Elementare Herleitung der Plücker'schen Formeln.

Von **A. Beck.**

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie man zu den Plücker'schen Formeln zwischen den Singularitäten einer ebenen algebraischen Curve gelangen kann, ohne von der Theorie der Polaren Gebrauch zu machen und ohne überhaupt andere Hülfsmittel anzuwenden als das Princip von der Erhaltung der Anzahl und einige aus den Definitionen unmittelbar hervorgehende elementare Sätze.

a) Da eine Tangente zwei unendlich benachbarte Curvenpunkte enthält und ein Curvenpunkt der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Tangenten ist, so liegen auf einer Tangente ausser dem Berührungspunkt noch $m - 2$ Curvenpunkte (m = Ordnungszahl) und gehen durch einen Curvenpunkt ausser seiner Tangente noch $n - 2$ Tangenten (n = Classenzahl).

b) Da auf einer Inflexionstangente drei von den Schnittpunkten mit der Curve unendlich benachbart sind und ein Rückkehrpunkt als Punkt definirt ist, durch welchen drei unendlich benachbarte Tangenten gehen, so enthält eine Inflexionstangente ausser dem Berührungspunkt noch $m - 3$ Curvenpunkte und gehen durch einen Rückkehrpunkt ausser seiner Tangente noch $n - 3$ Tangenten.

Durch einen Punkt der Inflexionstangente gehen ausser der letztern noch $n - 2$ Tangenten; jede Gerade durch den Rückkehrpunkt enthält noch weitere $m-2$ Punkte der Curve.

c) Da in einem Doppelpunkt sich zwei Paare unendlich benachbarter Tangenten schneiden und auf einer Doppeltangente zwei Paare unendlich benachbarter Punkte der Curve liegen, so gehen durch den Doppelpunkt ausser den Doppelpunktstangenten noch $n-4$ Tangenten und liegen auf der Doppeltangente ausser den beiden Berührungspunkten noch $m-4$ Curvenpunkte.

d) Dass zwei Curven von den Ordnungen m_1 und m_2 (Classen n_1 und n_2) $m_1 \cdot m_2$ gemeinschaftliche Punkte ($n_1 \cdot n_2$ gemeinschaftliche Tangenten) haben, erkennt man aus dem Princip von der Erhaltung der Anzahl, indem man die Curven in m_1 und m_2 gerade Linien (n_1 und n_2 Punkte) zerfallen lässt.

Aus diesen Sätzen lassen sich nun folgende weitere Schlüsse ziehen, bei welchen das Princip von der Erhaltung der Anzahl die Hauptrolle spielt.

1) Jede eigentliche Curve von der zweiten Ordnung ist auch von der zweiten Classe. Denn auf einer Tangente der Curve zweiter Ordnung kann ausser dem Berührungspunkt kein Curvenpunkt mehr liegen, folglich gehen durch einen Curvenpunkt nur die beiden unendlich benachbarten Tangenten, die in ihm berühren, folglich ist nach a) $n-2=0$.*)

2) Ein Doppelpunkt vermindert die Zahl der eigentlichen Tangenten, die durch einen beliebigen Punkt gehen, um zwei, indem er zwei zusammenfallende uneigentliche Tangenten erzeugt. Denn wenn eine Curve zweiter Ord-

*) Cremona, Einleitung in eine geom. Theorie der ebenen Curven, Nr. 61.

nung einen Doppelpunkt erhält, so muss sie in zwei gerade Linien zerfallen, und durch einen beliebigen Punkt geht an sie keine eigentliche Tangente mehr, folglich repräsentirt die Linie nach dem Doppelpunkt zwei uneigentliche Tangenten (1).

3) Wenn eine Curve $m$ter Ordnung in m gerade Linien zerfällt, so gehen durch einen beliebigen Punkt an sie keine eigentlichen Tangenten mehr, dagegen nach (2) $2 \cdot \frac{1}{2} m (m - 1)$ uneigentliche Tangenten. Für eine Curve ohne Doppelpunkte ist also nach dem Princip von der Erhaltung der Anzahl

$$n = m (m - 1)$$

und für eine Curve mit d Doppelpunkten ist (2)

$$n = m (m - 1) - 2d.$$

4) Ein Rückkehrpunkt vermindert die Zahl der eigentlichen Tangenten, die durch einen beliebigen Punkt gehen, um drei.

Beweis: Eine Curve dritter Ordnung ohne Doppel- oder Rückkehrpunkt ist nach (3) von der Classe 6. Besitzt sie einen Rückkehrpunkt, so können durch denselben ausser der Rückkehrtangente keine weitern Tangenten gelegt werden, da solche nach (b) mehr als drei Curvenpunkte enthielten. Unter Anwendung von (b) folgt daraus $n - 3 = 0$. Durch den Rückkehrpunkt ist also die Classenzahl von 6 auf 3 vermindert worden, d. h. die Linie nach dem Rückkehrpunkt repräsentirt drei uneigentliche Tangenten.

Besitzt also eine Curve d Doppelpunkte und k Rückkehrpunkte, so ist

$$n = m (m - 1) - 2 d - 3 k.$$

Die dualistisch entsprechende Betrachtung würde ergeben:

$$m = n(n-1) - 2t - 3i$$

(t = Anzahl der Doppeltangenten, i = Anzahl der Inflexionen).

