcurve $(A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3 D)^3 = (\eta)^3$ halten wir uns zunächst an das Strahlbüschel $.A_1$ mit der Leitung $|B_2 B_3 = b_1|$ und das Polarbüschel $(A_2 A_3 B_1 D)^2$. Der Strahl $|A_1 b_{1i} = a'_{1i}|$ zeigt auf $|b_1|$ den Pol $.b_{1i}$ einer Curve (ε_i) des Büschels an, zu welchem die Schnitte

$$|b_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot b_{1i} A_3, b_{1i} A_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot b_3|$$

2 weitere Punkte sind. Ausserdem können nach bekannter Weise Tangenten in $.B_1, A_2, A_3$ gezogen werden. Nun vergegenwärtigen wir uns durch die Blickbewegung den Zug der Polarcurve $(\varepsilon_i)^2$, bezeichnen schätzungsweise deren 2 Schnitte $\cdot\eta_{i1}, \eta_{i2}$ mit $|a'_{1i}|$ und prüfen die Annahmen nach dem bekannten Verfahren der Punktbestimmung. Die Nahepunkte, welche man durch die Probe erhält, liegen neben $|a'_{1i}|$, allein mit Berücksichtigung des nun in dieser

Gegend genauer bestimmten Curvenlaufes und nach einiger Uebung werden die zweiten Annahmen richtig sein. Solches Näherungsverfahren scheint nur im Anfang unsicherer als eine regelrechte Construction. Wenn man jedoch die Hilfslinien bedenkt, welche die letztere erfordert, und die ebensovielen Fehlerquellen sind, so findet man, dass der unmittelbare Curvenzug und die Blickbewegung, welche denselben lenkt, nicht allein das Ergebniss im einzelnen Falle am schnellsten anzeigen, sondern zugleich die Aneignung der räumlichen Massverhältnisse weit sicherer erzielt als die Verwendung vieler Constructionsregeln.

Was ist aber mit solcher Aneignung des Curvenzuges logisch gewonnen? Die Bewegungen vielfacher Linien verschmelzen wirklich zur Bewegung eines Punktes in bestimmter Fläche; die Ortsbedingungen stehen nicht bloß als einzelne Eigenschaften nebeneinander, wie bei der Aufzählung von Lehrsätzen und Formeln. Verschmelzung von Vorstellungen fördert nun hauptsächlich die Begriffsentwicklung, daher dient die Aneignung der Curvenzüge vornehmlich der Befestigung räumlicher Begriffe. Damit schreitet zugleich die Zeichenbildung fort, indem die Curven nicht nur als Erzeugnisse, sondern als Symbole ihrer Ortsbedingungen gelten und die letztern hinwiederum die Curven vertreten. Wir werden in Zukunft Schnitte von Curven, wie die von Geraden, ohne genauere Angabe des Zeichenverfahrens behandeln.

Die Geradenpaare $|A_2 D, B_1 A_3; A_3 D, B_1 A_2; B D, A_2 A_3|$ des Büschels ergeben: $|B_1 A_3 \cdot \eta_2 \cdot A_1 B_2; B_1 A_2 \cdot \eta_3 \cdot A_1 B_3|$; $|b_1 \cdot \eta_5 \cdot A_2 A_3; B D \cdot \eta_1 \cdot A_1 \eta_5|$. Vermöge der Erzeugung der Büschelcurven ist:

$$|A_1 A_3 \cdot \eta_4 \cdot b_2; A_1 A_2 \cdot \eta_6 \cdot b_3; A_2 A_3 \cdot \eta_5 \cdot b_1|$$

Dieselbe zeigt auch die Tangenten in: $.A_2, A_3, B_1, D$. an, durch die Theilerscheitel:

$$|A_1 A_2 . b_{12} . b_1 ; A_1 A_3 . b_{13} . b_3 ; A_1 B_1 . a_{1b} . A_2 A_3 |$$

Für jeden Pol $.b_{1i}$. ist $|b_{1i} A_3 . b_{2i} . b_2|$ ein Punkt der Büschelcurve $(\varepsilon_i)^2$, die auch mit den Leitungen $|b_2, A_2 b_{2i}|$ und den zugehörigen Zeigerbüscheln $.A_2, D$. erhältlich ist. $(\varepsilon_i)^2$, welche der Pol $|b_1 . b_{1i} . A_1 D|$ ergibt, zeigt auch die Tangente zu $.D$. der $(\eta)^3$.

Die gleich- oder wechselseitige Lage von $. \eta_4, \eta_6$. zur $|tg. D|$ weist darauf hin, ob die $(\eta)^3$ sich schliesst oder einzülig ist, insofern sie nicht im einen oder anderen Ankreisfelde des Leitungsdreiseites einen Doppelpunkt besitzt.

Im Feld $.I_2$. ist auch die Polarcurve eingetragen, welche $|A_1 B_1 . b_{16} . b_1|$ entspricht und die Biegungen der Trilinearcurve deutlicher erkennen lässt; desselichen kann man die Trilinearcurve verfolgen, welche dem Ziele $.A_{1\infty}$. von $|A_1 B_1|$ entspricht, desshalb durch $|b_2 . \eta_4'' . A_3 A_{1\infty} || A_2 A_{1\infty} . \eta_6'' . b_3|$ geht.

Feld I_3 . *Büschel von trilinearen oder Trippelcurven.*

Die Schwingungen trilinearere Curven eines Büschels mit den 5 festen Hauptscheiteln $.B_1 B_2 B_3 A_2 A_3$. und den beiden Nebenscheiteln $.D \eta_5$., wenn $.A_1$. die Zeile des Planes durchläuft, vergegenwärtigt Feld I_3 . Um eine Häufung des Wortes «linear» zu vermeiden, sagen wir, dieses Feld stelle ein lineares Büschel von Trippelcurven dar.

1. Punktreihen im Strahlbüschel $.B_1$. Mit jedem Punkt $.A_{1\infty}$. sind dem Früheren gemäss noch 4

weitere Punkte auf $.B_1 | A_2, A_3, B_2, B_3 |$ gegeben. Eine 5. Punktreihe folgt, aus $.\eta_5$ bezeichnet, $|B_1 D|$.

2. Die Polarcurven des Büschels $(A_2 A_3 B_1 D)^2$ werden am einfachsten mit Hülfe des festen Poles $|A_2 A_3 .\pi. B_1 D|$ und der Büschel $.A_3, D$ mit den Leitungen $|b_3, A_2 b_{1i}|$ bezeichnet. Besonders ergibt $|A_{1\infty} D .b_{1i}. b_1|$ einen $. \eta_a$ der $(\eta)^3$, welcher die $|B_1 \eta_5|$ durchläuft, da $|B_3 A_3 D|$ Bindestrahl der Scheitel $.D, A_3$ ist.

