Stufenfolge der Massräume.

Von

Fr. Graberg.

> Motto: Der Prozess der Raumanschauung ist eine Ausmessung des mehrfach ausgedehnten Localzeichensystems der Netzhaut durch die einförmigen Localzeichen der Bewegung.
>
> Wundt. Logik. I. p. 158.

Die Bedeutung des messenden Zeichnens für die Raumerkenntniss festzustellen, erlaubte mir in früheren Jahrgängen der Vierteljahrsschrift die Masszeichen und den Massraum zu besprechen. Diese sollen nun durch ihren Zusammenhang mit der Blickbewegung besser begründet und ihre Anwendung auf Curven und Flächen höherer Ordnung gezeigt werden.

Zieht man gerade oder gebogene Linien über die Zeichenebene, so folgt der Blick den Bewegungen des Stiftes; diese Blickbewegung findet auch statt, wenn die Linie z. B. nur durch einzelne Punkte bezeichnet ist; ja wir können uns kein Liniengebilde vorstellen, ohne dasselbe in Gedanken mit dem Blicke zu durchlaufen. Selbst wenn wir mit ruhendem Auge die Zeichnung überschauen, so legen wir die indirect gesehenen Linien nach Massgabe der Bewegungsvorstellungen aus, welche früher bei directem Sehen erworben wurden. Linien von verschiedener Lage begrenzen sich gegenseitig durch ihre Schnittpunkte und dieser Begrenzung entspricht eine Theilung der Zeitdauer der Blickbewegung. Die gegenseitige Lage und Begrenzung der Linien sind von einander abhängig. Das Mass zeigt die Abhängigkeit zwischen Lage und Begrenzung, Richtung und Länge der

Linien an. Z. B. die Grundlinie eines Dreieckes ist ein Mass für den Winkel der übrigen Seiten an seiner Spitze, weil sie zu- oder abnimmt, wenn eine der Seiten um die Spitze gedreht wird. Die einfachsten Masse sind die gerade Linie, eine Reihe von Entfernungen in derselben Richtung, und der Kreis: eine Folge von Winkeln mit gleichen Schenkeln. Bei diesen ist es möglich die Blick- und die Tastbewegung der Hand durch objective Hülfsmittel, Lineal und Zirkel, zu prüfen und zu berichtigen. Eine Zeichnung, an welcher diese Berichtigung vorgenommen ist, heisst Masszeichen. Nun bedingen sich auch die Masse gegenseitig und verbinden sich zu Massverhältnissen: so die gleichen Seiten eines Dreieckes mit den gleichen Winkeln an der Grundlinie. Ein Masszeichen, welches eine dieser Bedingungen richtig erfüllt, deutet damit auch die andere an und bezeichnet desshalb das Massverhältniss.

Stellt man sich ferner vor, dass einzelne Linien, welche man mit dem Blicke verfolgt, aus der Zeichenebene heraustreten, wie in einem Modell, so verbindet man mit der Blickbewegung die Vorstellung einer plastischen Erscheinung der angeschauten Gestalt, eines Reliefs. Tritt z. B. von 3 Geraden, die durch einen Punkt gehen, eine, etwa die mittlere, aus der Zeichenebene heraus, so stellen wir uns ein Dreikant vor, dessen eine Seitenfläche die Tafel ist, während die beiden anderen zu Seiten der vortretenden Kante gegen die Schenkel in der Zeichenfläche abfallen. Da der senkrechte Abstand eines Punktes von einer Ebene der kürzeste ist, so nehmen wir an, dass jeder Punkt der Reliefgeraden[1]) senkrecht

[1]) Da der Ausdruck: „Raum"-gerade eine Tautologie enthält, ziehen wir „Relief"-g. vor.

über seiner Zeichnung liege, wie man bei Betrachtung der Baurisse und Karten anzunehmen pflegt.

Die Stetigkeit des Raumes endlich bedingt die Vorstellung stetiger Veränderung der Linien nach gegenseitiger Lage und Begrenzung, mithin auch einer stetigen Veränderung der Masse. Um die Lagenänderung oder Bewegung einer Linie zu erkennen, muss sich die Blickbewegung an feste Linien oder Punkte halten. Um die Strahlendrehung eines Büschels zu verfolgen, hält sich der Blick einerseits an den festen Mittelpunkt desselben, anderseits an die Grundlinie, durch deren Theilung das Büschel bestimmt wird. Bezeichnet ein Strahl des Büschels eine Reliefgerade, welche die Zeichenebene in dem Mittelpunkte trifft, so verbindet sich jene Gerade mit dem bewegten Strahle zur Vorstellung einer Ebene, welche sich um die Reliefgerade dreht, eines Ebenenbüschels. Jeder Punkt der Zeichenebene bestimmt mit dem Mittelpunkte einen Strahl, jeder Punkt des Raumes mit der Reliefgeraden oder Axe eine Ebene des Büschels. Der Mittelpunkt des Strahlbüschels mit der Grundlinie stellt daher sinnbildlich die ganze Zeichenebene dar, ebenso vertritt die Axe des Ebenenbüschels mit der Grundlinie sinnbildlich den ganzen Raum. Durch die Einführung stetig bewegter Linien werden also die Zeichenebene und der Raum Gegenstände der Anschauung.

Die Bewegung der Linien wird durch die Massverhältnisse geregelt. Z. B. die Strahlendrehung eines Büschels durch das Doppelverhältniss, welches 3 solcher Strahlen bestimmen. Die Linien oder Linienverbindungen, deren Lage gegebenen Massverhältnissen entspricht, gliedern den Raum. Ein Raum, welcher durch stetig, nach gegebenen Massverhältnissen bewegte Linien gegliedert wird, heisst Massraum. Regeln die Massverhältnisse das Gleiten eines Punktes in bestimmter Richtung oder die Drehung eines Strahles um seine Mitte, einer Ebene um eine Axe derselben, so bedarf es nur der Bezeichnung einer Richtung, um die Theilung des Raumes zu überschauen oder die Lage eines Punktes zu gegebenen Linien, d. h. die Richtung einer Blicklinie zu erkennen. Dieser lineare Massraum umfasst die Figuren der Planimetrie und Stereometrie, welche sich auf die Gerade und die Ebene beziehen, sowie die projectiven Gestalten: Punktreihe, Strahl- und Ebenenbüschel, Strahl- und Ebenenbündel und die Ebene, sofern sich dieselben in Schnittlage befinden; das Drehgebilde (Büschel, Bündel) die Theilung des Gleitgebildes (Richtung, Ebene) wirklich anzeigt.

Die Wechselbeziehungen zwischen Linienparen beruhen auf der Zerlegung derselben Quadratzahl in verschiedene Faktorenpare und kommen bei der harmonischen Theilung als Punkt- und Strahlen-Involution mit Doppelelementen, bei dem Kreisbüschel mit Schnittsehne als Involution ohne Doppelelemente zur Erscheinung. Damit die Involution Doppelemente enthalte, müssen die beiden Reihen der geparten Elemente sich gegen einander bewegen, die Involution desshalb kreuzend sein; ist dieselbe laufend, so bewegen sich die Reihen der geparten Elemente im gleichen Sinne und desshalb können Doppelelemente hiebei nicht vorkommen. Fallen die Doppelelemente zusammen, so bezeichnen dieselben eine Grenze des Reihenpares; man kann darum in solchem Falle die Involution grenzend nennen. In der That bezeichnet die

Grenzinvolution einen Grenzfall zwischen der Lauf- und der Kreuzinvolution. Ueberhaupt bezeichnen diese Namen die Bewegung der Elementenpare genauer als die von den Curven entlehnten Ausdrücke: elliptische, hyperbolische und parabolische Involution, besonders da jene Theilungen bei allen Curven Verwendung finden.

