Die Darstellung der allgemeinen Besselschen Function durch bestimmte Integrale.

Von

Eduard Gubler.

Die nach Bessel benannte Function ist von ihm selbst durch die Gleichung

$$\overset{n}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet, definirt worden. Sie genügt der Differentialgleichung

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)\,y = 0\,. \tag{a}$$

Verallgemeinert man diese Definition, wie Herr H. F. Weber gethan*), indem man den Parameter n jede beliebige Zahl sein lässt, so genügt die Function der Differentialgleichung (a) nicht mehr, sondern der folgenden:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)\,y - \frac{(x-n)\sin n\pi}{\pi} = 0\,. \tag{b}$$

Herr Carl Neumann hat in seiner Schrift «Theorie der Besselschen Functionen» (1867) die Function durch die unendliche Reihe $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+n+1)}$, wo n eine ganze null oder positive Zahl bedeutet, definirt und Herr Hermann Hankel verallgemeinerte dann diese Definition in ähnlicher Weise wie Herr Weber die

*) Siehe diese Vierteljahrsschrift. 24. Jahrg. 1879. pag. 45 u. f.

ursprüngliche Bessel'sche dadurch, dass er n jede beliebige Zahl bedeuten lässt. Die durch die unendliche Reihe definirte Function befriedigt unter jeder Voraussetzung für n die Differentialgleichung (a). Integralausdrücke für diese allgemeine Function haben auf verschiedenen Wegen die Herren Schläfli, Hankel und Sonine entwickelt. Die hierauf bezügliche Literatur habe ich, so weit sie mir bekannt ist, sorgfältig zitirt. Mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Schläfli, hat in einer Vorlesung über Bessel'sche Functionen, die ich im Sommer 1877 hörte, alle wesentlichen Integralformen durch Verwandlung der Summe, mittelst welcher die Function definirt wird, in bestimmte Integrale gewonnen, ähnlich wie er dies bereits im dritten Band der «Mathematischen Annalen» pag. 148 für eine Integralform gethan hatte.

Die nachfolgenden Entwicklungen wollen darlegen, wie sämmtliche Integralformen mit Nothwendigkeit aus der Differentialgleichung hervorgehen; nur auf diese Weise erscheinen sie naturgemäss und wird ihr innerer Zusammenhang ins richtige Licht gesetzt.

Die Differentialgleichung kann nicht erledigt werden, ohne dass man eine complementäre Function beizieht. Ich habe die Schläflische K-Function gewählt. Neumanns complementäre Besselsche Function ist für einen ganzen nullen oder positiven Parameter n:

$$\overset{n}{Y}(x) = \frac{\pi}{2}\,\overset{n}{K}(x) + [\log 2 + \Gamma'(1)]\,\overset{n}{J}(x)\,.$$

Die eben so bezeichnete, aber für einen beliebigen positiven Parameter ($n = a$) definirte complementäre Function Hankels ist $\frac{\pi}{\cos a\pi} \cdot e^{ia\pi} \cdot \overset{a}{K}(x)$.

Die beiden ersten kurzen Abschnitte sind einer vollständigen Parallele der Jod- und K-Function in Bezug auf ihre Recursionen gewidmet, während der dritte Abschnitt dann die Integraldarstellungen beider Functionen in ein einheitliches Ganzes zusammenfasst.

Ueber einzelne Ausdrücke ist Folgendes voraus zu schicken: Wenn $x = a + ib = re^{i\varphi}$, wo a, b, φ reell, r positiv sind, so ist zur Abkürzung geschrieben $a =$ rep.x, $ib =$ iep.x, $r =$ mod.x. r heisst der absolute Werth, φ die Phase von x. Erkennungsort ist (nach Schläfli) derjenige Punct eines Integrationsweges genannt, wo man über die Logarithmen der im Integralausdruck vorkommenden Potenzbasen eine Festsetzung trifft.

I.

Definition der allgemeinen Besselschen Function. Recursionsgleichungen.

1) Die allgemeine Besselsche Function sei nach den Herren Carl Neumann*) und Hermann Hankel**) definirt durch die Gleichung:

$$\overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+\lambda+1)}, \qquad (1)$$

wo der Parameter a jede beliebige reelle oder imaginäre Zahl sein kann und wo λ die ganzen Zahlen von 0 bis ∞ durchläuft. Die Reihe rechts convergirt für jeden end-

*) Theorie der Besselschen Functionen. 1867.

**) Mathematische Annalen Bd. I. 1869. pag. 467.

lichen Werth von x. — Für $a = {}^1/_2$ und $a = -{}^1/_2$ findet man leicht

$$\overset{1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x, \quad \overset{-1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x.$$

2) Wird der Parameter durch die ganze negative Zahl $-n$ ersetzt, so ist

$$\overset{-n}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(-n+\lambda+1)}.$$

So lange $\lambda < n$ sind die Gammafunctionen unendlich gross, die Terme also gleich Null, die Reihe beginnt erst mit $\lambda = n$. Man setze deshalb $\lambda = n + \mu$, wo nun μ bei 0 beginnt.

Dann folgt

$$\overset{-n}{J}(x) = (-1)^{n}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\mu!\,\Gamma(n+\mu+1)}, \text{ das heisst}$$

$$\overset{-n}{J}(x) = (-1)^{n}\,\overset{n}{J}(x) \tag{2}$$

Ersetzt man in $\overset{n}{J}(x)$ das Argument x durch $-x$, so kömmt

$$\overset{n}{J}(-x) = (-1)^{n}\,\overset{n}{J}(x) = \overset{-n}{J}(x) \tag{3}$$

3) Differentirt man die Besselsche Function nach ihrem Argument, so erhält man im allgemeinen Term den Factor $a + 2\lambda$. Im Nenner steht $\lambda!\,\Gamma(a + \lambda + 1)$. Multiplizirt man die erste Abgeleitete mit x und fügt $a\,\overset{a}{J}(x)$ hinzu, so tritt im Zähler der Factor $2\,(a + \lambda)$ heraus.

$$\frac{a+\lambda}{\Gamma(a+\lambda+1)} = \frac{1}{\Gamma(a+\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(a-1+\lambda+1)},$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+2\lambda}$ sinkt auf $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1+2\lambda}$ herab und schreibt man noch $x^{a+2\lambda} = x \cdot x^{a-1+2\lambda}$, so hat man

$$\left(x\frac{d}{dx}+a\right)\overset{a}{J}(x) = x\overset{a-1}{J}(x). \tag{4}$$

Subtrahirt man von der mit x multiplizirten ersten Abgeleiteten $a\overset{a}{J}(x)$, so bleibt im allgemeinen Term der Factor 2λ stehen, also

$$\left(x\frac{d}{dx}-a\right)\overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{a+2\lambda-1}x^{a+2\lambda}}{\lambda-1!\,\Gamma(a+\lambda+1)},$$

wo λ bei 1 beginnt, da der Term für $\lambda = 0$ verschwindet. Wird λ durch $\lambda+1$ ersetzt, so kommt

$$\left(x\frac{d}{dx}-a\right)\overset{a}{J}(x) = -x\overset{a+1}{J}(x). \tag{5}$$

Durch Addition und Subtraction von (4) und (5) erhält man die Relationen

$$\overset{a+1}{J}(x) - \overset{a-1}{J}(x) + 2\frac{d}{dx}\overset{a}{J}(x) = 0, \tag{6}$$

$$\overset{a+1}{J}(x) + \overset{a-1}{J}(x) + \frac{2a}{x}\overset{a}{J}(x) = 0, \tag{7}$$

gültig für jeden Werth von a. Für $a = 0$ gibt (6)

$$\frac{d}{dx}\overset{0}{J}(x) = -\overset{1}{J}(x) = \overset{-1}{J}(x)$$

und (7) die aus (2) bekannte Relation $\overset{-1}{J}(x) = -\overset{1}{J}(x)$.

Addirt man noch (6) und (7), so ergibt sich

$$\overset{a+1}{J}(x) = \frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) - \frac{d}{dx}\overset{a}{J}(x), \tag{8}$$

eine Relation, welche je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende der Functionen J mit einander verbindet.

4) Man kann die Relation (7) benutzen um eine beliebige Besselsche Function durch zwei aufeinanderfolgende derselben Reihe, d. h. derjenigen J-Functionen, deren Parameter eine arithmetische Reihe mit der Differenz 1 bilden, auszudrücken. Die Formel, welche diese Reduction leistet, hat wohl Herr Lommel*) zuerst bekannt gegeben. Setzt man zunächst $a-1$ statt a, so gibt (7)

$$\overset{a}{J}(x) = (a-1)\frac{2}{x}\overset{a-1}{J}(x) - \overset{a-2}{J}(x).$$

Lässt man nun $\overset{a}{J}(x)$ stehen und drückt $\overset{a-1}{J}$ durch $\overset{a-2}{J}$, $\overset{a-3}{J}$, dann $\overset{a-2}{J}$ durch $\overset{a-3}{J}$, $\overset{a-4}{J}$ aus u. s. f., so erhält man schliesslich

$$\overset{a}{J}(x) = A_m \overset{a-m}{J}(x) - A_{m-1}\overset{a-m-1}{J}(x), \tag{9}$$

$$\text{wo } A_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \binom{m-\lambda}{\lambda} \frac{\Gamma(a-\lambda)}{\Gamma(a-m+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda},$$

und A_{m-1} sich von A_m nur dadurch unterscheidet, dass m durch $m-1$ ersetzt ist. Die A sind ihrer Entstehung nach ganze Functionen von $\frac{2}{x}$; die Entwicklungen müssen daher abbrechen, wenn der Exponent von $\frac{2}{x}$ negativ wird. Die allgemeine Gültigkeit der Gleichung (9) wird durch den Schluss von m auf $m+1$ bewiesen. Angenommen die Formel (9) sei bis zu einem gewissen Werthe von m als richtig befunden, so substituire man darin

$$\overset{a-m}{J}(x) = (a-m-1)\frac{2}{x}\overset{a-m-1}{J}(x) - \overset{a-m-2}{J}(x).$$

---

*) Lommel, Studien über die Besselschen Functionen. 1868. p. 3.