Die Trippelcurve zerfällt in eine Gerade und eine Polarcurve sobald $.A_{1\infty}$. Ziel einer Geraden des Vierseits $|B_1 B_2 B_3 D|$ wird, indem alsdann z. B. auf $|B_2 A_2|$ ausser $.A_{1\infty}$. noch $|B_1 \eta_5 .\eta_i. B_2 A_2|$ liegt, diese Gerade mithin 4 Punkte der Trippelcurve enthält und mit der Polarcurve $(B_1 A_3 B_3 \eta_5 |B_1 D .\eta_j. \eta_5 A_{1\infty} |)^2$ dieselbe vertritt.

3. Doppelpunkte. Das Scheitelveiereck $.A_3 B_2 D \eta_5$. zeigt, wie die Trippelcurven, ähnlich den Hyperbeln, in 2 Gruppen zerfallen, deren Grenze nun nicht, wie bei letztern, durch das Diagonalenpar $|A_3 B_2 D \eta_5|$, sondern durch eine Curve mit Doppelpunkt bezeichnet wird. Wie nämlich $|A_2 b_{1i} .\eta_{6i}. B_1 B_3|$ die Reihe $|B_1 B_3|$ durchlaufen, wenn $.b_{1i}$. sich auf $|b_1|$ verschiebt, so durchlaufen $|D b_{1i} .\eta_7. B_1 \eta_5|$ die Reihe $|B_1 \eta_5|$; die Strahlenpare $B_1 |A_2 B_3, D \eta_5|$ bilden ein System, dessen Doppelstrahlen $|t_1, t_2|$ die Berührungspunkte der Tangenten aus $.b_{1i}$. an die Polarcurven des Büschels $.B_1 A_3 A_2 D$. enthält. Jede $|t_1, t_2|$ trifft die Trippelcurven des Büschels ausser in $.B_1$. noch in einem Punktepar, das 2 Curven des Polarbüschels angehört und deshalb mit dem Doppelpunkt $.B_1$. ein Punktsystem auf $|t_1, t_2|$ vertritt, dessen zweiter Doppelpunkt zugleich ein trilinearer Doppelpunkt ist, indem sowohl in Richtung der Zeigerstrahlen $|t_1, t_2|$, als in Rich-

tung der Tangente zur entsprechenden Zeigercurve je ein benachbarter Punkt mit dem Bindepunkt jener beiden Richtungen zusammenfällt.

4. Polares Büschel der Trippelcurven. Dreht sich $|A_2 A_3|$ um $.\eta_5.$, so zeigen die Polarcuren des Büschels: $.B_1, \text{tg. } D., |B_1 \eta_5 . \varepsilon_s . b_{1r} D|$ auf jedem Strahle $|A_1 b_{1r}|$ ein System von Punkteparen eines polaren Büschels von Trippelcurven mit den Haupt-Scheiteln: $.A_1 B_1 D B_2 B_3 \eta_5.$ und den Nebenscheiteln auf: $|A_1 B_2, A_1 B_3, B_1 B_2, B_1 B_3|$. Das Punktsystem auf $|A_1 b_{1r}|$ bestimmt mit den Zeigerparen von $.B_1 D.$ eine Polarcurve $(\delta)^2$, welche durch ihre beiden Schnitte auf $|A_1 b_{1r}|$ die Doppelpunkte eines Pares von Trippelcurven anzeigt, die das polare Curvenbüschel gliedern.

5. Trilineares Büschel der Trippelcurven. Tritt an die Stelle von $.\eta_5.$ irgend ein anderer $.s.$ als Scheitel des Sehnenbüschels aus $|A_2 A_3|$, so durchlaufen $.\eta_5, A_2, A_3.$ die $|b_1, D B_2, D B_3|$. Auch in diesem Falle wird das von $.A_2, A_3.$ abhängige Punktepar auf jedem Strahle $|A_1 b_{1r}|$ mittelst dieses Büschels Polarcuren $.B_1, \text{tg. } D_s, |B_1 s . \varepsilon_s . b_{1r} D|$ gezeigt und, wie oben, die gliedern- den Doppelpunktecurven gefunden.

6. Die Felder des Stabes I zeigen den übereinstimmenden Stil der Plancurven. Ihre Grenzformen: die Gerade bei den hyperbolischen Aesten, die Ellipse bei den Schleifen, machen sich stets wieder fühlbar. Wir ziehen die Ellipse dem Kreise vor, weil sie den Biegungswechsel darstellt und thatsächlich viel besser als Vorbild beim Ziehen der Curven dient, als der Kreis mit seiner gleichmässigen Krümmung, wovon man sich schon durch einen raschen Blick auf die Tafel überzeugt.

Stab II. Reliefcurven.

Feld II₁. *Reliefcurven auf der Kegelfläche.*

1. Kegel- und Regelfläche. Auf der Reliefgeraden $|\alpha|$ sei \mathcal{A}_1 . die Spitze des Kegels $\mathcal{A}_1(\beta_1)^2$ mit der Leitcurve $(\beta_1)^2$ im Plan.

Der Umriss $(\alpha_2)^2$ einer Regelfläche $\|\alpha \mathfrak{b}\|^2$ berührt $|\alpha|$ in \mathcal{A}_b .; deren Leitcurve $(\beta_2)^2$ schneidet (β_1) in $.A, B$., mithin ist zunächst $|\alpha|$ Kegel- und Regelfläche gemein, weil $.A$. in der Lothspur von $|\alpha|$ liegt und somit als deren Stoss im Plan gilt.

Die zweite Tangente aus $.a_2$. auf $|\alpha|$ berührt den Umriss $(\alpha_2)^2$ in \mathcal{A}_{b_2} . und trifft die Leitung (β_2) in $.A_2, B_2$. Dann ist:

$$\begin{aligned} &|\alpha \mathcal{A}_b \mathfrak{b}_1|, |\alpha_2 \mathcal{A}_{b_2} \mathfrak{b}_2|, [\alpha \mathfrak{b}_2 | \mathcal{A}_b \mathcal{A}_{b_2} | \alpha_2 \mathfrak{b}_1] \\ &|A B_2 \cdot S | \mathcal{A}_b \mathcal{A}_{b_2} | S \cdot A_2 B_1 | \end{aligned}$$

Für jeden $.B_i$. von $(\beta_2)^2$ findet man:

$$\begin{aligned} &|A B_i \cdot s_i \cdot B_1 A_2|, [\alpha B_i | s_i \mathcal{A}_b | \mathfrak{b}_1 \alpha_2], |\alpha_2 \cdot \alpha_{2i} \cdot s_i \mathcal{A}_b| \\ &[\alpha B_i | B_i \alpha_{2i} | B_i \alpha_2] \end{aligned}$$

$|B_i \alpha_{2i}|$, ein Strahl der Regelschar $\|\mathfrak{b}\|$, berührt den Umriss $(\alpha)^2$ und ist von $.B_i$. aus in gleichem Sinn an diesen zu legen, wie $|\mathfrak{b}_2|$ von $.B_2$. aus.