Wie das lineare Strahlbüschel durch die Theilung der Grundlinie bestimmt wird, welcher dasselbe in Schnittlage zugeordnet ist, so auch das involutorische Strahlsystem durch die Involution des Punktsystemes, das ihm in Schnittlage entspricht. Der Mittelpunkt des Strahlsystemes heisst in solchem Falle Pol, die Grundlinie Polare.

Die Massverhältnisse der Polarität regeln die gegenseitige Bewegung der Linienpare; der Massraum, welcher nach solchen Massverhältnissen gegliedert ist, möge polar genannt werden. Aus der gegenseitigen Bewegung von Linienparen (Ebenenp.) gehen die Curven und Flächen 2. O. hervor. Diese kennzeichnen den Polarmassraum.[1]) Da solche bereits in früheren Aufsätzen von mir besprochen sind, trete ich heute nicht näher darauf ein.

Die Massverhältnisse, welche die gegenseitige Bewegung dreier Linien (Ebenen) regeln, heissen trilinear; diejenigen, welche die Bewegung von vier Linien (Ebenen) beherrschen, mögen bipolar genannt werden, mit Rücksicht darauf, dass 4 Linien in 2 Linienpare zerlegt werden können, von denen jedes eine Curve 2. O., mithin ein Polarsystem sinnbildlich vertritt. Die Curven und Flächen des trilinearen und des bipolaren Massraumes sollen alsbald näher betrachtet werden. Nur ein

[1]) Derselbe kann auch in Polarsystemen mit imaginärer Fläche bestehen.

zusammenfassender Rückblick auf die vorstehende Darlegung unserer Anschauungsweise möge hier noch eine Stelle finden.

Wie die Blickbewegung den Linien des Gesichtsfeldes, so folgen die Strahlen der Büschel und Bündel den Grundlinien, welche ihre Drehung bestimmen nach Massverhältnissen, die wir als unveränderlich festhalten. Solange eine Linie oder Fläche als Ausdruck dieser unveränderlichen Massverhältnisse betrachtet wird, erscheint sie selbst fest und unwandelbar, sobald dieselbe dagegen als Erzeugniss einer Bewegung räumlicher Elemente aufgefasst wird, welche selbst ihre Anordnung verändern können, ist jede Curve oder Fläche wandelbar. Diese Bewegung ist eine unerlässliche Versinnlichung der Stetigkeit des Raumes: wir zerlegen denselben in seine Elemente und fassen diese durch geregelte Bewegungen wieder in bestimmter Ordnung zusammen. Die Massverhältnisse bestimmen diese Ordnung; diese sind Vorstellungsweisen, nach welchen wir die Blickbewegungen lenken, um einerseits in den Linien des Gesichtsfeldes uns zurechtzufinden, anderseits nach Bedürfniss neue Linien auf dem kürzesten Wege hervorzubringen. Der Wechselvorgang des Zurechtfindens und Hervorbringens wird am einfachsten beim Zeichnen geübt, indem die gegebenen Linien die Blickbewegung lenken und der Stift von dieser gelenkt wird. Soviel im Allgemeinen über die Bedeutung des Masszeichnens, das Genauere mögen die Zeichnungen dem Leser nahelegen, zu deren Betrachtung wir jetzt übergehen. Die Einheit derselben nicht zu stören, halten wir uns an die Curven, die durch Schnitte entstehen und überlassen einstweilen dem Leser deren Uebertragung nach dem Prinzip der Dualität.

I. *Trilinear-Curven.* Taf. 1. Msz. 1—4.

Msz. 1. Die Grundlinie $|a|$ und der Grundkreis $(\beta)^2$ werden durch dasselbe Strahlbüschel $.C.$ getheilt; die Theilung $|a|$ bestimmt das lineare Büschel $.D.$, die Theilung $(\beta)^2$ das Doppelbüschel $.B.$, dessen Mittelpunkt auf $(\beta)^2$ liege. Der Schnitt entsprechender Strahlen $|B\beta_1|\varepsilon_1$ $|D\alpha_1|\varepsilon_2|B\beta_2|$ ergibt auf $|D\alpha_1|$ 2 Punkte der Ortscurve, welche bei Drehung der Strahlen beider Büschel $.D, B.$ entsteht. Da $.B.$ auf $(\beta)^2$ liegt, so schneidet $|B\,D|$ die Curve 2. O. in 1 Punkte, so in $|B\,D|\,\beta_5\,(\beta)^2$, welcher durch $|C\beta_5|\alpha_3|a|$, den Zielpunkt der Tangente $|D\,\alpha_3|$ anzeigt. Auf jedem Strahle $|D\alpha_1|$ liegen mithin 3 Punkte der Curve. Ferner geht dieselbe durch $|a|A_1, A_2\,(\beta)^2|D_1, D_2|CD|$. Durch $|CA_0|\beta_t, \beta'_t\,(\beta)^2$ ist ein Tangentenpar $|B\,\beta_6,\ B\,\beta_7|$ angezeigt, mithin $.B.$ Doppelpunkt. Endlich ist $|CB|A_3|a|$ der Punkt der Curve, welcher $|CB|\beta_3\,(\beta)^2$ entspricht. Der Schnitt $|DA_3|$ mit der Tangente zu $.B.$ der Polarcurve $(\beta)^2$ ergibt $.\varepsilon_5.$ als 2 Schnittpunkt mit (ε). Es liegen somit auch auf den $|a, CD|$ sowie auf jedem Strahle des Doppelbüschels $:B:$ jedesmal 3 Punkte. Allgemein, geht durch einen beliebigen Punkt der Curve eine Sehne z. B. $|D_2\varepsilon_2|$, welche $|D_2\,\varepsilon_2|\alpha'_1|a|$ bezeichnet, so ergibt $|B\varepsilon_2|\beta'_2|\alpha'_1\,C|$ einen Punkt der Curve $(DA_1\,A_2\,B\beta'_2)^2$, welche, mit $|a|$ aus $.C.$ getheilt, durch die Büschel $D_2, B.$ dieselbe Curve (ε) bedingt. Da $|C\beta'_2|$ jene Hülfslinie jedenfalls schneidet, so ist auch auf $|D_2\,\varepsilon_2|$ stets ein dritter Schnittpunkt mit (ε) vorhanden. (ε) schneidet somit jede Grade ihrer Ebene im Allgemeinen in 3 Punkten, ist desshalb 3. Ordnung, eine Trilinearcurve.

Die Zeichnung deutet an, dass den Tangenten $|C\beta_4,$ $C\beta_5|$ zum Grundkreis wiederum Tangenten $|D\,\varepsilon_4,\ D\,\varepsilon_3|$ an $(\varepsilon)^3$ entsprechen.