Als Coeffizient von $\overset{a-m-2}{J}$ bekömmt man $-A_m$, aber als solchen von $\overset{a-m-1}{J}(x)$ den Ausdruck $(a-m-1)\frac{2}{x}A_m - A_{m-1}$. Der Coeffizient von $(-1)^\lambda\left(\frac{2}{x}\right)^{m+1-2\lambda}$ hierin ist

$$(a-m-1)\binom{m-\lambda}{\lambda}\frac{\Gamma(a-\lambda)}{\Gamma(a-m+\lambda)}+\binom{m-\lambda}{\lambda-1}\frac{\Gamma(a-\lambda+1)}{\Gamma(a-m+\lambda)}$$

$$=\frac{1}{m-2\lambda+1}\binom{m-\lambda}{\lambda}\frac{\Gamma(a-\lambda)}{\Gamma(a-m+\lambda)}\Big\{(a-m-1)(m-2\lambda+1)+\lambda(a-\lambda)\Big\}$$

$$=\binom{m+1-\lambda}{\lambda}\frac{\Gamma(a-\lambda)}{\Gamma(a-m-1+\lambda)}.$$ Es ist also

$$(a-m-1)\frac{2}{x}A_m-A_{m-1}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda\leq\frac{m+2}{2}}(-1)^\lambda\binom{m+1-\lambda}{\lambda}\frac{\Gamma(a-\lambda)}{\Gamma(a-m-1+\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{m+1-2\lambda}=A_{m+1}$$

daher $\overset{a}{J}(x)=A_{m+1}\overset{a-m-1}{J}(x)-A_m\overset{a-m-2}{J}(x)$.

Wenn die Gleichung (9) für m richtig ist, so ist sie es also auch für $m+1$. Man hat $A_{-1}=0$, $A_0=1$, $A_1=(a-1)\frac{2}{x}$. Für $m=0, 1$ gibt dies in Verbindung mit (9) die richtigen Gleichungen

$$\overset{a}{J}(x)=\overset{a}{J}(x),\quad \overset{a}{J}(x)=(a-1)\frac{2}{x}\overset{a-1}{J}(x)-\overset{a-2}{J}(x).$$

Die Formel ist somit richtig für $m=0$, 1, also auch für $m=2, 3, 4 \ldots$ d. h. sie ist allgemein gültig.

Setzt man in (7) $1-a$ statt a, so erhält man

$$\overset{-a}{J}(x)=-(a-1)\frac{2}{x}\overset{-a+1}{J}(x)-\overset{-a+2}{J}(x)$$

und in ganz gleicher Weise wie vorhin die Formel

$$\overset{-a}{J}(x)=(-1)^m A_m\overset{-a+m}{J}(x)+(-1)^m A_{m+1}\overset{-a+m+1}{J}(x),\qquad (10)$$

wo A_m, A_{m+1} die vorige Bedeutung haben.

5) Anstatt den Parameter rückwärts zu schieben, kann man auch die beiden Functionen, in denen man darstellt, z. B. $\overset{a}{J}$, $\overset{a-1}{J}$ Gl. (7) festhalten und alle andern durch dieselben ausdrücken. Der vorhin eingeschlagene Weg führt mit etwas mehr Mühe direct zum Ziel. Die Formel, welche die gestellte Aufgabe erfüllt, erhält man aber am einfachsten aus (9), wenn man dort a durch $a+m$ ersetzt. Es kommt

$$\overset{a+m}{J}(x) = \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^{\lambda} \binom{m-\lambda}{\lambda} \frac{\Gamma(a+m-\lambda)}{\Gamma(a+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}\right) \overset{a}{J}(x)$$

$$- \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m}{2}} (-1)^{\lambda} \binom{m-\lambda-1}{\lambda} \frac{\Gamma(a+m-\lambda)}{\Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda-1}\right) \overset{a-1}{J}(x). \quad (11)$$

Ersetzt man in (10) a durch $a+m$, so bekommt man

$$\overset{-a-m}{J}(x) = (-1)^{m} \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^{\lambda} \binom{m-\lambda}{\lambda} \frac{\Gamma(a+m-\lambda)}{\Gamma(a+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}\right) \overset{-a}{J}(x)$$

$$+ (-1)^{m} \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m}{2}} (-1)^{\lambda} \binom{m-\lambda-1}{\lambda} \frac{\Gamma(a+m-\lambda)}{\Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda-1}\right) \overset{-a+1}{J}(x). \quad (12)$$

6) Der Fall, wo der Parameter $a = \frac{1}{2}$ ist, verdient noch besondere Betrachtung. Er liefert einfache Formeln für $\overset{m+\frac{1}{2}}{J}(x)$ und $\overset{-m-\frac{1}{2}}{J}(x)$.

Es ist $\binom{m-\lambda}{\lambda} = \binom{m-\lambda}{m-2\lambda}$

$$\frac{\Gamma\left(m-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} = \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\frac{3}{2}\right) \dots \left(m-\lambda-\frac{3}{2}\right)\left(m-\lambda-\frac{1}{2}\right),$$

somit

$$\binom{m-\lambda}{\lambda}\frac{\Gamma\left(m-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{(m-2\lambda)!}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)(\lambda+2)\ldots\ldots\left(m-\lambda-\frac{1}{2}\right)(m-\lambda)$$

$$=\frac{1}{2^{2m-4\lambda}}\cdot\frac{1}{(m-2\lambda)!}(2\lambda+1)(2\lambda+2)(2\lambda+3)\ldots\ldots(2m-2\lambda-1)(2m-2\lambda)$$

$$=\frac{1}{2^{2m-4\lambda}}\cdot\frac{1}{(m-2\lambda)!}\cdot\frac{(2m-2\lambda)!}{(2\lambda)!}$$

also für $a=\frac{1}{2}$

$$(-1)^{\lambda}\binom{m-\lambda}{\lambda}\frac{\Gamma(a+m-\lambda)}{\Gamma(a+\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}=\frac{(-1)^{\lambda}(2m-2\lambda)!}{(2\lambda)!\,(m-2\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda}$$

Ebenso findet man für $a=\frac{1}{2}$

$$(-1)^{\lambda}\binom{m-\lambda-1}{\lambda}\frac{\Gamma(a+m-\lambda)}{\Gamma(a+\lambda+1)}\left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda-1}=(-1)^{\lambda}\frac{(2m-2\lambda-1)!}{(2\lambda+1)!\,(m-2\lambda-1)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda-1}$$

somit

$$\overset{m+\frac{1}{2}}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}}(-1)^{\lambda}\frac{(2m-2\lambda)!}{(2\lambda)!\,(m-2\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda}\sin x\right.$$

$$\left.+\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m}{2}}(-1)^{\lambda+1}\frac{(2m-2\lambda-1)!}{(2\lambda+1)!\,(m-2\lambda-1)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda-1}\cos x\right)$$

Die Ausdrücke $\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}}(-1)^{\lambda}\frac{(2m-2\lambda)!}{(2\lambda)!\,(m-2\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda}$

und $\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m}{2}}(-1)^{\lambda+1}\frac{(2m-2\lambda-1)!}{(2\lambda+1)!\,(m-2\lambda-1)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda-1}$

ergänzen sich zu einer Reihe, deren Glieder, abgesehen vom Vorzeichen, die Reihe $\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m} \frac{(2m-\lambda)!}{\lambda!(m-\lambda)!}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{m-\lambda}$ bilden. Will man diese Reihe rückwärts lesen, was für unsern Zweck vortheilhafter ist, so muss man λ durch $m-\lambda$ ersetzen und das neue λ wieder bei 0 beginnen lassen. Man bekömmt: $\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m} \frac{(m+\lambda)!}{\lambda!(m-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}$. Die Vorzeichen, vorwärts gelesen, müssen sein $+ - - + + - - + + \ldots$

Nun ist $\cos\left[(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]=\pm\sin x$, je nachdem $m+1-\lambda\equiv 1$ (mod. 4) oder $\equiv 3$ (mod. 4), und $=\pm\cos x$, je nachdem $m+1-\lambda\equiv 0$ (mod. 4) oder $\equiv 2$ (mod. 4). Der Ausdruck $\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m}\cos\left[(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]$ gibt somit für irgend ein ganzes positives m alternirend $\sin x$, $\cos x$ mit derselben Vorzeichenfolge, wie sie der obigen rückwärts gelesenen Reihe zukommen muss, daher

$$\overset{m+\frac{1}{2}}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\frac{(m+\lambda)!}{\lambda!(m-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\cos\left[(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]. \quad (13)$$

Eine gleiche Betrachtung führt auf

$$\overset{-m-\frac{1}{2}}{J}(x)=(-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\frac{(m+\lambda)!}{\lambda!(m-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\sin\left[(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]. \quad (14)$$

II.

Die Besselsche Differentialgleichung.
Die complementäre Besselsche Function.

7) Ersetzt man in (6) den Parameter a durch $a+1$ und nimmt dann den Werth für $\overset{a+1}{J}(x)$ aus (8), so kommt nach einer leichten Reduction

$$x^2 \frac{d^2 \overset{a}{J}(x)}{dx^2} + x \frac{d \overset{a}{J}(x)}{dx} + (x^2 - a^2) \overset{a}{J}(x) = 0,$$ oder wenn man $\overset{a}{J}(x)$ durch y ersetzt

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - a^2) y = 0 \tag{15}$$

Dies ist die Besselsche Differentialgleichung.