2. Punkte und Tangenten der trilinearen Reliefcurve, nach welcher sich Kegel- und Regelfläche durchdringen. Schneidet die Spur $|A \beta_i|$ einer Ebene des Büschels $|\alpha|_\alpha$ die Leitungen $(\beta_1, \beta_2)^2$ in β_{1i}, β_{2i} ., so ergibt der Schnitt der Zeiger $|\mathfrak{b}_{1i} \cdot \eta_i \cdot \mathfrak{b}_{2i}|$, einen Punkt der Trilinearcurve $(\eta)^3$, nach welcher $\mathcal{A}_1(\beta_1)^2, \|\alpha \mathfrak{b}\|^2$ einander durchdringen.

Der Schnitt der Berührebenen an den Kegelstrahl $|\mathfrak{b}_{1i}|$ und den Regelpunkt η_i . ist die Tangente der Durchdringung in η_i . und wird durch seinen Stoss im

Plan bezeichnet, nämlich durch den Spurenschnitt jener Berührebenen, $|\text{tg. } \beta_{1i} . t_i . \beta_{2i} \alpha_{2i}|$. Dabei bedeutet α_{2i} den Stoss des Strahles $|\alpha_i|$ durch η_i , der 2. Tangente aus diesem Punkt an den Umriss $(\alpha_2)^2$, und liegt zu β_{2i} im gleichen Sinn wie A_2 zu B_1 .

3. Durchdringpunkte auf $|\alpha|$. Wird der Kegelstrahl zur 2. Tangente aus \mathcal{A}_1 an $(\alpha_2)^2$, so stellt er zugleich den Regelstrahl der Schar $||b||$ dar, welcher durch \mathcal{A}_1 geht und die Spur, welche dessen Stoss auf $(\beta_2)^2$ mit A verbindet, bezeichnet auf der Leitung $(\beta_1)^2$ den Stoss β_{1i} der Tangente zum Durchdringpunkt \mathcal{A}_1 .

Anderseits zeigt die Tangente an A der Leitung $(\beta_1)^2$ auf $(\beta_2)^2$ den Stoss des Regelstrahles an, welcher auf $|\alpha|$ den \mathcal{A}_2 der Durchdringung bestimmt.

In der Lothebene durch $|\alpha|$ liegt noch ein 3. Punkt der Durchdringung, $|\beta_1 . \eta_a . \beta_a|$; dieser wird zugleich mit seiner Tangente, dem Schnitt der Berührebenen zu $|\beta_1, \beta_a|$, bestimmt.

In jeder Ebene des Büschels $|\alpha|\alpha$ kommen mithin 3 Punkte $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \eta_i$ der Durchdringung vor. Ueberhaupt haben die Pare der Polarcuren, nach welchen eine beliebige Ebene die Kegel- und die Regelfläche schneidet, nebst dem Treffpunkt von $|\alpha|$ noch 3 (1) Punkte gemein, woraus die Trilinearität der Relieffcurve zu erkennen ist.

4. Theilerbüschel $.C$. In jeder Lothebene durch \mathcal{A}_1 liegen 2 Kegelstrahlen mit den Stosspunkten β_{11}, β_{12} ; diesen entsprechen vermöge des Spurenbüschels A zwei β_{21}, β_{22} . Der Lothspur von $|\alpha|$ entsprechen in diesem Theilerbüschel die Lothspur selbst und die Tangente zu A , auf $(\beta_2)^2$ dagegen B_1, β_{2i} . Umgekehrt bezeichnet die Tangente zu A der Leitung $(\beta_2)^2$ auf $(\beta_1)^2$ den

β_{1t} , diesem steht auf der Lothspur von $|\beta_{1t} \mathfrak{A}_1|$ gegenüber β_{1t}^* ; und β_{1t}, β_{1t}^* entspricht im Büschel $.A$. der eine Strahl $|\beta_{1t}^* A \beta_{20}|$, welcher zugleich die β_{1t}, β_{2t}^* entsprechenden $.A, \beta_{20}$ verbindet. Daher ist der Schnitt $|B_1 \beta_{2t} .C. \beta_{20} A|$ Scheitel eines Theilerbüschels $.C$. für die Reihen: $(B \beta_{21} A .C. \beta_{2t} \beta_{22} \beta_{20})$, die durch das Theilerbüschel $.A$. aus den Reihen: $(\beta_{1a} \beta_{11} \beta_{1t} .\mathfrak{A}_1 . A \beta_{12} \beta_{1t}^*)$ abgeleitet sind.

5. Deckpunkt D . Wäre \mathfrak{A}_2 . Spitze einer Kegel­fläche mit der Leitung $(\beta)^2$, so würde $|C \mathfrak{A}_2|$ die Richtung einer Lothebene anzeigen, in welcher 2 Kegelstrahlen von $\mathfrak{A}_2 (\beta_2)^2$ mit ihren entsprechenden in den Ebenen des Büschels $|a|\gamma$ und auf $\mathfrak{A}_1 (\beta_1)^2$ zusammentreffen würden. Da die Treffpunkte indessen auf demselben Lothe lägen, nach welchem sich jene Zeigerebenen schneiden, so würden dieselben im Plan als ein Doppelpunkt D . erscheinen, oder einen Deckpunkt anzeigen.

Nun kann \mathfrak{A}_2 . wirklich als Spitze eines Kegels aufgefasst werden, welcher $\mathfrak{A}_1 (\beta_1)^2$ nach derselben $(\eta)^3$ durchdringt, wie $\|a \ b\|^2$. Die Leitcurve $(\beta_2)^2$ dieses Hilfs­kegels $\mathfrak{A}_2 (\beta_2)^2$ gehört demselben Büschel an wie die gegebenen Leitungen $(\beta_1, \beta_2)^2$ und wird besonders auch durch ihre Tangente in $.A$. bestimmt, welche sich nach dem Stoss β_{1t} . der Relieftangente zu \mathfrak{A}_1 richtet. Der Theilerscheitel $.C'$. für die beiden Reihen der Richt­punkte zu den Kegelstrahlen $\mathfrak{A}_2 (\beta_2')^2$, welche den Strahlen­paaren derselben Lothebenen in $\mathfrak{A}_1 (\beta_1)^2$ entsprechen, wird wie früher gefunden und zeigt nun in der That die Rich­tung der Lothebene für $\mathfrak{A}_2 (\beta_2)^2$ an, die den Deckpunkt $.D$. der Relieffcurve $(\eta)^3$ enthält.