Da $|BD|$ durch $.\beta_5.$ gezogen, so ist $|D a_3|$ zugleich Doppel- und Wendetangente.

Die Lage von $|BD|A_0|a|$ zwischen $.a_2, a_3.$ bedingt das reelle Vorhandensein des Doppelpunktes $:B:$.

Ein Parallelbüschel zu $.D.$ in $.B.$ erzeugt mit $.C.$ eine Hyperbel ($BCA_0 a_\infty |CD|_\infty$), welche durch ihre Schnitte mit dem Grundkreis die Richtungen der Asymptoten von $(\varepsilon)^3$ anzeigt. Da $.B.$ selbst ein Punkt des Grundkreises ist, so bleiben noch 1 oder 3 solcher Schnitte, mithin sind ebenso viele Asymptoten möglich. Das Masszeichen 1 zeigt ein Beispiel mit einer Asymptote und reellem Doppelpunkt, Nr. 2 dagegen ein solches mit 3 Asymptoten und imaginärem Doppelpunkt, an welchem man deutlich sieht, wie die 3 Aeste der Curve sich in die Asymptotenwinkel einfügen.

Durch $.B, C, a_\infty.$ sind von der Fluchthyperbel $(h)^2$, welche die Asymptotenrichtungen anzeigt, nur 3 Punkte gegeben; man kann desshalb noch einen Punkt und die demselben entsprechende Tangente beliebig annehmen. Wählen wir dieselben auf dem Grundkreise, so berührt $(h)^2$ denselben, wenn der Berührungspunkt $.h_t.$ auf dem kleineren Bogen $(\beta_4\, \beta_5)$ liegt, in diesem Falle gehören $.B, C.$ verschiedenen Aesten der Hyperbel an, da die Parallele $.CD.$ zur Asymptote zwischen beiden $.B, C.$ hindurch geht. In solchem Falle sind 2 Asymptoten von $(\varepsilon)^3$ vereinigt. Wählt man dagegen den Berührungspunkt $.h_t.$ ausserhalb des kl. Bogens $(\beta_4\, \beta_5)$, so fällt sowohl $|CD|$ als die Tangente $|h_c|$ zu $.C.$ ausser den Winkel $\beta_4 C \beta_5$; dann gehören $.BC.$ demselben Hyperbelaste an und, da $.C.$ ausser dem Grundkreis liegt, muss die Fluchthyperbel diesen in $.h_t.$ gleichzeitig berühren und schneiden. In diesem Falle vereinigen sich auf $|Bh_t|$

3 Asymptoten von $(\varepsilon)^3$; wir erhalten eine «kubische Parabel».

Die Bestimmungsweise von $|h_c, CD|$ ist in der Zeichnung angedeutet und erklärt sich aus bekannten Massverhältnissen des eingeschriebenen Vierseits.

Wenn auch $|CD$ oder $a|$ den Grundkreis nicht schneiden, so gehören doch $.D, A_3.$ stets der $(\varepsilon)^3$ an; $|CD, a|$ sind alsdann «punktirt imaginäre» Sekanten dieser Curve.

Folgt $.D.$ im Msz. 4 dem Strahle $|CD|$ und gelangt in den Schnitt $|BA_1|D_1^*|CD|D_2^*|BA_2|$, so liegen auf $|BA_1D_1^*, BA_2D_2^*|$ ausser dem Doppelpunkt $:B:$ je noch 2 Punkte der Curve $.A_1\,D_1^*, A_2\,D_2^*.$, daher bilden $|D_1^*\,A_1, D_2^*\,A_2|$ selbst einen Theil derselben, wie auch daraus zu erkennen ist, dass diese Geraden zugleich die Tangenten in $|D_1^*, D_2^*|$ sein müssten. Weil nun $.D_1^*, D_2^*.$ je ein einfacher Punkt von $(\varepsilon)^3$ ist, so können auf jedem Strahle des Erzeugungsbüschels nur noch 2 Punkte für den Rest von $(\varepsilon)^3$ gezählt werden, dieser wird also eine Polarcurve sein. In der That zeigt unser Masszeichen die beiden $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2$, welche $|BD_1^*, BD_2^*|$ je zu einer Trilinearcurve ergänzen und einem Büschel $(BA_3D_1D_2)^2$ angehören. Durchläuft $|CD|^\backprime$ das Büschel $.C.$, so bleiben die Tangenten in $:B:$ unverändert, mithin gehören $(\varepsilon_1)^2$ einem Büschel $(A_2\,A_3\,B^2)^2$ und $(\varepsilon_2)^2$ einem solchen $(A_1\,A_3B^2)^2$ an.

Gelangt $.D.$, auf $|CD|$ gleitend, nach $|CD|D_0|a|$, so enthält wiederum $|a|$ 4 Punkte von $(\varepsilon)^3$, bildet also einen Theil derselben; auf ihr liegen sämmtliche Schnitte der Strahlen der Büschel B^2, D. Da jedoch $.B, D_1, D_2.$ ausserhalb $|a|$ liegen, während sie $(\varepsilon)^3$ gehören, so muss der Rest von $(\varepsilon)^3$ aus dem Strahlenpar $|BD_1, BD_2|$ bestehen; was dadurch bestätigt wird, dass jede der letzteren ausser dem Doppelpunkt $:B:$ und $.D_1, D_2.$ noch einen 4. Punkt $|BD_1|a'_1|a|a'_2|BD_2|$ enthält. Die Trilinearcurve schwindet also unter diesen Umständen in 3 Grade zusammen und geht sogar endlich in eine Gerade $|a|$ und einen Doppelpunkt $:B:$ über, wenn $.D_1, D_2.$ imaginär werden. Dass $|a|$ dagegen auch dann reell vorhanden ist, wenn $.A_1, A_2.$ imaginär werden, ergibt sich aus ihrer Auffassung als Schnitt der Büschel $.D, B.$

Vertauscht man die Zuordnungen; lässt die Drehung des Büschels $.D.$ durch die Theilung des Grundkreises $(\beta)^2$ bestimmen, diejenige von $.B.$ durch die Theilung von $|a|$, so wird dadurch die Ordnung der $(\varepsilon)^3$ nicht verändert, indem bloss der Doppelpunkt nach $.D.$ verlegt wird, während $.B.$ einfacher Curvenpunkt ist, wie man der oben angedeuteten Tangentenbestimmung entnimmt. Ebensowenig ist das trilineare Massverhältniss gestört, wenn die Büschel $.B, C.$ ihre Rollen tauschen, $.B.$ zum Theilungsbüschel wird und $.C.$ mit $.D.$ die Curve erzeugt, wobei ebenfalls zweierlei Zuordnung der Theilungen und Büschel stattfinden kann. Liegt der Mittelpunkt des Theilungsbüschels $.C.$ auf dem Grundkreis, so erzeugen $.B, D.$ eine Polarcurve; ebenso wenn alle 3 Punkte $.CBD.$ der $(\beta)^2$ angehören. Wären statt $.D, C.$ zwei bebeliebige andere Punkte $.\varepsilon_i\, \varepsilon_j.$ von $(\varepsilon)^3$ gegeben, so entsprächen denselben auf dem Grundkreis $|B\varepsilon_i|\beta_i(\beta)^2\beta_j|B\varepsilon_j|$. Eine Punktreihe $|C|=|D_1D_2|$ bezeichnet alsdann durch die Büschel $.\beta_i, \beta_j.$ auf $|a|$ 2 projective Theilungen, nach welchen die Büschel $.\varepsilon_i, \varepsilon_j.$ eine Polarcurve entstehen lassen, deren Schnitte mit $|D_1\, D_2|$ $.D\varepsilon, D\eta.$ ergeben; jeder von ihnen bestimmt mit $.A_1\, A_2\, B\, D_1\, D_2\, \varepsilon_i\, \varepsilon_j.$ eine Trilinearcurve, wenn die $.D\varepsilon, D\eta.$ entsprechenden $.C\varepsilon, C\eta.$ zu Mittelpunkten der Theilungsbüschel für die Grundlinie $|A_1\, A_2|$ und die Polarcurve $(A_1 A_2 B D_1 D_2)^2$ gewählt werden.