Ein partikuläres Integral dieser Gleichung ist durch $y = \overset{a}{J}(x)$ bereits gegeben. Da der Parameter im Quadrat vorkömmt, so erkennt man, dass $y = \overset{-a}{J}(x)$ ein zweites partikuläres Integral ist, und somit

$$y = A \overset{a}{J}(x) + B \overset{-a}{J}(x),$$

wo A, B arbiträre Constanten bedeuten, das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung darstellt. Für den Fall, wo a zu einer ganzen positiven Zahl n wird, kann diese Lösung wegen $\overset{-n}{J}(x) = (-1)^n \overset{n}{J}(x)$ nicht mehr das allgemeine Integral sein, sondern wird zu einem partikulären $y = C \overset{n}{J}(x)$. Um auch für diesen Fall eine zweite partikuläre Lösung zu erhalten, führen wir eine von Herrn Schläfli angegebene Function $\overset{a}{K}(x)$ ein*), welche durch die Gleichung

*) Annali di Matematica: Serie II^a. Tomo VI° pag. 17. Die durch (16) definirte Function ist das $\frac{2}{\pi}$ fache derjenigen, welche in den Annali auftritt und wird von Hrn. Schläfli in der Vorlesung benutzt. — Vergleiche auch: H. Weber: Ueber die stationären Strömungen der Electrizität in Cylindern. Crelles Journal, Bd. 76. 1873. pag. 9.

$$\overset{a}{K}(x) = \operatorname{cotg} a\pi\, \overset{a}{J}(x) - \frac{1}{\sin a\pi}\, \overset{-a}{J}(x) \tag{16}$$

definirt ist. Diese Function ist ebenfalls ein partikuläres Integral von (15) und hat, wie wir sofort zeigen werden, auch wenn a in die ganze positive Zahl n übergeht, einen bestimmten endlichen von $\overset{n}{J}(x)$ verschiedenen Werth. $y = \overset{n}{J}(x)$ und $y = \overset{n}{K}(x)$ sind die beiden partikulären, $y = A\,\overset{n}{J}(x) + B\,\overset{n}{K}(x)$ ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - n^2)\, y = 0\,.$$

Man bemerke noch, dass (16) für $a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$ gibt

$$\overset{1/2}{K}(x) = -\overset{-\frac{1}{2}}{J}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,\quad \overset{-\frac{1}{2}}{K}(x) = \overset{1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

8) Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Function $\overset{a}{K}(x)$ für ein ganzes positives a durch eine Summe darzustellen und setzen daher $a = n + \varepsilon$, n ganz und positiv, ε zum Verschwinden bestimmt. Wenn ε sehr klein ist, so hat man $\overset{n+\varepsilon}{K}(x) = \dfrac{\overset{n+\varepsilon}{J}(x) - (-1)^n\, \overset{-n-\varepsilon}{J}(x)}{\varepsilon\pi}$, also

$$\overset{n}{K}(x) = \lim(\varepsilon = 0) \cdot \frac{1}{\varepsilon\pi}\left[\overset{n+\varepsilon}{J}(x) - (-1)^n\, \overset{-n-\varepsilon}{J}(x)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon\pi} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+\varepsilon}}{\lambda!\,\Gamma(n+\lambda+1+\varepsilon)} - (-1)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\mu-\varepsilon}}{\mu!\,\Gamma(-n+\mu+1-\varepsilon)} \right\}.$$

Terme beider Summen lassen sich erst vereinigen, wenn μ bei n anlangt; man trenne daher von der zweiten

Summe einen ersten Theil von $\mu = 0$ bis $\mu = n-1$ ab und ersetze im zweiten Theil μ durch $n+\lambda$, wo λ bei 0 beginnen muss. Dann ist

$$\overset{n}{K}(x) = \lim_{\varepsilon=0} \cdot \frac{1}{\varepsilon\pi}\left\{-(-1)^{n^\mu} \sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^\mu \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda-\varepsilon}}{\mu!\,\Gamma(-n+\mu+1-\varepsilon)}\right.$$

$$\left.+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+\varepsilon}}{\lambda!\,\Gamma(n+\lambda+1+\varepsilon)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-\varepsilon}}{(n+\lambda)!\,\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)}\right)\right\}$$

In der ersten Summe ist das Argument der Gammafunction stets negativ. $\Gamma(-n+\mu+1-\varepsilon) = \Gamma[1-(n-\mu+\varepsilon)]$. Man benutze den Satz $\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, dann erhält man $\frac{1}{\Gamma(-n+\mu+1-\varepsilon)} = (-1)^{n-\mu}\cdot\varepsilon\cdot\Gamma(n-\mu+\varepsilon)$,

$$\text{somit } (-1)^n(-1)^\mu\frac{1}{\varepsilon\pi}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\mu-\varepsilon}}{\Gamma(-n+\mu+1-\varepsilon)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\mu}\left(1-\varepsilon\log\frac{x}{2}\right)\left[\Gamma(n-\mu)+\Gamma'(n-\mu)\varepsilon\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot(n-\mu-1)!\,x^{-n+2\mu},$$

da man hier ε in 0 übergehen lassen darf. Also ist, wenn man noch λ für μ schreibt

$$\lim_{\varepsilon=0}\cdot\frac{1}{\varepsilon\pi}\cdot\left(-(-1)^{n^\lambda}\sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda-\varepsilon}}{\lambda!\,\Gamma(-n+\lambda+1-\varepsilon)}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}.$$

Der allgemeine Term der zweiten Summe ist

$$\frac{(-1)^\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+\varepsilon}}{\lambda!\,\Gamma(n+\lambda+1+\varepsilon)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-\varepsilon}}{(n+\lambda)!\,\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)}\right).$$

Mit Vernachlässigung von Termen in ε^2 und höhern Potenzen hat man

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+\varepsilon} = \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda} \left(1+\varepsilon \log \frac{x}{2}\right)$$

$$\Gamma(n+\lambda+1+\varepsilon) = (n+\lambda)!\left(1+\frac{\Gamma'(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1)}\,\varepsilon\right).$$

Also wird der erste Posten in der Klammer, wenn (nach Schläfli) $\frac{\Gamma'(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1)} = \Lambda\,(n+\lambda+1)$ gesetzt wird [$\psi\,(n+\lambda)$ bei Gauss], $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \cdot \frac{1+\varepsilon \log \frac{x}{2}}{1+\Lambda\,(n+\lambda+1)\,\varepsilon}$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left(1+\varepsilon\left[\log \frac{x}{2} - \Lambda\,(n+\lambda+1)\right]\right).$$

Ebenso findet man für den zweiten Posten

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!(n+\lambda)!} \cdot \frac{1-\varepsilon \log \frac{x}{2}}{1-\Lambda(\lambda+1)\varepsilon} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left(1-\varepsilon\left[\log \frac{x}{2} - \Lambda(\lambda+1)\right]\right).$$

Subtrahirt man noch, so kommt

$$\frac{(-1)^\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+\varepsilon}}{\lambda!\,\Gamma(n+\lambda+1+\varepsilon)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-\varepsilon}}{(n+\lambda)!\,\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)}\right)$$

$$= \frac{(-1)^\lambda}{\pi} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left(2\log \frac{x}{2} - \Lambda\,(n+\lambda+1) - \Lambda\,(\lambda+1)\right)$$

und schliesslich

$$\overset{n}{K}(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}$$

$$+\frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(n+\lambda)!}\left(2\log \frac{x}{2} - \Lambda\,(n+\lambda+1) - \Lambda\,(\lambda+1)\right) \quad (17)$$

Die Function wird im Nullpunkt logarithmisch und wenn nicht $a=0$ auch rational unstetig.

9) Es bleibt zu zeigen, dass die K-Function dieselben Relationen darbietet wie die J-Function.

Aus (16) bekommt man das System

$$\operatorname{cotg} a\pi \cdot \overset{a}{J}(x) - \frac{1}{\sin a\pi}\overset{-a}{J}(x) = \overset{a}{K}(x)$$

$$\frac{1}{\sin a\pi}\overset{a}{J}(x) - \operatorname{cotg} a\pi \cdot \overset{-a}{J}(x) = \overset{-a}{K}(x),$$

dessen Determinant $-\operatorname{cotg}^2 a\pi + \frac{1}{\sin^2 a\pi} = 1$ ist.

Dasselbe gibt

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\overset{-a}{K}(x) - \cos a\pi\, \overset{a}{K}(x)}{\sin a\pi}.$$

Da nun, wenn $a=n$ ganz und positiv ist, $\sin a\pi = 0$ wird, $\overset{a}{J}(x)$ aber einen endlichen Werth beibehält, so muss auch $\underset{(a=n)}{\overset{-a}{K}(x) - \cos a\pi\, \overset{a}{K}(x)} = 0$ sein. Daraus folgt sofort

$$\overset{-n}{K}(x) = (-1)^n\, \overset{n}{K}(x) \tag{18}$$

Lässt man in (4) und (5) a in $-a$ übergehen, so kommt

$$\left(x\frac{d}{dx} - a\right)\overset{-a}{J}(x) = x\overset{-a-1}{J}(x) \quad (4a), \quad \left(x\frac{d}{dx} + a\right)\overset{-a}{J}(x) = -x\overset{-a+1}{J}(x) \quad (5a)$$

Die zwei Gleichungen (4) und (5a) resp. mit $\operatorname{cotg} a\pi$, $-\frac{1}{\sin a\pi}$ multiplizirt und dann addirt geben

$$\left(x\frac{d}{dx} + a\right)\left(\operatorname{cotg} a\pi\, \overset{a}{J}(x) - \frac{1}{\sin a\pi}\overset{-a}{J}(x)\right)$$

$$= x\left(\operatorname{cotg} a\pi\, \overset{a-1}{J}(x) + \frac{1}{\sin a\pi}\overset{-(a-1)}{J}(x)\right)$$

$$= x\left(\operatorname{cotg}(a-1)\pi\, \overset{a-1}{J}(x) - \frac{1}{\sin(a-1)\pi}\overset{-(a-1)}{J}(x)\right),$$

das heisst

$$\left(x\frac{d}{dx}+a\right)\overset{a}{K}(x) = x\overset{a-1}{K}(x). \tag{19}$$

Ganz gleich geben (5) und (4a)

$$\left(x\frac{d}{dx}-a\right)\overset{a}{K}(x) = -x\overset{a+1}{K}(x). \tag{20}$$

Die Gleichungen (6) bis (12) kann man nun einfach abschreiben, indem man K an die Stelle von J setzt. Die neuen Gleichungen mögen in derselben Reihenfolge die Nummern (21) bis (27) tragen.