6. Deckort $(\delta)^2$ im Plan. Die Leitung $(\beta_2)^2$ bei­haltend, lassen wir \mathfrak{A}_2 . den Strahl $|a|$ durchlaufen.

Dann erzeugen die Büschel $.C', A_1.$, durch $.A.$ vermittelt, eine Polarcurve $(\delta)^2$, welche $.C', A_1, B, B', \beta_{1c}.$ enthält, wo $.A_1.$ den Grundriss von $.A_1.$ bedeutet und $|A C' \beta_{1c} \beta_1^2|$ ist.

Da (β_1, β_2') in vorliegender Figur sich rechtwinklig schneiden, so sind auch die Winkel bei $.B', \beta_{1c}.$ rechte, mithin der Ort $(\delta)^2$ ein Kreis über $|C' A_1|$. Die Gleichheit der Peripheriewinkel in 2 Leitkreisen über den Tangenten mit dem Winkel der letztern bedingt, dass überhaupt jedem Pare von Leitkreisen ein Ortskreis der Deckpunkte entspricht.

Das Feld II_1 zeigt zwei Reliefcurven des Kegels $.A_1 (\beta_1)^2$, deren Deckpunkte einander in ihrem Ortskreis diametral gegenüberstehen.

7. Deckort $(\delta)^4$ im Relief. $(\delta)^2$ lässt sich auffassen als Leitcurve eines Lothcyllinders $.B_\infty (\delta)^2$. Dann ist im Relief der Ort der einander deckenden Punktepare die Durchdringung dieses Lothcyllinders mit $.A_1 (\beta_1)^2$, eine Curve $(\delta)^4$. Da die Spitze $.A_1.$ selbst auf einem Cylinderstrahle liegt, so wird sie zum Doppelpunkt, insofern die Tangente zu $.A_1.$ an $(\delta)^2$ die Leitcurve $(\beta_1)^2$ schneidet. Die Kegelstrahlen, welche diesen Schnitten entsprechen, stellen nämlich die beiden Tangenten jenes Doppelpunktes dar, weil nach ihnen die Berührebene an $.B_\infty (\delta)^2$ von den Berührebenen an $.A_1 (\beta_1)^2$ geschnitten wird. Da nebst den 3 Scheiteln des Büschels $(\beta)^2$, welche der trilinearen Durchdringung angehören, stets auch ein $.\beta_{1c}.$ auf der Leitung $(\delta)^2$ liegt, enthält der Plan von dem Deckort $(\delta)^4$ 2 oder 4 Stosspunkte, je nachdem das Büschel der Leitcurven $(\beta)^2$ 2 oder 4 Scheitel hat.

8. Ueberblick. Der Schnitt $|tg. A\beta_1 \beta_{21}' \beta_2'|$ ist der gemeinsame Stoss aller Relieftangenten zu $.A_2.$, die Reihe

$.A_2$. verbindet also die Büschel $.C', \beta'_2$. Ihre Strahlen, der Deckort $(\delta)^2$, die Scheitel $.B.$ (resp. B_{I-III}) und $|\mathfrak{A}_1 \beta_{11}|$ bieten den Anhalt, um die Schwingungen der Reliefcurve auf dem Kegel $\mathfrak{A}_1 (\beta_1)^2$ zu verfolgen, während \mathfrak{A}_2 den Strahl $|\alpha|$ durchläuft.

Der Massraum wird nach dem Feld II durch die Kegel- und Regelflächen erfüllt, welche $\mathfrak{A}_1 (\beta_1)^2$ durchdringen, wenn man z. B. $.B.$ festhält und den Strahl $|\alpha|$ den Kegel durchlaufen lässt, wobei man des leichteren Ueberblickes wegen auch noch die Relieftangente zu \mathfrak{A} festhalten kann. Der Kegel ist dann der Träger, die Büschel der Durchdringcurven stellen die Theilung dar. Indem wir die Schwingungen dieser Büschel verfolgen, beherrschen wir die Kegelfläche, wie wir den Plan vermöge der Strahl- und Curvenbüschel mit dem Blick beherrschen.

Feld II₂. *Die Trilinearfläche mit Knotenpunkt und die Geraden auf derselben.*

1. Trilineare Knoten- und Schalflächen. Das Feld I₃ zeigt, dass die Trilinearcurven eines Büschels sich zur Kreuzcurve mit Doppelpunkt ähnlich verhalten wie die Hyperbeln zu den Diagonalen des Scheitelvierecks, auf welchem das Polarbüschel beruht. Das entsprechende Verhalten der Hyperboloide zum Kegel weist darauf hin, dass auch die Flächen 3. und höherer Ordnung in ähnlicher Weise um ihre Knotenflächen schwingen, wie auch Klein in den Math. Annalen erläuterte. Daher spielen in den Betrachtungen der Flächen diejenigen mit Knotenpunkt eine massgebende Rolle. Desshalb sollen unserer Darstellung der Reliefcurven auf trilinearen

Flächen die Knotenflächen zu Grunde gelegt und die Schallflächen kurz berücksichtigt werden.

2. Gerade, Polar- und Reliefcurven. Die Untersuchung der Trilinearflächen hat bisher ihr Augenmerk vorzüglich auf deren Gerade gerichtet. Hier anschliessend zeigen wir vorerst die Vertheilung dieser Geraden, um hernach die Schwingungen der Polar- und Reliefcurven damit zu vergleichen.

3. Planspur der Knotenfläche. Wie die Bewegung eines Punktes nach einer trilinearen Plancurve durch die Spielstrahlen 3. Büschel geregelt wird, welche einander durch denselben Theilstrahl ihrer Leitungen zugeordnet sind, so bedingen die Bewegung eines Punktes in der trilinearen Fläche die Spielebenen 3. Bündel, welche die Ebenen eines Theilbündels durch ihre Schmitte mit den 3. Leitebenen der ersten einander zuweisen. In der That kommt diese Beziehung zwischen Plan und Relief in der Bindeebene der Zeigerscheitel $[A_1 A_2 A_3]$ zur Anwendung. In dieser Ebene weisen nämlich die Theilstrahlen $|\gamma|$ auf den Leitspuren $|b_{1,2,3}|$ entsprechende Zeiger einander zu. Treffen also die drei Zeiger in einem Punkte zusammen, so gehört derselbe den 3 Zeigebenen an und ist ein Punkt der Trilinearfläche $(\Phi)^3$. Um dieser einfachen Spurbestimmung willen empfiehlt sich die Bindeebene $[A_1 A_2 A_3]$ als Plan.