II. *Bipolarcurven*. Taf. I. Msz. 5, 6.

Dieselbe Grundtheilung einer Geraden $|a|$ und eines Kreises $(\beta)^2$ durch ein Strahlbüschel $.C.$ führt auf eine Bipolarcurve, wenn $.B.$ nicht auf $(\beta)^2$ liegt. Das Masszeichen 5 im Vergleich zu Msz. 1 zeigt, dass in diesem Falle ausser $:B:$ auch $:A_3, D:$ Doppelpunkte werden: $:A_3:$ ergibt sich nämlich aus den $|BC|\beta_0, \beta'_0(\beta)^2$, welche die zusammen fallenden Strahlen $|B\beta_0, B\beta'_0|$ bestimmen. $:D:$ wird durch die beiden Tangenten $D|a_t, a'_t|$ als Doppelpunkt bezeichnet, indem nun $|BD|$ den Grundkreis $(\beta)^2$ in 2 Punkten schneidet, welche, mit $.C.$ verbunden, die $.a_t, a'_t.$ darf $|a|$ bestimmen. Die polare Lage von $:B:$ zu $(\beta)^2$ bedingt, dass jeder Strahl dieses Büschels $(\beta)^2$ in 2 Punkten $.\beta_1, \beta'_1.$ schneidet, welchen 2 Strahlen des Theilungsbüschels $.C.$, mithin $2.a_1, a'_1.$, folglich mittelst $|Da_1\, Da'_1|$ auf $|B\beta_1\, \beta'_1|$ 2 verschiedene Curvenpunkte $.\varepsilon_1, \varepsilon'_1.$ entsprechen. Daher sind $|BC, BD|$ die einzigen Strahlen des Büschels $:B:$, in welchen Doppelpunkte $v.(\varepsilon)$ vorkommen. $:A_3, D, B:$ werden imaginär, wenn $|BC, BD, CA|$ den Grundkreis nicht schneiden.

Jeder Theilstrahl $|c|$ bestimmt auf $(\beta)^2$ die Ziele 2 Schneidestrahlen $|B\beta_1, B\beta_2|$, welche durch ihren Schnitt mit $(\beta)^2$ noch $.\beta'_1, \beta'_2.$ bezeichnen. Während nun die $.\beta_1, \beta_2.$ entsprechenden $.\varepsilon_1, \varepsilon_2.$ durch denselben Strahl $|Da_1|$ angezeigt werden, erhält man die $.\beta'_1, \beta'_2.$ entsprechenden $.\varepsilon'_1, \varepsilon'_2.$ durch 2 gesonderte Strahlen $|Da'_1, Da'_2|$, indem $|C\beta'_1|a'_1|a|a'_2|C\beta'_2|$. Zieht man, etwa in Richtung des Pfeiles g, eine beliebige Gerade, so können Punkte der linearen Reihe $.|Da_i\|g|. = .d_i.$ nach vorstehenden beiden Bestimmungsarten in zweifacher Weise mit Punkten der bipolaren Reihe $.B\beta_{ij}\|g| = \|b_{ij}\|$ zusammentreffen und Schnittpunkte von (ε) mit $|g|$ werden. Es kann diess der Fall sein, wenn der Schnitt $|Da_1|d_1|g|b_{1,2}|B\beta_{1,2}|$ zusammenfällt; dasselbe kann geschehen, wenn $|Da'_2|d'_2|g|b_{1,2}|B\beta'_{1,2}|$ kreuzen. Wirklich kann man im Masszeichen 5 rechts von $|BC|$ die erste Weise des Zusammentreffens beobachten, links dagegen die andere. Im ersten Fall ordnen sich $.\beta_1, \beta_2.$ zu Seiten des Berührungspunktes $.\beta_t.$, welchem wie früher $.\varepsilon_t.$ entspricht und ähnlich die beiden Schnitte von $|g|$ mit (ε). Der Curvenlauf erhält dadurch elliptischen Typus. Im 2. Falle finden wir die Lage der Schnitte $|g|$ mit (ε) durch die Richtung von $|BD|$ angedeutet und der hyperbolische Typus herrscht vor. Jedenfalls schneidet $|g|$ die Curve in 4 Punkten, welche parweise oder sämmtlich imaginär werden können; diese ist desshalb von 4. Ordnung, eine Bipolarcurve.

Wie bei der Trilinearcurve werden die Asymptotenrichtungen mit Hülfe einer Fluchthyperbel erkannt, welche durch $.C\,B\,A_0\,a_\infty|\,C\,D|_\infty.$ bestimmt ist und aus den Büscheln $.C, B\|D.$ entsteht. Solche schneidet $(\beta)^2$, da weder $.C.$ noch $.B.$ auf derselben liegen, in 4 Punkten, die parweise oder sämmtlich imaginär werden können, und bestätigt, dass auch die unendlichferne Gerade $(\varepsilon)^4$ allgemein in 4 Punkten trifft. Die Gestaltungen von $(\varepsilon)^4$ ausführlich zu behandeln, welche durch die Zahl und Anordnung dieser Asymptoten bedingt sind, würde für gegenwärtigen Ueberblick zu umständlich sein.[1]) Hingegen soll der Zusammenhang mit der Trilinearcurve noch von

---

[1]) Es genüge zu bemerken, dass die Lage der Berührpunkte $.\varepsilon_t.$ und der Asymptoten zu den Tangenten der Doppelpunkte für die Gestalt massgebend sind.

anderer Seite beleuchtet und dadurch eine orientirende Gliederung der Bipolarcurven geboten werden.