Setzt man in (26) und (27) $a = \frac{1}{2}$, beachtet die Werthe für $\overset{1/2}{K}(x)$ und $\overset{1/2}{K}(x)$ und wiederholt die Betrachtungen, die zu Gleichung (13) geführt haben, so erhält man

$$\overset{m+1/2}{K}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\frac{(m+\lambda)!}{\lambda!(m-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\sin\left[(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]. \tag{28}$$

$$\overset{-m-1/2}{K}(x) = (-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\frac{(m+\lambda)!}{\lambda!(m-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\cos\left[(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]. \tag{29}$$

10) Es seien y_1, y_2 zwei particuläre Integrale der Besselschen Differentialgleichung. Bezeichnet man die linken Seiten der entsprechenden Gleichungen mit $\Box y_1$ und $\Box y_2$, so ist

$$y_1 \cdot \Box y_2 - y_2 \cdot \Box y_1 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$x^2\left(y_1\frac{d^2y_2}{dx^2} - y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}\right) + x\left(y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}\right) = 0.$$

$x = 0$ würde nichts aussagen. Wir schliessen daher diesen Werth aus, dividiren mit x und schreiben das erste Glied in der Form

$$x\frac{d}{dx}\left(y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}\right) = x\frac{d}{dx}V(x).$$

Dann hat die Gleichung die Gestalt $x\,d\,V(x) + V\,dx = 0$, woraus durch Integration folgt

$$x\,V = \text{const.}, \text{ also}$$

$$y_1 \frac{d y_2}{d x} - y_2 \frac{d y_1}{d x} = \frac{\text{const.}}{x}.$$

Es sei nun $y_1 = \overset{a}{J}(x)$, $y_2 = \overset{-a}{J}(x)$. Zur Bestimmung der Constanten kann man die Werthe dieser Functionen für ein spezielles x benutzen. Man nehme x sehr klein an, so dass man sich mit dem ersten Term der Entwicklung begnügen darf. Dann wird jener Determinant links

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(1+a)} & \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}}{\Gamma(1-a)} \\[2ex] \dfrac{a\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{2\,\Gamma(1+a)} & \dfrac{-a\left(\frac{x}{2}\right)^{-a-1}}{2\,\Gamma(1-a)} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)} = -\frac{2\sin a\pi}{\pi x}.$$

Die Constante ist also $-\dfrac{2\sin a\pi}{\pi}$ und man hat

$$\overset{a}{J}(x)\frac{d\overset{-a}{J}(x)}{dx} - \overset{-a}{J}(x)\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = -\frac{2\sin a\pi}{\pi x}. \tag{30}$$

Geht a in die ganze Zahl n über, so hat man links identisch Null. Daher führen wir noch die K-Function ein. Schreibt man das letzte Resultat als Determinant in der Form

$$\begin{vmatrix} \overset{a}{J}(x), & \overset{-a}{J}(x) \\[1ex] \dfrac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}, & \dfrac{d\overset{-a}{J}(x)}{dx} \end{vmatrix} = -\frac{2\sin a\pi}{\pi x},$$

multiplizirt die zweite Kolonne mit $-\dfrac{1}{\sin a\pi}$ und addirt die mit $\operatorname{cotg} a\pi$ multiplizirte erste Kolonne, so erhält man

$$\overset{a}{J}(x)\frac{d\overset{a}{K}(x)}{dx}-\overset{a}{K}(x)\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}=\frac{2}{\pi x}. \tag{31}$$ *)

Nimmt man die Werthe für $\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}$, $\frac{d\overset{-a}{J}(x)}{dx}$ aus (8) und (4), nachdem man in letzterer Gleichung a in $-a$ umgesetzt hat, und setzt sie in (30) ein, so kommt

$$\overset{a}{J}(x)\overset{-a-1}{J}(x)+\overset{a}{J}(x)\overset{a+1}{J}(x)=-\frac{2\sin a\pi}{\pi x} \tag{32}$$

und mit Benutzung von (8) und (23) folgt aus (31)

$$\overset{a}{J}(x)\overset{a+1}{K}(x)-\overset{a}{K}(x)\overset{a+1}{J}(x)=-\frac{2}{\pi x}. \tag{33}$$

III.

Darstellung der Besselschen Function durch bestimmte Integrale.

11) Um für die Besselsche Function Ausdrücke in bestimmten Integralen zu bekommen, suchen wir Lösungen der Besselschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale. Diese Lösungen werden dann $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{-a}{J}(x)$ oder lineare Verbindungen dieser Functionen darstellen. Zu diesem Zweck bedienen wir uns einer allgemeinen, von Euler herrührenden Methode, lineare und homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit linearen Coefficienten durch bestimmte Integrale zu lösen. Sie mag

*) Diese Relation hat Herr H. Weber gegeben in Crelles Journal Bd. 76. 1873, pag. 10.

der Vollständigkeit wegen kurz berührt werden.*) Die Differentialgleichung sei:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(A_{n-\lambda}+B_{n-\lambda}x\right)\frac{d^{n-\lambda}y}{dx^{n-\lambda}}=0.$$

Man suche ihr durch eine Integralform $y=\int e^{xu}U\,du$ zu genügen, wo u eine Hülfsvariable und U eine noch zu bestimmende Function von u allein bedeute, und wo die Grenzen nicht von x abhängen.

Setzt man noch

$$\sum_{\lambda=0}^{n}A_{n-\lambda}u^{n-\lambda}=A(u),\quad \sum_{\lambda=0}^{n}B_{n-\lambda}u^{n-\lambda}=B(u),$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\int e^{xu}A(u)U\,du+x\int e^{xu}B(u)U\,du=0.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\left\{e^{xu}B(u)U\right\}+\int e^{xu}\left\{A(u)U-\frac{d(B(u)U)}{du}\right\}du=0.$$

Bestimmt man nun die Grenzen so, dass der Functionsunterschied $\left\{e^{xu}B(u)U\right\}$ verschwindet, so kann man der Differentialgleichung genügen, indem man $A(u)U=\frac{d(B(u)U)}{du}$ setzt, woraus $U=\text{const.}\ \frac{1}{B(u)}e^{\int\frac{A(u)}{B(u)}du}$ folgt.

Es gibt nun zwei Wege in der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-a^2)y=0$$

*) Vergleiche: Dienger, die Differential- und Integralrechnung. 1857, pag. 384.

diejenige Form herauszubringen, wo alle Coeffizienten in Bezug auf die unabhängige Variable linear sind:

1) indem man x als unabhängige Variable erhält,

2) indem man x^2 als unabhängige Variable einführt.

12) Man setze, um die erste Verwandlung zu erreichen, $y = x^a z$; dann bekommt die Differentialgleichung die Form:

$$x\frac{d^2 z}{dx^2} + (2a+1)\frac{dz}{dx} + xz = 0. \tag{34}$$

Für $z = \int e^{xu} U du$ wird $A(u) = (2a+1)u$, $B(u) = u^2 + 1$, $U = \text{const.} \times (u^2+1)^{a - 1/2}$, und da es auf einen constanten Factor nicht ankommt, so kann man

$$z = \int e^{xu} (u^2+1)^{a - 1/2} du \tag{A}$$

setzen mit der Bedingung $\left\{ e^{xu} (u^2+1)^{a + \frac{1}{2}} \right\} = 0$.

Als particuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung hat man somit bei derselben Bedingung

$$y = x^a \int e^{xu} (u^2+1)^{a - 1/2} du.$$

Setzt man in der für z erhaltenen Differentialgleichung $x^2 = 4s$, so geht sie in

$$s\frac{d^2 z}{ds^2} + (a+1)\frac{dz}{ds} + z = 0 \tag{35}$$

über. $z = \int e^{su} U du$ gibt $A(u) = (a+1)u + 1$, $B(u) = u^2$,

$U = \text{const.} \times e^{-\frac{1}{u}} u^{a-1}$, also

$$z = \int_0^\infty e^{-xu - \frac{1}{u}} u^{a-1}\,du \tag{B}$$

mit der Bedingung $\left\{ e^{-xu - \frac{1}{u}} u^{a+1} \right\}_0^\infty = 0$, oder für die ursprüngliche Differentialgleichung als particuläre Lösung

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{a} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2 u}{4} - \frac{1}{u}} u^{a-1}\,du$$

mit der Bedingung $\left\{ e^{-\frac{x^2 u}{4} - \frac{1}{u}} u^{a+1} \right\}_0^\infty = 0$.

Diese Integrale stellen zwei Typen dar. Herr Schläfli hat dieselben bei einer analogen Behandlung der Differentialgleichung des Riccati in den Annali di Matematica (Serie II^a. — Tomo 1^o. 1868) aufgestellt. [Der obige Typus (A) umfasst die dortigen zusammengehörigen Formen (B) und (C), der obige Typus (B) entspricht dem dortigen Typus (A).] Den Typus (A) hat Herr Hankel im ersten Band der mathematischen Annalen von Clebsch und Neumann (1869) eingehend erörtert und allgemein gültige Integralausdrücke für die Besselsche Function gegeben. Aber er hat, wie schon Herr Schläfli bemerkte, zum Theil Integrationswege gewählt, bei denen es schwer ist, für die Integrale eine reelle Form herauszubringen. Herr Hankel hat auch unterlassen, seine Ausdrücke in reelle Form überzuführen. Für den Typus (B) hat Herr Schläfli einen allgemein gültigen reellen Integralausdruck entwickelt*) und Herr Sonine hat im

*) A. a. O. und „Mathematische Annalen" Bd. III, pag. 148.