Im Feld II_2 stimmt die Planspur $(\eta)^3$ sowie das Dreiseit der Leitspuren mit den Annahmen des Feldes I_2 überein, um auf bekannter Grundlage das Relief zu bauen.

4. Kanten des Leitungsdreiflaches als Gerade der $(\Phi)^3$. Die bei Anlass des Feldes I_2 berührte Symmetrie auf das Relief auszudehnen, zugleich der Ersparniss von Linien wegen, ist die Spitze des Leitungsdrei-

flaches \mathfrak{B} . auf der Richtung $|B_1 D A_1|$ angenommen. Die Kanten desselben seien, den Stosspunkten $.B_1, B_2, B_3.$ entsprechend durch $|\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3|$, der Scheitel des Theilbündels durch \mathfrak{C} . bezeichnet.

Die Ebenen des Theilbüschels $|\mathfrak{C} A_1|$ enthalten die Richtgeraden der Zeigebenen durch $.A_1.$, nämlich die Schnitte der erstern mit der Leitebene $[\beta_1]$; mithin fallen für $.A_1.$ Theil- und Zeigebene zusammen. Schneiden dieselben $[\beta_2|\mathfrak{b}_1|\beta_3]$ in $\mathfrak{b}_1.$, so treffen sich in diesem auch die Richtlinien zu den Zeigebenen von $.A_2, A_3.$, mithin auch diese Zeigebenen selbst; folglich entsprechen den Theilebenen des Büschels $|\mathfrak{C} A_1|$ die Punkte von $|\mathfrak{b}_1|$. Die Kanten des Leitungsdreiflachs gehören also der $(\Phi)^3$ an; ihr Schnitt, die Spitze \mathfrak{B} . ist Knotenpunkt der Fläche, weil 3 Gerade derselben durch ihn gehen.

5. Die Geraden $|e|$ auf $(\Phi)^3$, als Schnitt 3 Zeigerkegel mit der Spitze \mathfrak{B} . Der Stoss von $|\mathfrak{B} \mathfrak{C}|$ auf den Plan $.c.$, als Scheitel eines Theilbüschels betrachtet, weist jedem Par $.A_1 A_2, A_1 A_3.$ eine Polarcurve $(A_1 A_2 B_2, A_1 A_3 B_3)^2$ zu, welche beide nebst $.A_1.$ noch einen (bez. 3) Punkt $.E.$ auf der Flächenspur $(\eta)^3$ gemein haben. $.E.$ bezeichnet den Stoss für den Schnittstrahl $|e|$ der Kegel $\mathfrak{B} (A_1 A_2 B_2, A_1 A_3 B_3, A_2 A_3 B_3)^2$ und deutet damit eine (bez. 3) weitere Gerade der Trilinearfläche an.

6. Die Gerade $|e_3|$ auf $(\Phi)^3$ als Trippelergänzung zu $|\mathfrak{b}_3, e|$. Der Theilstrahl $|c'_3|$ von $.c.$, welcher $.E.$ auf der Grundspur $(\eta)^3$ ergibt, schneide $|A_1 A_3|$ in $\mathfrak{3}.$. Diesem Theilerscheitel entsprechend zeigen die Büschel $.A_1 A_3.$ den Ortstrahl $|B_3 E|$, die Spur von $[B_3 \mathfrak{B} E]$. In derselben liegen 2 Gerade von $(\Phi)^3$, durch den Schnitt $|B_3 E \eta_3 \eta^3|$ geht also eine 3. Gerade derselben. Ist nämlich:

$$[\beta_1 \cdot \mathfrak{B}_1 \cdot |\mathfrak{B} \mathfrak{C} | \mathfrak{B}_3 \cdot \beta_3], |A_1 \mathfrak{B}_1 \cdot f_3 \cdot \mathfrak{B}_3 A_3|,$$

so bezeichnet f_3 den Scheitel des Strahlbüschels in $[f_3 B_3 E]$, nach welchem sich die Zeigebenen der bündigen Büschel $|A_1 f_3, A_3 f_3|$ schneiden. Wie der Satz 4_a über den Reliefbau zum Feld I₁ gezeigt, ist $[b_3 E]$ Ortebene der Büschel $f_3 |A_1, A_3|$ und $|e|$, ein Strahl des Büschels f_3 in derselben muss als gemeinsamer Strahl der Zeigerkegel $\mathfrak{B} (A_1 A_3 B_3, A_1 A_2 B_2)^2$ in f_2 auch von der Axe $|A_2 \mathfrak{B}_2|$ getroffen werden, um welche sich die vom Theilerbüschel $|\mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{B}_2|$ bezeichneten Zeigebenen zu A_2 drehen, weil auch $[A_2 e]$ in dem Büschel $|A_2 \mathfrak{B}_2|$ vorkommt. In $[b_3 e]$ verbindet somit $|e|$ die Scheitel f_2, f_3 der Zeigerbüschel, welche durch die Ebenen um $|A_2 f_2, A_1 f_3|$ angezeigt sind; $|e_{III}|$ ist Ortstrahl dieser Zeigerbüschel und hat $|B_3 E \cdot \eta_3 \cdot \eta^3|$ zum Stoss im Plane; sie ist die 3 Gerade, welche $[b_3 e]$ mit $(\Phi)^3$ gemein hat.

Nun weist die Zeichnung darauf hin, dass das Strahlenpar $[b_3, e]$ sinnbildlich alle übrigen analogen Päre vertritt, das gewählte Beispiel alle übrigen Liniencombinationen gleicher Art. Dabei verlieren die wechselnden Buchstaben an allgemeiner Bedeutung gegenüber den gleichartigen Linienverbänden. Wie zu $[b_3, e]$ gibt es also zu jedem Par der 6 Geraden $[b, e]_{1,2,3}$ eine dritte, welche in dem 3. Schnittpunkt der Pärebenenspur mit $(\eta)^3$ den Plan trifft, wodurch im allgemeinen 15 Gerade der Trilinearfläche geboten sind. Keine räumliche Thatsache fordert also, dass die 6 Geraden $[b, e]_{1,2,3}$ doppelt gezählt werden, sondern bloss die systematische Vollzähligkeit der 27. Geraden.