Gleitet $.D.$ längs $|CD|$ bis $|BA_1|D_1^*|CD|D_2^*|BA_2|$, so befindet sich auf $|BA_1 D_1^*, BA_2 D_2^*|$ ausser den Doppelpunkten $:B, D_1^*; B, D_2^*$: je noch ein 5ter $.A_1, A_2.$, welcher ebenfalls auf $(\varepsilon)^4$ liegen muss. $|B A_1 D_1^*, B A_2 D_2^*|$ sind also Bestandtheile dieser Curve. Das Masszeichen 6 zeigt in beiden Fällen eine Trilinearcurve als übrigen Bestandtheil von $(E)^4$. Da nämlich $|B D| A_0 | a|$ mit $.A_1, A_2.$ zusammenfällt, bezeichnen $|BA_1, BA_2|$ je eine der Asymptotenrichtungen, und es bleiben zur Bezeichnung der Curvenäste nur noch 3 oder 1 Asymptote. Die Grenzcurven $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^3$ besitzen $.A_3.$ als gemeinsamen reellen Doppelpunkt, wenn $|CB|$ den Grundkreis schneidet. Ausserdem geht $(\varepsilon_1)^3$ durch $.D_1 D_2 A_2.$, $(\varepsilon_2)^3$ durch $.D_1 D_2 A_1.$ wie es im Masszeichen 4 bei den Curven $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2$ der Fall war.

Eine bmerkenswerthe Gestalt $v.(\varepsilon)^4$ ergibt $.D\infty.$ durch das Zerfallen der Fluchthyperbel (h^2) in ein Strahlenpar $|b| \parallel |CD|$, $|c| \parallel |a|$, von welchen in vorliegender Zeichnung nur $|b|$ eine reelle Doppelasymptote darstellt.

Der aufmerksame Leser hat wohl schon erkannt, dass die vorstehenden Massverhältnisse nicht an die Ordnung der Grundcurve gebunden sind. Wie man einerseits den Grundkreis durch eine 2te Grundlinie ersetzen kann, um eine Polarcurve zu erhalten, so ergeben sich unter Zugrundelegung von Trilinear- oder Bipolarcurven je nach der Wahl von $.B.$ Curven des pentalinearen, tripolaren, heptalinearen, tetrapolaren Massraumes u. s. w. Ist z. B. eine Trilinearcurve $(\varepsilon)^3$ zu Grunde gelegt, so bestimmt jeder Strahl des Theilungsbüschels $.C.$ 3 Strahlen des Büschels $.B.$, welche auf dem entsprechenden $|D|_\alpha$

anderer Seite beleuchtet und dadurch eine orientirende Gliederung der Bipolarcurven geboten werden.

Gleitet $.D.$ längs $|CD|$ bis $|BA_1|D_1^*|CD|D_2^*|BA_2|$, so befindet sich auf $|BA_1 D_1^*, BA_2 D_2^*|$ ausser den Doppelpunkten $:B, D_1^*; B, D_2^*:$ je noch ein 5ter $.A_1, A_2.$, welcher ebenfalls auf $(\varepsilon)^4$ liegen muss. $|B A_1 D_1^*, B A_2 D_2^*|$ sind also Bestandtheile dieser Curve. Das Masszeichen 6 zeigt in beiden Fällen eine Trilinearcurve als übrigen Bestandtheil von $(E)^4$. Da nämlich $|B D| A_0 | a|$ mit $.A_1, A_2.$ zusammenfällt, bezeichnen $|BA_1, BA_2|$ je eine der Asymptotenrichtungen, und es bleiben zur Bezeichnung der Curvenäste nur noch 3 oder 1 Asymptote. Die Grenzcurven $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^3$ besitzen $.A_3.$ als gemeinsamen reellen Doppelpunkt, wenn $|CB|$ den Grundkreis schneidet. Ausserdem geht $(\varepsilon_1)^3$ durch $.D_1 D_2 A_2.$, $(\varepsilon_2)^3$ durch $.D_1 D_2 A_1.$ wie es im Masszeichen 4 bei den Curven $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2$ der Fall war.

Eine bmerkenswerthe Gestalt $v.(\varepsilon)^4$ ergibt $.D\infty.$ durch das Zerfallen der Fluchthyperbel (h^2) in ein Strahlenpar $|b| \parallel |CD|$, $|c| \parallel |a|$, von welchen in vorliegender Zeichnung nur $|b|$ eine reelle Doppelasymptote darstellt.

Der aufmerksame Leser hat wohl schon erkannt, dass die vorstehenden Massverhältnisse nicht an die Ordnung der Grundcurve gebunden sind. Wie man einerseits den Grundkreis durch eine 2te Grundlinie ersetzen kann, um eine Polarcurve zu erhalten, so ergeben sich unter Zugrundelegung von Trilinear- oder Bipolarcurven je nach der Wahl von $.B.$ Curven des pentalinearen, tripolaren, heptalinearen, tetrapolaren Massraumes u. s. w. Ist z. B. eine Trilinearcurve $(\varepsilon)^3$ zu Grunde gelegt, so bestimmt jeder Strahl des Theilungsbüschels $.C.$ 3 Strahlen des Büschels $.B.$, welche auf dem entsprechenden $|D|_\alpha$

3 Punkte der neuen Curve bezeichnen. Bleibt $.B.$ im Doppelpunkt von $(\varepsilon)^3$, so schneidet $|BD|$ dieselbe in einem Punkt, welcher durch $|C|_\alpha$ den $.D.$ als einfachen Punkt der neuen Curve, diese selbst hiemit als bipolare kennzeichnet.

Verlegt man dagegen $.B.$ in einen einfachen Punkt von $(\varepsilon)^3$, so zeigen die 2 Schnitte $|BD|\varepsilon_1$, $\varepsilon_2\,(\varepsilon)^3$, dass $.D.$ Doppelpunkt, folglich $(e)^5$ pentalinear sei; u. s. f.

Wesentlicher als diese Erweiterungen, scheint mir aber, dass auf dem bezeichneten Wege die Gestalt und Anordnung der erzeugten Curven genau verfolgt und nach und nach so angeeignet werden, dass nur die unerlässliche Anzahl Punkte und einzelne Tangenten gegeben sein müssen, um mit Sicherheit die Wendungen der Curve nach dem Augenmasse zu erkennen und zu zeichnen. Denn dadurch werden dieselben sammt ihren Massverhältnissen Bestandtheile unserer Vorstellungsweise, Normen unserer Blickbewegung, die uns befähigt, das Räumliche in stets erweitertem Zusammenhang rasch zu erfassen und richtig zu gestalten.

Die Relief-Curven des trilinearen und des bipolaren Massraumes sind aus den Schnitten der Polarflächen so bekannt, dass hier nicht darauf eingetreten wird. Dagegen scheinen mir die Flächen jener beiden Massräume noch einiger Aufmerksamkeit werth zu sein.

III. *Trilinearflächen.* Taf. II. Msz. 7—9.

Werden eine Polarcurve $(c)^2$ und eine Reliefgerade $|g|$ durch ein Ebenenbüschel $|a|_\alpha$ getheilt, so bezeichnen die Theilpunkte jeder $[\alpha]$ ein Strahlenpar, das auch $|a|$ in 2 veränderlichen Punkten trifft. Desshalb gehört $|a|$ der Fläche an, welche durch die Bewegung des Strahlenpares erzeugt wird.

Eine beliebige weitere Reliefgerade $|n|$ bestimmt mit $|a, g|$ eine Strahlenfläche $\|a\,g\,n\|$, welche $[c^2]$ nach einer Polarcurve $(\nu)^2$ schneidet, $(c, \nu)^2$ haben 4 Punkte gemein, wenn $|g|\,G[c^2]$ neben $(c)^2$ liegt; dagegen 3 solcher Punkte, wenn $.G.$ auf $(c)^2$ sich befindet, Im ersten Falle ist die Strahlenfläche $\|a\,g\,c^2\|$ bipolar, indem sie von $|n|$ in 4 Punkten getroffen wird; im letzteren Falle ist $\|a\,g\,c^2\|$ trilinear, denn sie hat nur 3 Punkte mit $|n|$ gemein.