16. Band der mathematischen Annalen (1880) sämmtliche Integrale aufgestellt, zu denen er führt.

13) Für den Typus (A) ergibt die Bedingung als Grenzen der Integrale i, $-i$ und ∞ (den Horizont). Die Pole i und $-i$ sind nur zugänglich, wenn rep. $\left(a+\frac{1}{2}\right)>0$; am Horizont ist diejenige Gegend, wo xu negativ sehr gross ist, immer zugänglich, wie auch $a+\frac{1}{2}$ beschaffen sei, da die Exponentialfunction die Potenz $(u^2+1)^{a+1/2}$ weit überwiegt. $\infty\cdot k$ bezeichne eine zugängliche Gegend am Horizont. Dann kann man folgende drei Integrale aufstellen

$$\int_{\infty\cdot k}^{-i} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2}\,du,\quad \int_{-i}^{i} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2}\,du,\quad \int_{i}^{\infty\cdot k} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2}\,du.$$

Zwischen diesen Integralen besteht die lineare Relation

$$\int_{\infty\cdot k}^{-i} + \int_{-i}^{i} + \int_{i}^{\infty\cdot k} = 0,$$

wenn die Integrationsvariable um keinen Verzweigungspunct herumgeführt wird.

Diese Integrale sind aber linear enthalten in zwei Integralen, die man erhält, wenn folgende zwei Integrationswege gewählt werden:

a) Man umkreise die beiden Pole i, $-i$ in einer lemniskatischen Linie, so dass der Pol i rechtläufig, $-i$ rückläufig umgangen werde. Das Integral sei mit z_1 bezeichnet. Fig. 1.

b) Man führe die Integrationsvariable aus $\infty\cdot k$ rechtläufig um beide Pole i, $-i$ herum nach $\infty\cdot k$ zurück.

Es vereinfacht die Betrachtung, ohne ihrer Allgemeinheit Eintrag zu thun, wenn wir x positiv annehmen. Dann hat das Integral im Westpunkt ($-N$*) die grösste Convergenz und man kann den Integrationsweg aus diesem Punct in genannter Weise um beide Pole $i, -i$ herumlegen. Fig. 2. Das entsprechende Integral sei mit z_2 bezeichnet.

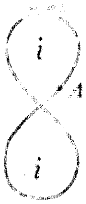


Fig. 1.

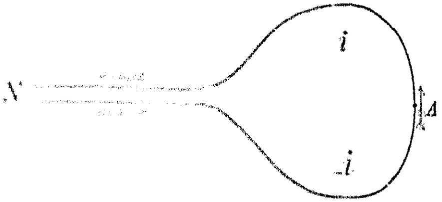


Fig. 2.

14) Wir betrachten zunächst das Integral

$$z_1 = \int e^{xu} (u^2 + 1)^{\nu - \frac{1}{2}} du \quad \text{(Fig. 1).} \tag{36}$$

Unter der Voraussetzung rep. $\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$ kann man den Integrationsweg dann so gestalten, dass er die Pole in ganz kleinen Kreisen umgibt und zwischen denselben in der lateralen Achse liegt. Die um die Pole herum genommenen Integrale verschwinden und es bleiben nur zwei Integrale, — von $-i$ bis i und i bis $-i$ zu nehmen. Im Punct A, wo u aufsteigend die reelle Achse durchschneidet, soll $\log (u^2 + 1)$ positiv sein. Beim Umlauf um i erhält dieser Logarithmus den Zuwachs $2i\pi$ und verliert ihn wieder, wenn $-i$ rückwärts umlaufen wird. Für den aufsteigenden Theil des Weges bekommt man

*) N bedeute eine sehr grosse positive Zahl, die unendlich werden darf.

also das Integral $\int\limits_{-i}^{i} e^{xu}(u^2+1)^{a-\frac{1}{2}}du$, für den absteigenden $e^{i\pi(2a-1)}\int\limits_{i}^{-i} e^{xu}(u^2+1)^{a-\frac{1}{2}}du-e^{2ia\pi}\int\limits_{-i}^{i} e^{xu}(u^2+1)^{a-\frac{1}{2}}du.$

Man setze, um reelle Grenzen zu bekommen, $u=it$ und addire, so kommt

$$=i\left(1+e^{2.ia\pi}\right)\int\limits_{-1}^{1} e^{ixt}(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}}dt=2ie^{ia\pi}\cos a\pi\int\limits_{-1}^{1} e^{ixt}(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}}dt. \quad (36a)$$

Die Elemente, welche zu t und zu $-t$ gehören, vereinigen sich zu $2\cos(xt)(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}}dt.$ Man hat also

$$z_1=4ie^{ia\pi}\cos a\pi\int\limits_{0}^{1}\cos(xt)(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}}dt. \quad (36b)$$

Der Coeffizient von $(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ in der Entwicklung von $\cos(xt)$ ist $4ie^{ia\pi}\cos a\pi\int\limits_{0}^{1} t^{2n}(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}}dt$, oder wenn man $t^2=u$ setzt, $=2ie^{ia\pi}\cos a\pi\int\limits_{0}^{1} u^{n-\frac{1}{2}}(1-u)^{a-\frac{1}{2}}du$

$$=2ie^{ia\pi}.\cos a\pi\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\ \Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a+n+1)}.$$

Da $\dfrac{1}{(2n)!}=\dfrac{1}{2^{2n}}\cdot\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$, $\cos a\pi=\dfrac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\ \Gamma(\frac{1}{2}+a)}$,

so hat man schliesslich

$$z_1 = 2i\pi e^{ia\pi} \cdot \frac{\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(^1/_2 - a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(a+n+1)} = 2i\pi \cdot e^{ia\pi} \cdot \frac{\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(^1/_2 - a)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \overset{a}{J}(x) \quad (36)$$

somit

$$\overset{a}{J}(x) = e^{-ia\pi} \frac{\Gamma(^1/_2 - a)}{\Gamma(^1/_2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{a} \frac{1}{2i\pi} \int e^{ixu} (u^2 - 1)^{a - ^1/_2} du \quad \text{(Weg Fig. 1)} \quad (37)$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a + ^1/_2)} \int_{-1}^{1} e^{ixt} (1 - t^2)^{a - ^1/_2} dt \quad (37a)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a + ^1/_2)} \int_{0}^{1} \cos(xt)(1 - t^2)^{a - ^1/_2} dt \quad (37b)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a + ^1/_2)} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi) \cos^{2a}\varphi \, d\varphi . \quad (37c)$$

Der letzte Ausdruck wurde von Bessel und Jakobi zuerst gegeben.

15) Im Integral

$$z_2 = \int e^{ixu} (u^2 - 1)^{a - ^1/_2} du \quad \text{(Fig. 2)} \quad (38)$$

kann man den Integrationsweg so legen, dass stets mod. $u > 1$ ist. Dann kann man $(u^2 - 1)^{a - ^1/_2}$ nach fallenden Potenzen von u entwickeln und hat

$$(u^2 - 1)^{a - ^1/_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a - ^1/_2}{n} u^{2a - 2n - 1} .$$

$\int e^{ixu} u^{2a - 2n - 1} du$ hat 0 und ∞ zu Polen. Als Integrationsweg lege man daher eine Schlinge aus $-N$ um 0 nach $-N$.

Dann ist, wenn noch $u = \frac{t}{x}$ gesetzt wird,

$$\int_{-N}^{(0)} e^{xu} u^{2a-1-2n}\, du = x^{-2a+2n} \int_{-N}^{(0)} e^{t} t^{2a-1-2n}\, dt$$

$$= \frac{2i\pi}{\Gamma(-2a+2n+1)} x^{-2a+2n}$$

$$= 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n-a+1/2)\Gamma(n-a+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-2a+2n}.$$

Ferner ist

$$\binom{a-1/2}{n} = (-1)^n \frac{(1/2-a)(3/2-a)(5/2-a)\cdots\cdots(n-1/2-a)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad \cdots\cdots\quad n} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(n-a+1/2)}{\Gamma(1/2-a)}.$$

somit

$$_2 = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-a)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-a+2n}}{n!\,\Gamma(n-a+1)} = 2i\pi\cdot\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-a)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-a} J^{-a}(x). \quad (38a)$$

Um für das Integral eine gewöhnliche reelle Form zu bekommen, führen wir, unter der Voraussetzung, dass $a + \frac{1}{2}$ positiv sei, u von $-N$ gerade nach 0, von da gerade nach $-i$, in kleinem Kreise rechtläufig herum, gerade nach i, rechtläufig herum, gerade nach 0 und von da nach $-N$ zurück. Der Integrationsweg hat also folgende Gestalt

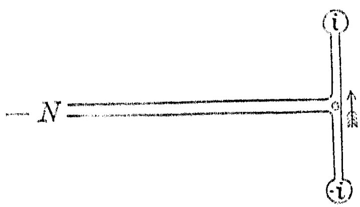


Fig. 3.