7. Polarcuren im Ebenenbüschel $[b_3]$. Das Geradenpar $[e, e_{III}]$ in $[b_3]$ kann als Masszeichen für die Polarcuren im Ebenenbüschel $[b_3]$ gelten. Jedem Stoss

. s_i . eines Theilstrahles $|e'_i|$ im Büschel $|\mathcal{C}|A_1 A_3|$ von $[\mathcal{C} a_3]$ entspricht ein Ortstrahl $|\beta_i|$ als Schnitt der Zeigerbüschel $.A_1, A_3..$ $[\mathcal{C} a_3 . b_{3c} . b_3|$ liegt im gemeinsamen Schnitt aller $[\beta_i]$ mit $[\mathcal{C} a_3]$, welcher zudem durch den Spurenschnitt $|a_3 . \sigma_i . \beta_i|$ seiner Richtung nach bestimmt wird und den Schnitt der Axen $|a_1 . f_3 . a_3|$ zu den Zeigebenen $[\alpha_1, \alpha_3]$ enthält. Diese werden durch die Strahlen des Büschels $[\mathcal{C} a_3]$ auf den Leitungen:

$$|\beta_i| b_{3c} \hat{s}_{1i} | [\mathcal{C} a_3] \hat{s}_{3i} b_{3c} | \beta_i | ; | \mathcal{C} s_i . \hat{s}_{1i} . \beta_i |$$

einander zugeordnet und erzeugen in ihrer Spielebene $[\mathcal{C} a_3]$ die Polarcurve $(\varphi)^2$ mit dem Pol \mathcal{C} . und den Punkten $.A_1, A_3, b_{3c}.$, die Ortcurve der Axenschnitte f_3 .

Das Theilbüschel $|\mathcal{C}|a_3|$ zeigt andererseits auf der Leitung $[\beta_2 | \hat{s}_{2i} \eta_i | \mathcal{C} a_3]$ die Richtung der Axe $|a_2|$ für die entsprechenden Zeigebenen $[\alpha_2]$ durch $.A_2$.

$$|A_2 \eta_i \hat{s}_{2i} | \beta_{32} b_{1c} | \beta_3 | ; | \beta_{32} b_{1c} . b_{32} . b_3 | ; | A_2 \eta_i \hat{s}_{2i} . b_{32} . b_3 |$$

Das Ebenenbüschel $|b_3|$ schneidet $[A_2 \eta_i \hat{s}_{2i}]$ im Strahlbüschel $.b_{32}.$ und bezeichnet dadurch auf $|a_2|$ die f_2 .

Die projective Beziehung der Leitreihen $|\eta_i \hat{s}_{2i}, \eta_i A_2|$ zu $.A_2, b_{32}.$ wird vermittelt wie folgt:

$$|\eta_i \hat{s}_{2i} . \mathcal{C} | a_3 . B_1 | \beta_i | A_1 . B_1 A_3 | B_3 . A_2 \eta_i |$$

Die Leitreihen $|\eta_i \hat{s}_{2i}, \eta_i A_2|$ ergeben durch $.A_2, b_{32}.$ die Ortcurve $(\Phi_2)^2$ der Schnitte $|a_2 . f_2 . \beta_i|$.

Für jedes Theilbüschel $|\mathcal{C} s_i|$ ergibt sich nun in $[\beta_i]$ eine Ortcurve $(E_i)^2$ durch folgende Beziehung:

$$. s_i | \beta_i . A_1 | \beta_i . f_3 . (E)^2 \hat{f}_2 . \beta_i | A_2 . \beta_2 | s_i .$$

$(E_i)^2$ ist gemeinsamer Schnitt der 3 Regelflächen durch $|A_1 \hat{f}_3, A_3 \hat{f}_3, A_2 \hat{f}_2|$, pairwise genommen, enthält als Stossunkte die Schnitte $|\beta_i . \eta_{i,j} . \eta^3|$ und $\mathcal{B}.$, weil die Schnitte der Zeigebenen durch $|a_3, a_2|$ mit den Leitebenen $[\beta_3, \beta_2]$ sich auf $|b_1|$ treffen und $|b_1 . \mathcal{B} . \beta_i|$.

$(\varphi_2^2, \varphi_3^3, \eta^3)$ und \mathfrak{B} . sind die Leitungen für die Ortcurven $(E_i)^2$. Da die Büschel $\mathfrak{b}_{3c}|a_3|, \mathfrak{b}_{32}|A_2 \eta_4|$, welche auf $(\varphi_3, \varphi_2)^2$ die Punktepare $\mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}_2$. anzeigen, durch $[\mathfrak{C} a_2|\eta_4 \mathfrak{s}_{2i}|\eta_4 A_2 \mathfrak{b}_{32}]$ verbunden sind und diese Zeiger auf den Spuren $|a_3, \eta_4 A_2|$ durch die Schnitte von $|\beta_i|$ bestimmt werden, so genügt es, die Schnitte des Spurenbüschels \mathfrak{B}_3 . mit $(\eta^3, a_3, \eta_4 A_2|)$ zu verfolgen, um sofort 5 Punkte der $(E_i)^2$ zu überblicken und darnach die Gestalt der Curve zu beurtheilen.

Die Kegelflächen $\mathfrak{B}(\varphi_3, \varphi_2)^2$ haben nebst $|\mathfrak{b}_3|$ noch 1 (bez. 3) Strahl gemein, welcher mit dem früher benützten $|e|$ übereinstimmt. Denn in $[\mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{B}]$, welche $|e|$ liefert, liegen $\mathfrak{B}|\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3|$ und diese zeigen, dass $|e|$ in solchem Falle zugleich der \mathfrak{B} . entsprechende gemeinsame Regelstrahl von $\|A_1 \mathfrak{f}_3, A_3 \mathfrak{f}_3, A_2 \mathfrak{f}_2\|^2$, zu Paren genommen, ist und deshalb auch die Axen $|a_1, a_2, a_3|$ der 3 Zeigebüschel in $\mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}_2$. trifft.

$[\mathfrak{C} a_3|\eta_4 \mathfrak{s}_{2i}|\beta_2 \mathfrak{s}_{2i} \eta_4|\mathfrak{b}_{32} A_2 \eta_4|]$ zeigt $|\eta_4 \mathfrak{s}_{2i}|$ als 3 Gerade zu $|\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1|$ wie als tailineare Ergänzung zu $(\varphi_3, \varphi_2)^2$.

Gemäss der Beziehung $|a_3 \cdot B|\beta_1|A_1$. entspricht A_3 . die Leitung $|\beta_1|$ und umgekehrt $|\beta_1 \cdot s_0 \cdot a_3|$ der Ortstrahl $|B_3 A_3|$. Die Ortcurve (E_3) dieser Spur wird durch das Theilbüschel $[\mathfrak{C} s_0|$ bestimmt, wo $|a_3 \cdot s_0 \cdot \beta_1|$, und vermittelt den Uebergang zu den Reliefcurven von $(\Phi)^3$.

Feld II₃. Reliefcurven der Trilinearfläche $(\Phi)^3$.