An die Stelle des veränderlichen Strahlenpares trete nun eine Polarcurve, deren Veränderungen wir im Anschluss an vorstehende Erzeugung der Trilinear- und Bipolarcurven zunächst durch Projection aus einem gegebenen Punkte bestimmen.

Nach Msz. 7 werden die Grundlinie $|a|$ und die Kugel $(B)^2$, welche durch ihren Grundkreis $(\beta)^2$ bezeichnet ist, durch das Ebenenbüschel $|c|_\gamma$ getheilt. Die Punktreihe $|a|$ bestimmt die Drehung des Ebenenbüschels $|d|_\delta$, während das Kreisbüschel $|c|_\gamma\,\beta_i^2\,(B)^2$ mit $.B.$ ein Kegelbüschel $\|B\beta_i^2\|$ ergibt. Die Kegelschnitte $\|B\beta_i^2\|\,\varepsilon^2\,[d a_i]$ erzeugen eine Trilinearfläche $(E)^3$, da $.B.$ auf $(B)^2$ liegt.

Denn jede Ebene des Bündels (B) hat mit $\|B\beta_i^2\|$ zwei Strahlen gemein, welche von $[d a_i]$ in 2 Punkten getroffen werden; zu diesen kommt als dritter der $.B.$. Ueberdiess treffen die Kegelschnitte des Büschels $|d|_\delta$ die Axe desselben in veränderlichen Punkteparen und bezeichnen diese damit als der Fläche zugehörig.

Jeder Strahl einer Büschelebene, welcher den Kegelschnitt trifft, zeigt in der Kreuzung der Axe einen dritten Schnittpunkt mit der $(E)^3$.

$|c|$ schneide $(B)^2$ in $.c_1, c_2.$, so werden diese allen Kreisen des Büschels $|c|\beta$ gemeinsam sein, desshalb auch $|Bc_1, Bc_2|$ auf allen Kegelflächen $\|B\beta_i^2\|$ liegen und daher von sämmtlichen Büschelebenen $[\delta]$ in Punkten von $(E)^3$ getroffen werden. Ist $.D_c.$ die Spur von $|d|$ in $[Bc]$, so bezeichnet der Spurstrahl jeder $[\delta]_i$ auf $|Bc_1, Bc_2|$ 2 Punkte der $(\varepsilon)_i^2$ in der betreffenden $[\delta]_i$, 2 weitere Punkte ergibt die $(\varepsilon)_z^3$ in der Zeichenebene auf bekannte Weise.

So wie $.A_1, A_2.$ dieser Grundrisscurve $(\varepsilon)_z^3$, gehört der Kreis $(\alpha)^2$ der $[a D_c]$ der Trilinearfläche $(E)^3$ an. Daher bezeichnet der Schnitt $[\delta]_i D_c a_i [D_c a]$ auf $(\alpha)^2$ ein drittes Punktepar von $(\varepsilon)_i^2$. Wohl hängt das Bestehen der Richtlinien $|Bc_1, Bc_2|$, $(\alpha)^2$ von der Lage der $|c|$ und der $[a D_c]$ zur Kugel ab; würden die einen oder die andere dieser Richtlinien oder alle verschwinden, so wäre man auf eines der üblichen Verfahren zur Ableitung der Kegelschnitte $(\delta_i)^2$ angewiesen, worauf wir uns hier nicht weiter einlassen.

Der $[Bc]$ entspricht $[d A_3]$, welche dieselbe nach $|A_3 D_c|$ schneidet; diese enthält die Projection des Kreises $(c_1 c_2 B)^2$ auf $[d A_3]$ und bildet daher mit $|Bc_1, Bc_2]$ das Dreiseit, das $[Bc]$ mit $(E)^3$ gemein hat.

$[Bd]$ trifft $|a|$ in $.A_0.$ und da jene Ebene durch die Spitze $.B.$ des Kegels $\|B, (\gamma)_0^2\|$ geht, welcher $[cA_0](\gamma_0)^2(B)^2$ zur Grundfläche hat, so schneidet sie denselben nach einem Strahlenpare. Der Schnitt $[dB] A_0 D_c [D_c a]$ bezeichnet auf $(\alpha)^2$ die beiden Ziele dieser Strahlen. Solche gehören der $(E)^3$ an und bilden mit $|d|$ das Dreiseit, das $[dB]$ mit dieser Fläche gemein hat.

Man weiss nun, dass die Fluchtspur einer Parallelebene zur schneidenden durch die Spitze $.B.$ auf der Grundspur des Kegels die Ziele der Asymptotenrichtungen anzeigt für den betreffenden Kegelschnitt. Im vorliegenden Falle bezeichnen die Spurstrahlen des Büschels $|c|_\gamma$ durch ihren Schnitt $.h_i.$ mit den Strahlen des Parallel-büschels $.B.$ zu $.D.$ in der Tafel die Spurpunkte jener Fluchtlinien. Wenn nun, wie im Masszeichen 7 angenommen, $.D_c.$ den Schnitt von $|c, d|$ anzeigt, so bedeuten die Strahlen des Büschels $.D_c a.$ die Schnitte der entsprechenden Ebenen $[c_\gamma, d_\delta]$. Mit diesen müssen auch die gesuchten Fluchtlinien parallel sein. Der Vergleich mit Masszeichen 1 zeigt, dass der Ort jener Spurpunkte $.h_i.$ die Fluchthyperbel $(h)^2$ ist. Da nun die Fluchtlinien selbst sowohl $|c|$ als $|b_a| \parallel |d|$ schneiden und mit den Strahlen der Ebene $[D_c a]$ parallel sind, so erzeugen dieselben ein hyperbolisches Paraboloid $(\mathrm{P})^2$, dessen Grundspur $(h)^2$ und dessen Richtebenen $[D_c a, cd]$ sind.

In jeder Ebene des Büschels $|c|_\gamma$ kommen nebst $.c_1, c_2.$ im Allgemeinen noch 2 Punkte vor, welche $(P)^2$ mit der Grundkugel $(B)^2$ gemein hat, nämlich die Schnitte der Fluchtlinie $|h_i|$ mit dem Kreise $(\beta)^2$. Die beiden Flächen schneiden sich somit nach einer Relief-Curve 4. Ordnung, welche mit $.B.$ den Asymptotenkegel der Trilinearfläche $(E)^3$ bezeichnet. Da $.B.$ auf dem Schnitte $(c)^4$ von $(B, P)^2$ liegt, wird diese Curve aus $.B.$ durch einen Trilinearkegel projicirt; derselbe stellt den Asymptotenkegel von $(E)^3$ dar.