Im Bereich der Pole verhält sich das Integral wie $\frac{\varepsilon^{a+1/2}}{a+1/2}$, wo ε sehr klein ist, verschwindet also bei unserer Voraussetzung und man braucht blos die sechs Integrale

$$\int_{-N}^{0} \cdot \int_{0}^{i} \cdot \int_{i}^{0} \cdot \int_{0}^{i} \cdot \int_{i}^{0} \cdot \int_{0}^{-N} \quad \text{zu bestimmen.}$$

Erkennungsort sei der Punct, wo u aufsteigend die reelle Achse durchschneidet. Hier soll die Potenzbasis u^2+1 die Phase 0 haben. Da sie bei jedem Umlauf um einen Pol die Phase 2π gewinnt, so muss u^2+1 auf dem Weg $-N \longrightarrow 0 \longrightarrow i$ die Phase -2π, auf dem Weg $-N \longrightarrow 0 \longrightarrow i$ die Phase 2π haben. Auf dem Weg $0 \longrightarrow i$ hat u^2+1 stets die Phase 0.

a) Die Intgrale $\int\limits_{-N}^{0}$ und $\int\limits_{0}^{-N}$.

Um 0 und ∞ als Grenzen zu bekommen, setze man $u=-t$, $du=-dt$. Auf dem Hinweg ist $\log(u^2+1) = \log(t^2+1) - 2i\pi$, auf dem Rückweg $\log(u^2+1) = \log(t^2+1) + 2i\pi$, wo $\log(t^2+1)$ reell verstanden ist, somit

$$\int_{-N}^{0} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2}\,du = -e^{i\pi(1-2a)} \int_{N}^{0} e^{-xt}(t^2+1)^{a-1/2}\,dt$$

$$\int_{0}^{-N} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2}\,du = -e^{i\pi(1-2a)} \int_{0}^{N} e^{-xt}(t^2+1)^{a-1/2}\,dt.$$

Die Summe beider Theile beträgt also

$$2i\pi\cdot\frac{2\sin a\pi}{\Gamma(1/2-a)\,\Gamma(1/2+a)}\int\limits_0^\infty e^{-xt}\,(t^2+1)^{a-1/2}\,dt. \qquad (\alpha)$$

b) Die Integrale $\int\limits_0^{-i}$ und $\int\limits_{-i}^{0}$.

Um die Grenzen 0 und 1 zu bekommen, setze man $u=-it$, also $du=-i\,dt$, $\log(u^2+1)=\log(1-t^2)-2i\pi$ abwärts, $\log(u^2+1)=\log(1-t^2)$ aufwärts, $\log(1-t^2)$ stets reell.

Dann folgt

$$\int\limits_0^{-i} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2}\,du=-i\,e^{-i\pi(2a-1)}\int\limits_0^1 e^{-ixt}\,(1-t^2)^{a-1/2}\,dt,$$

$$\int\limits_{-i}^{0} e^{xu}\,(u^2+1)^{a-1/2}\,du=i\int\limits_0^1 e^{-ixt}\,(1-t^2)^{a-1/2}\,dt.$$

Die Summe beider Theile beträgt, wenn man $e^{i\pi}$ durch -1 ersetzt, und die Exponentialfunctionen vereinigt

$$i\int\limits_0^1\left(e^{-i(2a\pi+xt)}+e^{-ixt}\right)(1-t^2)^{a-1/2}\,dt. \qquad (\beta)$$

c) Die Integrale $\int\limits_0^{i}$ und $\int\limits_{i}^{0}$.

$u=it$, $du=i\,dt$, $\log(u^2+1)=\log(1-t^2)$ aufwärts, $=\log(1-t^2)+2i\pi$ abwärts, gibt

$$\int\limits_0^{i} e^{xu}\,(u^2+1)^{a-1/2}\,du=i\int\limits_0^1 e^{ixt}\,(1-t^2)^{a-1/2}\,dt,$$

$$\int_{-1}^{0} e^{ixu}(u^2-1)^{a-1/2}\,du = i\,e^{-(2a+1)\pi i}\int_{1}^{0} e^{ixt}(1-t^2)^{a-1/2}\,dt;$$

durch Addition beider Theile erhält man:

$$i\int_0^1\left(e^{-(2a\pi + xt)i} - e^{ixt}\right)(1-t^2)^{a-1/2}\,dt. \qquad (\gamma)$$

d) Addirt man zunächst die Integrale (β) und (γ), so kommt als Summe

$$4i\cos a\pi\int_0^1 \cos(xt+a\pi)(1-t^2)^{a-1/2}\,dt$$

$$= 2i\pi\cdot\frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\,\Gamma(\frac{1}{2}+a)}\int_0^1\cos(xt+a\pi)(1-t^2)^{a-1/2}\,dt \qquad (\delta)$$

und schliesslich erhält man durch Addition von (α) und (δ)

$$z_2 = 2i\pi\cdot\frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\,\Gamma(\frac{1}{2}+a)}\left\{\sin a\pi\int_0^\infty e^{-xt}(t^2+1)^{a-1/2}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\cos(xt+a\pi)(1-t^2)^{a-1/2}\,dt\right\}. \qquad (38b)$$

Die Vergleichung von (38), (38a) und (38b) gibt

$$\overset{-a}{J}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-a)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{a}\frac{1}{2i\pi}\int e^{ixu}(u^2-1)^{a-1/2}\,du \text{ (Weg Fig. 2)}. \qquad (39)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(a+\frac{1}{2})}\left\{\sin a\pi\int_0^\infty e^{-xt}(1+t^2)^{a-1/2}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\cos(xt+a\pi)(1-t^2)^{a-1/2}\,dt\right\}. \qquad (39a)$$

$$\overset{-a}{J}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)} \left\{ \sin a\pi \int_0^\infty e^{-x \operatorname{Sin}\chi} \operatorname{Cos}^{2a}\chi \, d\chi \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi + a\pi) \cos^{2a}\varphi \, d\varphi \right\}. \qquad (39\text{b})$$

Ist a der ganzen Zahl n gleich, so gibt (39b)

$$\overset{-n}{J}(x) = (-1)^n \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(n+1/2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi) \cos^{2n}\varphi \, d\varphi \qquad (39\text{c})$$

und durch Vergleichung mit (37c) findet man wieder die Relation (2).

Durch Combination von (37c) und (39b) erhält man leicht

$$\overset{a}{K}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi) \cos^{2a}\varphi \, d\varphi - \int_0^\infty e^{-x\operatorname{Sin}\chi} \operatorname{Cos}^{2a}\chi d\chi \right\} \quad (40)^{*})$$

$$\overset{-a}{K}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi + a\pi) \cos^{2a}\varphi \, d\varphi \right.$$

$$\left. - \cos a\pi \int_0^\infty e^{-x\operatorname{Sin}\chi} \operatorname{Cos}^{2a}\chi \, d\chi \right\}. \qquad (40\text{a})$$

16) Multiplizirt man in (37) beiderseits mit $e^{ia\pi}$, so stimmt der Integralausdruck mit demjenigen in (39) mit Ausnahme des Weges vollständig überein. Man kann

---

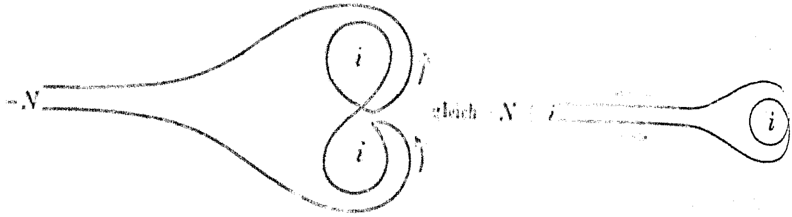
*) Für einen ganzen Parameter ($a = n$) hat diesen Integralausdruck H. Weber gegeben. Journal für Mathematik von Borchardt, Bd. 76, pag. 9.

beide Ausdrücke nun so combiniren, dass ein Pol frei wird. Um den Pol $-i$ frei zu machen, müssen wir den absteigenden Zweig des Integrationsweges Fig. 1 mit dem aufsteigenden in Fig. 2 verbinden und daher im Integral (37) den Erkennungsort aus der Gegend von 0 am aufsteigenden Zweige an den absteigenden Zweig verlegen, was durch eine ganze positive Drehung um den Pol i geschieht und der Potenzbasis u^2+1 die Phase 2π, dem ganzen Ausdruck also den drehenden Factor $-e^{2ia\pi}$ bringt. Der drehende Factor im Ausdruck (37) wird dadurch zu $-e^{ia\pi}$. Der Integralausdruck für $-e^{-ia\pi}\overset{a}{J}(x)$ ist mit Ausnahme des Weges nun derselbe wie für $\overset{a}{J}(x)$ in (39).

Um einen Integralausdruck für

$$\overset{a}{J}(x)-e^{2ia\pi}\overset{a}{J}(x) = i\sin a\pi\left(\overset{a}{J}(x)+i\overset{a}{K}(x)\right)$$

zu bilden, braucht man nur die Wege zu addiren.