1. Allgemeine Punktbestimmung. Jeder Strahl des Theilbüschels $\mathfrak{C}|\beta_1|$ stellt durch seinen Stoss β_{1i} . auf der Leitspur $|\beta_1|$ die Zeigeraxe $|A_1 \beta_{1i}|$ eines Ebenenbüschels im Bündel A_1 . fest, welche die Planspur $(\eta)^3$ der Trilinearfläche $(\Phi)^3$ in η_i, η_j . treffe. Diese sind das

Par Stosspunkte der Relieffcurve $(H)^3$, welches aber bei gewissen Richtungen von $|A_1 \beta_{1i} = \alpha_{1i}|$ verschwindet.

Die Theilspur $|\gamma_{1i}|$ von $|\mathbb{C} \beta_{1i}|$ bezeichnet auf den Leitungen $|\beta_2, \beta_3|$ die Stosspunkte $.\beta_{2i}, \beta_{3i}.$, welche mit $|\beta_2 \text{ II } |\mathbb{C} \beta_{1i}| \text{ III } \beta_3|$ die Schnitte $|\beta_2 \text{ II } \beta_{2i} . \beta_{3i} \text{ III } |\beta_3|$ bestimmen. $|A_2 \beta_{2i} . \varepsilon_i . \beta_{3i} A_3|$ gehört der Spur $(\varepsilon)^2$ der Regelfläche $||A_2 \text{ II}, A_3 \text{ III}||^3$ an und ist der Stoss des Strahles $|\varepsilon_i \beta_{1i}|$, welcher den Schnitt zweier entsprechender Ebenen der Zeigerbüschel $|A_2 \text{ II}, A_3 \text{ III}|$ darstellt.

Andererseits bezeichnen $|\text{II } \beta_{2i} . \beta_{2i} . \beta_2|$, $|\text{III } \beta_{3i} . \beta_{3i} . \beta_3|$ den Schnitt $|\mathbb{C} \beta_{1i} \beta_{2i} | \beta_{1i} \beta_{2i} \beta_{3i} | \beta_1|$ und dieser bestimmt mit $|A_1 \beta_{1i}|$ die $|\mathbb{C} \beta_{1i} \beta_{2i}|$ entsprechende Zeigebene $|\alpha_{1i}|$. Die Spurenschnitte $|A_2 \beta_{2i} . 2_i | A_1 \beta_{1i} | 3_i . A_3 \beta_{3i}|$ ergeben mit $.\beta_{2i}, \beta_{3i}.$ die Geraden $[A_2 \text{ II } \varepsilon_i | 2_i \beta_{2i} | \alpha_{2i} | \beta_{3i} | 3_i | \varepsilon_i \text{ III } A_3]$.

In $|2_i \beta_{2i} . \eta_i | \varepsilon_i \beta_{1i} | \eta_i . \beta_{3i} | 3_i|$ treffen mithin 3 entsprechende Ebenen der Büschel $|A_1 \beta_{1i}, A_2 \text{ II}, A_3 \text{ III}|$ zusammen und ergeben einen Punkt der trilinearen Relieffcurve $(\eta)^3$.

2. Richtpunkte. Zu den Theilspuren des Büschels $|\mathbb{C} \beta_{1i}|$ gehört jedesmal $|\beta_1|$ selbst, diese bezeichnet die Bindeebene $[A_1 A_2 A_3]$ als Zeigebene des Bündels $.A_1 .$; in dieser ist bekanntlich $|A_2 B_2 . D . A_3 B_3|$ der von $|\beta_1|$ bestimmte Punkt der Spur $(\eta)^3$; derselbe zeigt sich nun als gemeinsamer Stoss für alle Relieffcurven des Bündels $.A_1 .$ Ein zweiter gemeinsamer Punkt dieser Curven, ja der sämtlichen in allen 3 Bündeln vorkommenden, ist der Knotenpunkt $\mathfrak{B}.$, welcher jeweilen durch die Theilebene $|\beta_{1i} \mathfrak{B} \mathbb{C}|$ erhalten wird. Die Spur $|A_1 \beta_{1i}|$ ergibt $|\beta_{1i} \mathbb{C} A_1 . \eta_1 . \beta_1|$ als Punkt von $(\eta)^3$. $|\beta_{1i} A_3 . \varepsilon_2 . \beta_2|$ entspricht der Regelstrahl $|\varepsilon_2 \text{ II}|$ mit $|\varepsilon_2 \text{ II} . \eta_2 . \beta_2|$.

Durch die 7 Richtpunkte: $.\eta_i, \eta_i, D, \mathfrak{B}, \eta_1, \eta_2, \eta_3.$ ist der Verlauf der Relieffcurve meistens genügend bezeichnet. Statt der Asymptoten, welche mit Hülfe eines

Pares concentrischer Richtkegel z. B. aus \mathfrak{B} . zu ermitteln wären, ist es zweckmässiger, am Rande des Feldes Grenzpunkte zu haben.

3. Kegelcurve. Unter den Reliefcurven der Theilbüschel $\mathfrak{C}|\beta_1|$ ist nebst den 4 (bez. 2) Berührenden zur Leitspur $(\eta)^3$ noch die Kegelcurve massgebend, welche $[\mathfrak{C} \beta_1 . b_{10} . b_1]$ entspricht.

4. Schalfflächen. Der ganze Vorgang der Betrachtung lässt sich nicht allein auf Knotenflächen mit den verschiedenen Planspuren übertragen, wie sie das Curvenbüschel des Feldes I_3 zeigt, sondern auch auf solche Trilinearflächen, bei welchen der Knotenpunkt in Schalen sich auflöst. Wählen wir unter den linearen Constructionen, die Schröter im 96. Bande d. Journals f. Math. bespricht, beispielsweise diejenige, nach welcher die Ebenen eines Theilbündels \mathfrak{C} . auf den Reliefgeraden $|b_1, b_2, b_3|$ die Richtpunkte zu den Zeigebenen dreier Büschel $|a_1, a_2, a_3|$ bezeichnet. Das Dreifach der Leitebenen wird in diesem Falle durch $\mathfrak{C}[b_1, b_2, b_3]$ bestimmt, und bei gegebenen Zeigeraxen steht es frei, eine derselben in den Plan zu legen, wonach der Rest der Flächenspur eine Polarcurve wird. Die Geraden solcher Trilinearflächen hat Schröter a. a. O. einlässlich behandelt; doch ist es für das Verständniss der Gestalt nach ihrem Zusammenhang unerlässlich, auch die Polarcurven zu verfolgen, die in den Ebenenbüscheln durch jene Geraden liegen, sowie die trilinearen Reliefcurven, welche je einem Punkt einer Zeigeraxe entsprechen. Es würde für diessmal zu weit führen, hierauf näher einzutreten, da die vorstehenden Erläuterungen den Zweck haben, Grundzüge festzustellen.