5) Wenn eine Curve einen Doppelpunkt hat, so treten uneigentliche Doppeltangenten auf, welche in die vom Doppelpunkt an die Curve gehenden Tangenten fallen. Aus (2) folgt, dass jede solche Tangente für zwei Doppeltangenten gezählt werden muss, und da die Classenzahl $= m(m-1) - 2$, also die Zahl der vom Doppelpunkt zu ziehenden Tangenten nach (c) $= m(m-1) - 6$ ist, so erzeugt der Doppelpunkt $2[m(m-1) - 6]$ uneigentliche Doppeltangenten. Hat die Curve d Doppelpunkte, so dass die Classe $= m(m-1) - 2d$ wird, so ist die Zahl der uneigentlichen Doppeltangenten der erwähnten Art $= 2d[m(m-1) - 2d - 4]$. Hiezu kommen aber noch uneigentliche Doppeltangenten zweiter Art, welche in die Verbindungslinien von je zwei Doppelpunkten fallen und welche offenbar viermal gezählt werden müssen.

Wenn eine Curve einen Rückkehrpunkt hat, so muss jede von ihm aus an die Curve gelegte Tangente nach (4) für drei uneigentliche Doppeltangenten zählen. Sind Doppel- und Rückkehrpunkte vorhanden, so sind offenbar in der Verbindungslinie eines Doppelpunktes und eines Rückkehrpunktes 6 und in der Verbindungslinie zweier Rückkehrpunkte 9 uneigentliche Doppeltangenten vereinigt. Da die Classenzahl $= m(m-1) - 2d - 3k$ ist, so erhält man als Gesammtzahl der uneigentlichen Doppeltangenten (b, c)

$$= 2d[m(m-1)-2d-3k-4] + 4\cdot\tfrac{1}{2}d(d-1) + 3k[m(m-1)-2d-3k-3] +$$
$$+ 9\cdot\tfrac{1}{2}k(k-1) + 6d\cdot k.$$

$$=2d[m(m-1)-6]-2d(d-1)+3k[m(m-1)-6]-\tfrac{9}{2}k(k-1)-6d\cdot k.$$

$$=[m(m-1)-6](2d+3k)-2d(d-1)-\tfrac{9}{2}k(k-1)-6d\cdot k.^{*)}$$

6) Um nun die Zahl der eigentlichen Doppeltangenten einer Curve zu bestimmen, nehmen wir zunächst an, m sei eine gerade Zahl, $m=2p$, und lassen die Curve in p Curven zweiter Ordnung zerfallen. Es gibt dann $2p(p-1)$ eigentliche Doppeltangenten, die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Kegelschnitte, und ausserdem uneigentliche Doppeltangenten, deren Anzahl aus (5) gefunden wird, wenn man einsetzt $m=2p$, $k=0$, $d=2p(p-1)$. Die Summe dieser eigentlichen und uneigentlichen Doppeltangenten muss die Anzahl der eigentlichen Doppeltangenten sein, welche eine Curve von der Ordnung $2p$ ohne Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt. Man erhält:

$$t=2p(p-1)+[2p(2p-1)-6]\cdot 4p(p-1)-4p(p-1)[2p(p-1)-1]$$
$$=2p(p-1)(4p^2-9),$$

oder wenn man wieder m einführt:

$$t=\tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9).$$

Ist zweitens m eine ungerade Zahl, so setzen wir $m=2q+3$ und lassen die Curve in q Curven zweiter Ordnung und eine Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt und Rückkehrpunkt zerfallen. Da letztere keine Doppeltangente haben kann, und ihre Classenzahl $=6$ ist, so ist die Zahl der eigentlichen Doppeltangenten der Gesammtcurve $=2q(q-1)+12q$. Die uneigentlichen Tangenten ergeben sich aus (5), wenn wir einsetzen:

$$m=2q+3,\ k=0,\ d=2q(q-1)+6q.$$

---

*) Vergl. Plücker, Theorie der algebr. Curven, S. 210.

Bilden wird dann wieder die Summe der eigentlichen und uneigentlichen Doppeltangenten, so erhalten wir:

$$t = 2q(q-1) + 12q + [(2q+3)(2q+2)-6]\cdot 4q(q+2) - \\ - 4q(q+2)[2q(q+2)-1] \\ = 2q(q+3)(2q+1)(2q+3),$$

oder indem wir wieder m einführen:

$$t = \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9),$$

wie oben.

Für eine Curve mit d Doppelpunkten und k Rückkehrpunkten ergibt sich somit nach (5) als Zahl der eigentlichen Doppeltangenten:

$$t = \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - [m(m-1)-6](2d+3k) + 2d(d+1) + \\ + \tfrac{9}{2}k(k-1) + 6dk.$$

Als vierte Gleichung könnte noch die dualistisch entsprechende für die Anzahl der Doppelpunkte aufgestellt werden. Da aber durch drei der Zahlen m, n, d, k, t, i die übrigen bestimmt sein müssen, so müssen sich aus den drei gefundenen Formeln (4) (6) alle andern Beziehungen zwischen den Singularitäten ableiten lassen.

Riga, October 1888.