Wird der Kreis $(\beta)^2_p$ von $|h|_p$ berührt, so fallen 2 Asymptoten zusammen und der Kegelschnitt der Ebene $[d a_p]$ wird zur Parabel. Da $|h_p|$ stets mit $|D_c a_i|$ parallel, so bezeichnen die Spuren der beiden Berührungsebenen an $(B)^2$, parallel zu $[D_c a]$, durch ihre Schnitte mit der Fluchthyperbel $(h)^2$ die Spurpunkte von $|h_{p1}, h_{p2}|$. Da die Spuren der Berührungsebenen mit der Asymptote der Spurhyperbel $(h)^2$ parellel gehen, so kann jede die Curve nur einmal treffen, desshalb kommen nur 2 Parabeln in dem Büschel $[d|a_i]$ vor.

Treffen sich $|c, d|$ nicht, so geht das Paraboloid in ein Hyperboloid über, dessen Strahlenschar $\|h\|$ mit der eines Hyperboloides $\|a\ c\ d\|$ parallel ist. Da letztere durch ein Ebenenbüschel $|a|$ bezeichnet ist, so findet man die Spuren der Berührungsstrahlen $|h_p|$ mittelst der Kreuzpunkte der beiden Theilungen von $|CB|$, welche einerseits durch die Spuren der zum Ebenenbüschel $|a|$ parallelen Berührungsebenen an $(B)^2$ bestimmt werden, anderseits durch ein Büschel $.A\infty.$, welches mit $.C.$ die Fluchthyperbel $(h)^2$ ergibt. Die erwähnten Kreuzpunkte erhält man durch Näherung schneller und nach einiger Uebung ebenso sicher als durch umständliche Hülfsverfahren.

Ausser bei den beiden Parabelstrahlen des Büschels $.C.$, welche den Ein- und Austritt der hyperbolischen Schnitte der Trilinearfläche anzeigen, findet auch beim Durchgang durch das Dreiseit der $[c\,B]$ Gestaltwechsel durch die Aenderung der Hyperbeläste statt. Um diesen zu erkennen, vergleiche man im Msz. 7 die Bewegung des Punktepares auf der Trilinearcurve $(\varepsilon_z)^3$ mit derjenigen des Pares auf der Polarcurve $(\alpha)^2$, wie sie durch die Strahlenbüschel $.D, D_c.$ angezeigt wird und berücksichtige nach Bedürfniss auch die Punktreihen auf $|Bc_1, Bc_2|$, wie sie auf $|BC|$ sich darstellt.

Bei Betrachtung des Masszeichens 7 von der rechten zur linken fortschreitend, entnehmen wir demselben folgendes über die Gestalt der Trilinearfläche $(E)^3$. Von dem Berührungspunkt ε_t aus dehnt sich diese als Gewölbekappe mehr und mehr nach oben, bis sie in den Parabelschnitt ausläuft, um in eine hyperbolische Doppelschale überzugehen. Die Fluchtstrahlen des Paraboloides $(P)^2$ dringen dabei von oben her nach und nach in die Grundkugel $(B)^2$ ein und wenn $[ca_i]$ in $[cB]$ übergeht, so ist

$.B.$ Spur der Fluchtlinie und zugleich der Asymptote, welche dann parallel $|D_c A_3|$ wird.

Nun bestimmt die Tangente zum Grundkreis in $.B.$, die $|D A_3|$ in $.\varepsilon_t^*.$ treffend, einen Punkt von $(\varepsilon)^3$. Wir sahen jedoch, dass alle Punkte des Kreises in $[cB]$ auf den Schnitt $|cB|D_c A_3 [d A_3]$ projicirt werden. Welche Bedeutung hat $.\varepsilon_t^*.$, der doch auch der Fläche $(\varepsilon)^3$ angehören soll? Dreht sich $[ca_i]$ ein wenig über $[c A_3]$ hinaus, so bezeichnet der Fluchtstrahl $|h_i|$ auf $(\beta_i)^2$ die Ziele zweier Asymptoten, von denen dem eine Fluchtstrahl durch $.B.$, die andere der Tangente $|B\varepsilon_t|$ benachbart ist. Der Hyperbelast, welcher dem $.\varepsilon_t^*.$ benachbarten Punkte $.\varepsilon_i$ entspringt, öffnet sich in dem anderen Winkelraume als diejenigen, welche der Lage $[d A_3]$ vorausgingen. Durch $.\varepsilon_t^*.$ geht also jedenfalls eine Tangente dieses Punktes an $(E)^3$ parallel dem Fluchtstrahl durch $.B.$ oder dem Schnitte $|D_c A_3|$ und eine weitere Tangente wird $|B\varepsilon_t|$ sein. In der Berührungsebene zu $(E)^3$, welche durch diese beiden Tangenten bestimmt ist, findet eine Drehung der Fläche statt. Der $.\varepsilon_t^*.|$ in der zu $|D_c A_3|$ parallelen Tangente ist als Doppelpunkt aufzufassen; überdiess schneidet jene Gerade noch $|d, D_c A_3|$, bezeichnet also mit diesen beiden das D r e i s e i t, w e l c h e s $[d A_3]$ m i t $(\varepsilon)^3$ gemeint hat.

Von nun an wenden sich die Hyperbeln des Ebenenbüschels $[d a_i]$ mehr und mehr der 2. Parabel zu, bei welcher die Fluchtstrahlen wieder aus der Grundkugel heraustreten. Diese 2. Parabel bildet den Uebergang in eine elliptische Schale, die von dem Kugelkreise der $[c d]$ an einen welligen Boden hat und mit der Berührungsebene zu $.D.$ abschliesst.

In $.B.$ treffen sich nebst den beiden Tangenten an die Grundspur $(\varepsilon)^3$, noch die Strahlenpare $|B c_1,\ B c_2;$

$B\alpha_1$, $B\alpha_2$|, desshalb ist $.B.$ ein dreifacher Punkt der $(\varepsilon)^3$. Er kann in Bezug auf jedes Strahlenpar oder auch mit allen zumal imaginär werden.

Die Gestaltveränderungen der Polarcurven in dem erzeugenden Ebenenbüschel lassen sich leichter verfolgen, wenn 5 Punkte jener Curven Gerade durchlaufen. Auf solche Annahmen stützen sich die Masszeichen 8 und 9.

Durch die Grundlinie |1| und die Spur .II. von |2| sei die Zeichenebene vertreten und .III, IV. auf |1| die Spuren von |3, 4|, welche |2| in $.\mathrm{III}_2, \mathrm{IV}_2.$ treffen, so, dass |1 2 3 4| ein windschiefes Vierseit bilden. Ist $|a|$ eine weitere Gerade, welche zunächst |2| in $.A_2.$ treffe, so bestimmt dieselbe mit |2, 3, 4| ein Hyperboloid $\|\mathrm{H}\|^2$, dessen Grundcurve der Kreis $(\mathrm{II\,III\,IV}\,A)^2$ sei. $.A_2.$ wird alsdann durch den Schnitt [24 A 3'] bezeichnet, wobei unter |3'| der Strahl zu verstehen ist, welcher mit |3| in derselben Lothebene liegt. Endlich sei |5| eine Gerade, die für den Anfang in der Zeichenebene liegen mag. Jede Ebene des Büschels $|a|_\alpha$ bezeichnet nun auf |1 2 3 4 5| 5 Punkte einer Polarcurve, welche auch die Axe des Büschels $|a|$ ausser in $.A_2.$ noch in einem veränderlichen Punkte schneiden werden. $|a|$ gehört daher der Fläche $(F)^3$ an, welche die Polarcurven $(\alpha)^2$ des Ebenenbüschels bilden; ebenso |1 2 3 4 5|.