In $-N+i$ hat hat u^2+1 am Anfang die Phase -2π, am Ende die Phase 2π. Wählt man den Anfangspunct des Weges als Erkennungsort, so hat hier $\log(u^2+1)$ die imaginäre Componente $-2i\pi$. Wenn rep. $(a+\frac{1}{2})>0$, so kann man den Weg geradlinig machen, weil das Integral im Bereich von i verschwindet. Man hat dann die zwei geradlinigen Integrale $\int\limits_{-N+i}^{i}$ und $\int\limits_{i}^{-N+i}$ zu summiren. Um reelle Grenzen zu bekommen, setze man $u = i - t$, wo t von 0 an alle positiven Werthe durchläuft. $t = N$ wird nun Erkennungsort. Da $u^2 + 1$ am Anfang des Hinweges die Phase -2π hat, so ist

$$(u^2+1)^{a-1/2} = -e^{-2ia\pi} t^{a-1/2} \cdot (t-2i)^{a-1/2}, \; du = -dt, \text{ also}$$

$$\int\limits_{-N+i}^{i} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2} du = -e^{-2ia\pi} \cdot e^{ix} \int\limits_{0}^{N} e^{-xt} \cdot t^{a-1/2} (t-2i)^{a-1/2} dt.$$

Am Ende des Rückweges hat $u^2 + 1$ die Phase 2π,

$$(u^2+1)^{a-1/2} = -e^{2ia\pi} \cdot t^{a-1/2} (t-2i)^{a-1/2}, \; du = -dt,$$

$$\int\limits_{i}^{-N+i} e^{xu}(u^2+1)^{a-1/2} du = e^{2ia\pi} \cdot e^{ix} \int\limits_{0}^{N} e^{-xt} \cdot t^{a-1/2} (t-2i)^{a-1/2} dt.$$

Die Summe S beider Theile ist

$$S = 4i \sin a\pi \cos a\pi \cdot e^{ix} \int\limits_{0}^{N} e^{-xt} t^{a-1/2} (t-2i)^{a-1/2} dt.$$

Im Erkennungsort $t = N$ hat das Product $t(t-2i)$ nulle Phase. Man kann daher für beide Factoren, die hier positiv sind ($-2i$ als endlich verschwindet neben t), die Phase 0 annehmen. Geht t von N nach 0, so behält der Factor t diese Phase bei, aber der Strahl vom Pol $2i$ nach t macht eine negative Viertelsdrehung, was dem Factor $t - 2i$ in $t = 0$ die Phase $-\frac{\pi}{2}$ bringt. Wenn man nun den Erkennungsort nach 0 verlegt, indem man schreibt

$$t^2 - 2it = e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot 2t \cdot \left(1 + \frac{it}{2}\right),$$

so bekommt man

$$S = -2 \sin a\pi \cdot \cos a\pi\, 2^{a+1/2} \cdot e^{i\left(x - (a+1/2)\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^N e^{-xt}\, t^{a-1/2} \left(1 + \frac{it}{2}\right)^{a-1/2} dt.$$

Berücksichtigt man den obigen Werth von $\overset{-a}{J}(x) - e^{-ia\pi}\overset{a}{J}(x)$, so hat man schliesslich, wenn man noch N in ∞ übergehen lässt:

$$\overset{a}{J}(x) + i\overset{a}{K}(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2+a)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^a \cdot 2^{a+1/2} \cdot$$

$$\times\, e^{i\left(x - (a+1/2)\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-xt}\, t^{a-1/2} \left(1 + \frac{it}{2}\right)^{a-1/2} dt. \quad (41)$$

Ersetzt man t durch $\frac{t}{x}$, so kommt

$$\overset{a}{J}(x) + i\overset{a}{K}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \frac{1}{\Gamma(a+1/2)}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}(a+1/2)\right)} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{a-1/2} \left(1 + \frac{it}{2x}\right)^{a-1/2} dt. \quad (42)$$

Dieses Integral gestattet, die Functionen $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ für ein grosses Argument x zu schätzen. Wenn x so gross ist, dass man sich in der Entwicklung des Binoms mit dem ersten Term begnügen kann, so wird das Integral zu $\Gamma(a + 1/2)$ und man hat

$$\overset{a}{J}(x) + i\overset{a}{K}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}(a + 1/2)\right)}, \quad (43)$$

woraus durch Trennung des Reellen und Imaginären folgt:

$$\overset{a}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}(a+{}^1\!/\!_2)\right),\quad \overset{a}{K}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}(a+{}^1\!/\!_2)\right). \quad (44)$$

Für $\overset{0}{J}(x)$ hat Poisson*) diese Formel zuerst gegeben, die allgemeine Formel Hankel**) und Lommel***).

17) Beim Typus (B) setzen wir zunächst $s=\frac{x^2}{4}$, $u=\frac{2t}{x}$; dann folgt

$$z=\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}\int e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{a-1}\,dt$$

mit der Bedingung $\left\{e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{a+1}\right\}=0$. Man kann der Einfachheit wegen x positiv annehmen, dann erhält man als Grenzen $-\infty$ und 0, oder besser $-N$ und $+\varepsilon$, wo N eine sehr grosse positive, ε eine sehr kleine positive Zahl bezeichnet. a kann beliebig sein. Als Integrationsweg legen wir eine Schlinge aus $-N$ um den Pol 0, also

$$z=\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}\int\limits_{N\;\circlearrowleft\;0} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{a-1}\,dt. \qquad (45)$$

Zur Verwandlung in eine Summe ist diese Form nicht gut geeignet. Wir ersetzen daher t durch $\frac{2t}{x}$ und erhalten

$$z=\left(\frac{x}{2}\right)^{-2a}\int\limits_{N\;\circlearrowleft\;0} e^{t-\frac{x^2}{4t}}\,t^{a-1}\,dt. \qquad (46)$$

---

*) Journal de l'école polytechnique. Cah. XIX: pag. 250.
**) Mathematische Annalen, Bd. I. 1869, pag. 500.
***) Studien über die Besselschen Functionen. 1868, pag. 65.

Da x positiv angenommen ist, kann man als Grenze wieder $-N$ stehen lassen.

Die Potenz $e^{-\frac{x^2}{4t}}$ ist auf unserm Integrationsweg überall entwickelbar. Der Coeffizient von $(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!}$ in dieser Entwicklung ist

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-2a} \int_{-N}^{(0)} e^t\, t^{a-\lambda-1}\, dt = \frac{2i\pi}{\Gamma(-a+\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-2a}.$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$z = 2i\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-a+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(-a+\lambda+1)} = 2i\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \overset{-a}{J}(x) \tag{47}$$

und durch Vergleichung mit (45)

$$\overset{-a}{J}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-N}^{(0)} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\, t^{a-1}\, dt. \tag{48}$$

Da a beliebig ist, so hat man auch

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-N}^{(0)} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\, t^{-a-1}\, dt. \tag{49}$$

Ferner wenn man mit (46) vergleicht

$$\overset{-a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \frac{1}{2i\pi} \int_{-N}^{(0)} e^{t-\frac{x^2}{4t}}\, t^{a-1}\, dt, \tag{48'}$$

$$\overset{a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{N}^{o} e^{t - \frac{x^2}{4t}} t^{-a-1}\, dt. \qquad (49')$$

Wenn man $t = -\frac{1}{u}$ setzt, so geht die Integralform (48) in die (49) über, so dass eine Addition derselben mittelst Addition der Wege möglich wird. Die Variable t habe da, wo sie aufsteigend die reelle Achse überschreitet, die Phase Null, also im Anfang des Weges die Phase $-\pi$. Man setze $\log t = -i\pi - \log u$, wo nun u im Anfang positiv sehr klein ist,

$$\frac{dt}{t} = -\frac{du}{u}, \quad t^a = e^{-ia\pi} u^{-a}, \quad t^{-a} = e^{ia\pi} u^a, \quad \text{somit}$$

$$-e^{ia\pi} \overset{-a}{J}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} u^{-a-1}\, du \qquad (48a)^{*)}$$

$o\ \varepsilon$ (u beginnt mit Phase 0)

$$-e^{-ia\pi} \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} u^{a-1}\, du. \qquad (49a)$$

$o\ \varepsilon$ (u beginnt mit Phase 0)

Die vier Integrale (48), (48a), (49) und (49a) gestatten die Combinationen

$$\overset{-a}{J}(x) - e^{-ia\pi} \overset{a}{J}(x) = i \sin a\pi \left(\overset{a}{J}(x) + i\, \overset{a}{K}(x)\right),$$

$$\overset{a}{J}(x) - e^{ia\pi} \overset{-a}{J}(x) = -\, i \sin a\pi \left(\overset{-a}{J}(x) + i\, \overset{-a}{K}(x)\right),$$

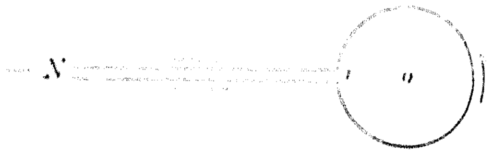
---

*) Vergleiche: Sonine in „Math. Annalen“ Bd. 16, pag. 24.

von denen jede in die andere übergeht, wenn man a in $-a$ umsetzt. Bevor wir diese Addition ausführen, wollen wir den Integralen noch reelle Form geben.

18) Der Integrationsweg in (48) und (49) lässt erkennen, dass die Integrale in zwei Theile zerlegt werden können, von denen der eine — er sei mit A bezeichnet — einen geradlinigen Integrationsweg hat, während beim andern (B) die Variable (etwa in einem Kreis) um Null herum zu führen ist. Durch diese Zerlegung wird die reelle Form erreicht. Wir führen die Verwandlung mit $\overset{-a}{J}(x)$ durch.

Der Theil A setzt sich aus zwei Stücken zusammen: Das erste geht von $-N$ nach -1, das zweite von -1 nach $-N$. Der Punct -1 wird nicht umlaufen, der Weg des zweiten Stücks setzt den Weg des ersten nicht fort; der Theil B geht im Einheitskreis rechtläufig um 0 herum.



Wo die Variable t die reelle Achse aufsteigend überschreitet, soll sie die Phase 0 haben. Auf dem Hinweg von $-N$ bis -1 hat dann t die Phase $-\pi$, auf dem Rückweg -1 bis $-N$ die Phase π. Auf dem Hinweg setze man daher $\log t = -i\pi + \log u$, wo $\log u$ positiv ist. u geht von $+N$ bis $+1$, $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, $t^a = e^{-ia\pi} u^a$. Auf dem Rückweg ist $\log t = i\pi + \log u$, u geht von $+1$ bis $+N$, $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, $t^a = e^{ia\pi} u^a$. Somit bekommt man, wenn man N in ∞ übergehen lässt,

$$A = \frac{-e^{-ia\pi} + e^{ia\pi}}{2i\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} u^{a-1} du = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} u^{a-1} du.$$

Man setze $u = e^{\chi}$, dann geht χ von 0 bis ∞, und man hat

$$A = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi + a\chi} d\chi.$$

Um den zweiten Theil des Integrals zu bestimmen, setze man $u = e^{i\varphi}$, φ geht dann von $-\pi$ bis $+\pi$. Man erhält

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi + a\varphi)} d\varphi.$$

Dieses Integral zerlegen wir. Es ist $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} = \int_{0}^{\pi} - \int_{0}^{-\pi}$.