Indem wir so die gebogenen Flächen durch ihre Strahlen und Curven auf einer Ebene darstellen, machen

wir uns von dem Modell unabhängig, sichern der Vorstellung Freiheit des Gestaltens und gewähren dem geistigen Verkehre bildsame Hilfsmittel des Gedankentausches.

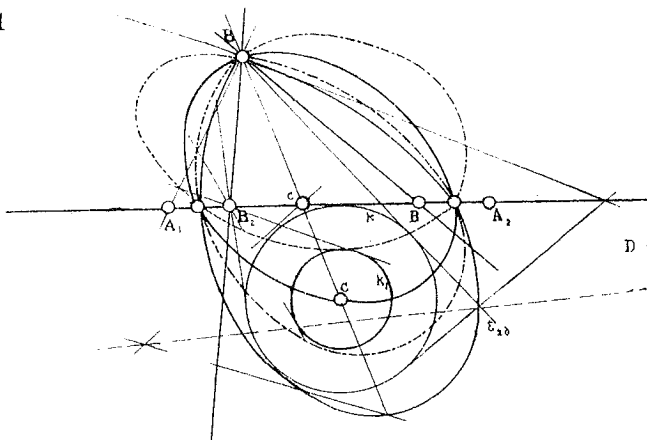
Schluss.

Mit den geregelten Blickbewegungen, welche wir uns beim Ziehen der Linien aneignen, mit der Beherrschung von Plan und Relief, welche das Spiel sich wandelnder Curven und Flächen vermittelt, wird der stetige Zug derselben ein Grund genaueren Erkenntnisses, insofern als wir aus der Biegung mit Sicherheit auf die Lage von Punkten schliessen lernen. Solches Wissen findet seinen Ausdruck natürlich vorzugsweise in Linien, die, nach bestimmten Massverhältnissen angeordnet, zugleich Grundlage weiterer Combinationen werden. Das räumliche Denken verläuft daher an Hand des Zeichnens stetiger, als wenn Worte und Zahlen mit den Linien wechseln. Der Raum ist der Ort unserer Bewegungen, eine Grösse von mehrfacher Ausdehnung, nach allen Richtungen gleichartig und stetig. Analytisch zählen wir die Mannigfaltigkeit seiner Elemente; synthetisch ordnen wir die Lagenverhältnisse der gleichartigen Richtungen, fassen zeichnend die Raumelemente nach Massverhältnissen in stetigen Linien, Flächen und Räumen zusammen. Gleich den physischen Organen entwickelt sich das Vermögen der Raumbildung nach Massgabe unserer Thätigkeit, insonders der Blickbewegung. Die einzelnen äusseren Erscheinungen verschmelzen dabei um so fester zu einer Form unseres Bewusstseins, je stetiger wir den Raum durch unsere geregelten Bewegungen beherrschen.

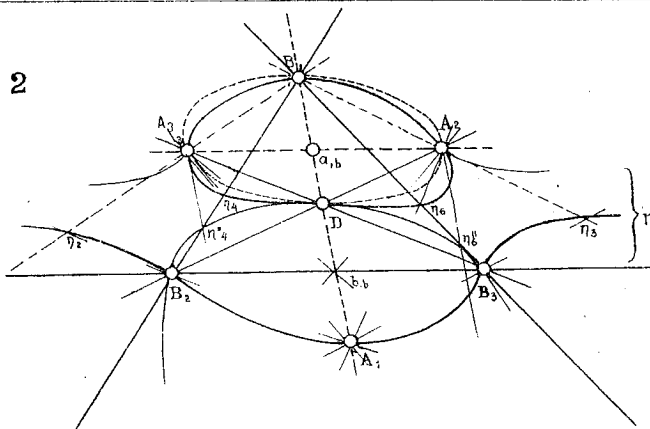
Hottingen-Zürich, 10. Juli 1889.

Stab, Plancurven.

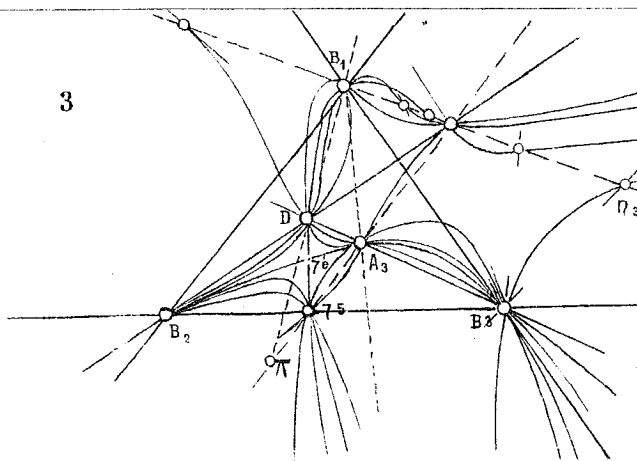
1



2

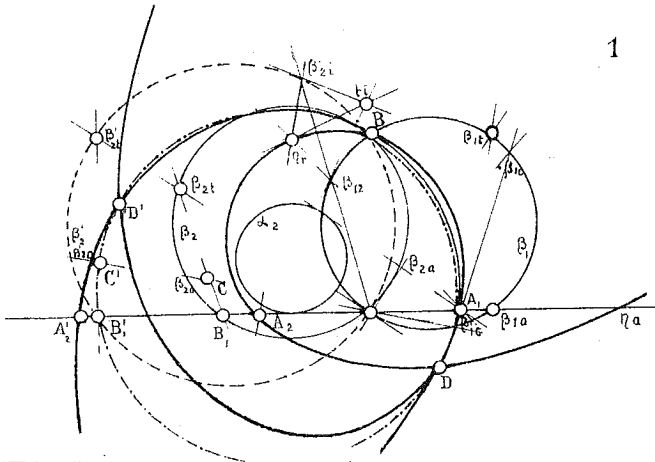


3

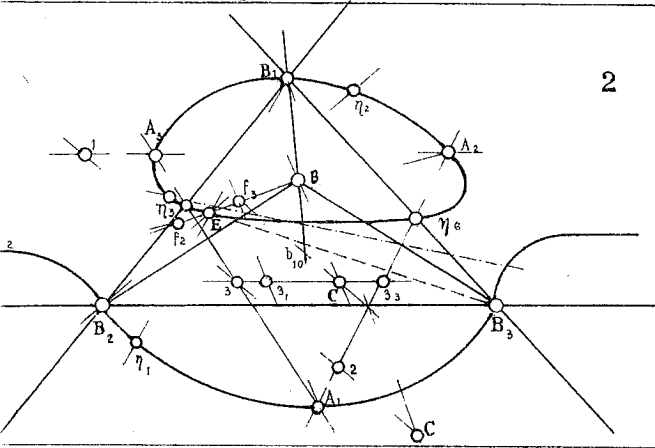


Stab II Reliefcurven.

1



2



3