Im Integral $\int_0^{-\pi}$ werde φ durch $-\varphi$ ersetzt, dann folgt

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(e^{i(x \sin \varphi + a\varphi)} + e^{-i(x \sin \varphi + a\varphi)}\right) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi + a\varphi)\, d\varphi.$$

Somit

$$\overset{-a}{J}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi + a\varphi)\, d\varphi + \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi + a\chi} d\chi \quad (48b)$$

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - a\varphi)\, d\varphi - \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi - a\chi} d\chi. \quad (49b)$$

Wenn a der ganzen Zahl n gleich wird, so fällt der zweite Theil wegen $\sin n\pi = 0$ weg und man hat

$$\overset{n}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi,$$

die erste von Bessel gegebene Integralform.

Um noch die entsprechenden Integrale für $\overset{a}{K}(x)$ und $\overset{-a}{K}(x)$ zu bekommen, setze man in (48b) zunächst $\pi-\varphi$ statt φ und schreibe $\cos(x\sin\varphi - a\varphi + a\pi) = \cos(x\sin\varphi - a\varphi) \times \cos a\pi - \sin(x\sin\varphi - a\varphi)\sin a\pi$. Mit Berücksichtigung der Definitionsgleichung (16) erhält man dann

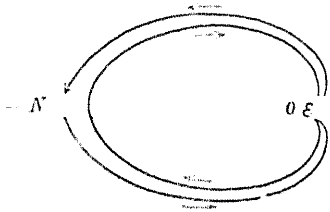
$$\overset{a}{K}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - a\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{Sin}\,\chi}\left(e^{a\chi} + \cos a\pi\cdot e^{-a\chi}\right)d\chi, \quad (50$$

und hieraus $\overset{-a}{K}(x)$, indem man a in $-a$ umsetzt.

19) Wir bilden nun

$$\overset{-a}{J}(x) - e^{-ia\pi}\overset{a}{J}(x) = i\sin a\pi\left(\overset{a}{J}(x) + i\overset{a}{K}(x)\right),$$

was durch Addition der Wege erreicht wird. Als Variable werde in beiden Integralen t gesetzt. Den Integrationsweg für $\overset{-a}{J}(x)$ biegen wir gegen x hin ein und zerreissen ihn hier in einen südlichen Theil (an dessen Ende t mit nuller Phase anlangt) und in einen nördlichen (von dessen Ende t mit nuller Phase ausgeht) und knüpfen das südliche Stück mit dem südlichen Ende des Weges von $-e^{-ia\pi}\overset{a}{J}(x)$ zusammen. Den Weg für $-e^{-ia\pi}\overset{a}{J}(x)$ dehnen wir gegen Westen hin bis nach $-N$ aus ohne ihn zu zerreissen und lassen seine nördliche und südliche Hälfte mit den entsprechenden Hälften des andern Weges zusammenfallen.



Der ganze Weg besteht nun aus zwei Zügen; der erste geht auf der Südseite von $-N$ nach ε, kehrt auf derselben Strasse nach $-N$ zurück, und geht auf der Nordseite nach ε, wo t mit der Phase -2π anlangt. Von diesem ersten Zug bleibt nur das nördliche Stück übrig. Das zugehörige Integral sei mit S' bezeichnet. Der zweite Zug ist der nördliche Theil des Weges für $\overset{-a}{J}(x)$, das entsprechende Integral sei mit S'' bezeichnet, also

$$S'' = \frac{1}{2i\pi}\int e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{a-1}\,dt\,.$$

Um beide Integrale vereinigen zu können, kehre man im Integral S' vorerst den Weg um und setze dafür das Minuszeichen vor das Integral. Dann beginnt t in ε mit Phase -2π. Man setze daher noch $\log t = -2i\pi + \log u$, also $t^a = e^{-2ia\pi}u^a$, $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$. Dann ist das Integral längs des ersten Zuges $S' = -e^{-2ia\pi}S''$. Man hat

$$\overset{-a}{J}(x)-e^{-ia\pi}\overset{a}{J}(x)=S'+S''=\left(1-e^{-2ia\pi}\right)S''=2i\sin a\pi\cdot e^{-ia\pi}S''.$$

$$2S''=e^{ia\pi}\left(\overset{a}{J}(x)+i\overset{a}{K}(x)\right)=\overset{-a}{J}(x)+i\overset{-a}{K}(x)\,,\ \text{somit}$$

$$\overset{-a}{J}(x) + i\overset{-a}{K}(x) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{N \frown o\varepsilon} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{1-a}\,dt \qquad (51)$$

$$\overset{a}{J}(x) + i\overset{a}{K}(x) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{N \frown o\varepsilon} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-a-1}\,dt. \qquad (52)^{*})$$

Setzt man i in $-i$ um, so bekommt man die conjugirten Formeln; der Integrationsweg ist zum obigen in Bezug auf die reelle Achse symmetrisch. Lässt man in den conjugirten Formeln rechts die Minuszeichen weg und kehrt dafür die Wege um, addirt und dividirt mit 2, so erhält man als reelle Componenten (48) und (49). Um (51) und (52) in gewöhnliche Integrale überzuführen, lasse man t gerade von 0 nach 1, dann die nördliche Hälfte des Einheitskreises nach -1 durchlaufen, endlich von -1 gerade nach dem Westpuncte gehen.

20) Die Integrale der beiden Typen können ineinander übergeführt werden, wie Jacobi**), Schläfli***) und Sonine†) gezeigt haben. Den schönen Beweis Sonines fügen wir hier an, indem wir das Integral (49') in die Form (37a) überführen.

Wenn a positiv ist und c irgend eine positive Zahl

*) Vergleiche: Annali di Matematica Serie IIa tomo VIo. pag. 17. Schläfli: Sull'uso delle linee lungo le quali il valore assoluto di una funzione è costante pag. 1—20. Ferner Sonine: Math. Annalen. Bd. 16, pag. 24.

**) Crelles Journal Bd. 15.

***) Annali di Matematica Serie IIa tomo Vo. pag. 199 u. f.

†) Mathematische Annalen von Klein und Mayer. Bd XVI, pag. 25—27.

bedeutet, so führe man im Integral (49′) die Variable von $-N$ dem Horizont entlang über $-iN$ nach $c-iN$, von da parallel der lateralen Achse nach $c+iN$, dann längs des Horizonts über iN nach $-N$ zurück. Die in den Horizont fallenden Theile verschwinden und es bleibt

$$\overset{a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a \frac{1}{2i\pi}\int_{c-iN}^{c+iN} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\, u^{-a-1}\, du .$$

Nun benutze man die Formel $\sqrt{\pi} = \int_{-N}^{N} e^{-z^2}\, dz$ und setze $z = \sqrt{u}\cdot t - \frac{ix}{2\sqrt{u}}$, wo t eine Variable, u eine Constante, deren reelle Componente positiv ist, bedeute; x werde als positive Constante gedacht. Der t—weg geht dann gerade von $-\frac{N}{\sqrt{u}} + \frac{ix}{2u}$ nach $\frac{N}{\sqrt{u}} + \frac{ix}{2u}$ und man bekommt

$$e^{-\frac{x^2}{4u}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\int e^{-ut^2+ixt}\, dt.$$

Weil die Phase von $\sqrt{u}$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegt, so haben die Grenzen grosse reelle Componenten. Man führe t von $-\frac{N}{\sqrt{u}} + \frac{ix}{2u}$ nach $-N$, von hier gerade nach N und endlich von N nach $\frac{N}{\sqrt{u}} + \frac{ix}{2u}$. Anfangs- und Endstück verschwinden und es bleibt

$$e^{-\frac{x^2}{4u}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N} e^{-ut^2+ixt}\, dt.$$ Nun ist

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)}\int_{-N}^{N} e^{ixt}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iN}^{c+iN} e^{(1-t^2)u}\, u^{-a-1/2}\, du\right) dt.$$

So lange als $1-t^2$ noch positiv ist, kann man beide Grenzen des innern Integrals in den Westpunct verlegen: es beträgt also $\frac{1}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}}$. Wenn $1-t^2=0$, so beträgt es

$$\frac{1}{2i\pi}\cdot\frac{1}{a-\frac{1}{2}}\left\{(c-iN)^{-(a-\frac{1}{2})}-(c+iN)^{-(a-\frac{1}{2})}\right\}$$

und verschwindet, wenn $a-\frac{1}{2}$ positiv ist. (Man muss also $a>\frac{1}{2}$ voraussetzen, wenn der Durchgang von t^2 durch 1 keine Schwierigkeit machen soll.) Wenn endlich $1-t^2$ negativ geworden ist, kann man beide Grenzen in den Ostpunct verlegen und hat, weil der Pol 0 nicht mehr umschlossen ist, $\int\limits_{0+\subset\supset N} e^{(1-t^2)u}u^{-a-\frac{1}{2}}\,du=0$.

Für t kommen nun noch die Grenzen -1, 1 in Betracht, und man hat

$$\overset{a}{J}(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(a+\frac{1}{2})}\int\limits_{-1}^{1}e^{ixt}(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}}\,dt,$$

gültig, wenn $a>-\frac{1}{2}$.

Zürich, September 1888.

Notiz zu pag. 147. Durch ein Versehen fiel am Schluss von Abschnitt II die Bemerkung weg, dass die Relationen (32) und (33) von Herrn Lommel herstammen. Math. Annalen. IV. pag. 105—109.