Je vollkommner die Blickbewegung sich den Biegungen der Curven 2. Ordnung anzupassen vermag, um so genauer wird man aus der Anordnung der 5 Punkte unmittelbar den Curvenlauf erkennen.

Indessen weist die Zeichnung eine Reihe von Grenzlagen für die Büschelebenen auf, welche einen Gestaltwechsel der $(c)^2$ anzeigen. Liegen nämlich 3 von den 5 Schnittpunkten in einer Geraden, so zerfällt $(c)^2$ in ein

Strahlenpar, das mit |5| ein $(F)^3$ zugehöriges Dreiseit bildet. Zugleich zeigt jeder dieser Fälle den Durchgang eines Punktes durch die Verbindungsgeraden von 2, anderen der 5 besprochenen Punkte an, womit jedesmal ein Gestaltwechsel verbunden ist. Denn bekanntlich unterscheidet sich die Ellipse von der Hyperbel dadurch, dass bei der ersteren jeder der 5 Punkte ausser dem Viereck der übrigen liegt, bei der letzteren dagegen einer derselben im Inneren eines solchen Vierecks sich befindet und hiebei zugleich die Scheitelwinkel andeutet, in welche die Biegungen der Hyperbel fallen.

Die Spur $|A\,\mathrm{II}|$ enthält in ihren Schnitten mit |1, 5| 2 und die derselben entsprechende Gerade |2| in $.A_2\mathrm{III}_1\mathrm{IV}_1.$ 3 weitere Punkte der in $[a\,\mathrm{II}]$ fallenden $(\alpha)^2$; dass $|A_2\mathrm{II}, A\,\mathrm{II}|$ der $(F)^3$ angehören, ersieht man übrigens auch daraus, dass dieselben jeweilen .II. als 4. Punkt mit dieser Fläche gemein haben. Als 3 Gerade des Dreiseits ist in $[a\,\mathrm{II}]$ und in allen Ebenen des Büschels $|a|_5$ selbst zu betrachten. Trifft $|5|3'[23]$, so liegen auf $|A_2 3'|$ die 2 Punkte $.A_2, 3'.$ und der Schnitt $|3|3''|A\,3'$ als 3. Punkt von $(c)^2_3$, daher zerfällt dieselbe und der andere Parstrahl geht durch $|1|13[a\,3']43|4|$; ein analoges Strahlenpar zeigt $[a\,4']$, wo $|5|4'[24]$. .43. kann auch durch den Strahl der $\|34\,a\|^2$, welcher in $[a\,3']$ liegt, bezeichnet werden.

Sind $.5', 5''.$ die Schnitte von |5| mit der Grundspur $(\mathrm{II\,III\,IV}.A)^2$, so treffen die entsprechenden Strahlen von $\|2\,3\,4\,a\|$ die |3, 4|, enthalten somit 3 Punkte der $(c)^2$ in $[a5_1, a2_2]$. Da |2| diese Ebenen in $.A_2.$ trifft, so bilden beiderseits $|A'_2 1_5, A1''_5|$ die zweiten Parstrahlen derselben.

Von den Combinationen aus 5 Elementen zur 3. Classe ergeben nach dem Masszeichen 8 folgende Gerade je 3 Punkte derselben Richtung in einer Ebene des Büschels $|a|_\alpha$:

|2 3 5, 2 4 5, 3 4 5| bedeuten je ein Strahlenpar: 6 Gerade
|a, 1, 2, 3, 4, 5, 1 2 5| „ einfache Strahlen: 7 „

$(F)^3$ enthält also: 13 Gerade

Lässt man die Beschränkungen fallen, dass |2, a| sich treffen sollen und dass |5| in der Zeichenebene liege, so zählt man nach dem Masszeichen 9 folgende Parstrahlen auf $(F)^3$:

1. Lineare: Verbindung von Spuren der |5, a| in [13, 14] : |135, 145|: 2 Parstrahlen.

2. Polare: Schnitte von Grundstrahlen mit Hyperboloiden: |1|125||a25||; |5|345||a34|| je 2: 4 Parstrahlen.

3. Bipolare: Angezeigt durch Schnitte der polaren Grundspuren der Hyperboloide: ||a3,5||235||$a_2$35||245||a45|| je 2: 4 Parstrahlen.

Hiezu kommt noch |6| als zweite Transversale nebst |1| durch |3, 4| und das Strahlenpar $|125|_2$.

$(F)^3$ enthält somit 10 Strahlenpare und 5 einfache Gerade: |a, 2, 3, 4, 6|, zusammen 27 Gerade.

Das Masszeichen 9 deutet an, wie die Strahlen dieser Gruppen zu erkennen sind, wenn |1, 2, a, 5, 6| und der Grundkreis des Hyperboloides ||a 2 5|| vorgeschrieben werden. Dasselbe zeigt, dass die Spur von |1 4 5| in der Grundcurve des Hyperboloides ||a 54|| liegt.

IV. *Bipolare Flächen.* Taf. 2. Msz. 10, 11.

Die Grundtheilung einer Ebene und einer Polarfläche (Kugel) durch ein Ebenenbüschel, bedingt durch 2 Ebenenbüschel, von denen das eine den Theilcurven der Polarfläche, das andere den Theilstrahlen der Ebene zugeordnet ist, eine Bipolarfläche, da jedes Ebenenbüschel eine solche im Allgemeinen nach Bipolarcurven schneidet. Diese gehen in eine Trilinearcurve über, wenn eine der

3 Axen des Theilungs-, Polar- oder Linearbüschels $|c, b, d|$ mit der schneidenden Ebene des Büschels $|e|$ an einem Punkte der Polarfläche zusammentrifft. Befinden sich 2 oder 3 Schnitte dieser Axen auf der Polarcurve, welche eine Ebene $[\varepsilon]$ des Büschels $|e|$ mit der Polarfläche bestimmt, so ergibt sich aus den Büscheln $.B, D.$ eine neue Polarcurve, als Schnitt von $[\varepsilon]$ mit der Bipolarfläche. Die Polarcurve kann in ein Strahlenpar zerfallen und in jedem dieser Spezialfälle bleiben noch 1 oder 2 Gerade als Ergänzung der Bipolarcurve übrig.

Die Masszeichen 10 und 11 zeigen diese Uebergänge und die Gestaltwechsel der Bipolarcurven, welche dieselben begleiten. Als Ebenenbüschel $|e_\varepsilon|$ ist die Folge aufsteigender Parallelebenen zur Zeichenfläche gewählt und die Axen der Theilungs- und Erzeugungsbüschel senkrecht zu derselben angenommen, des leichteren Verständnisses der Zeichnung wegen.

In dem Masszeichen 10 besteht überdiess das Theilungsbüschel aus Parallelebenen und ist die $|d|$ durch den Mittelpunkt der Kugel gezogen, welche mit $[\alpha]$ die Grundtheilung enthält. Der Parallelkreis, auf welchem $.B.$, der Schnitt $|b|$, $(B)^2$, liegt, ergibt, an Stelle der Bipolarcurve die $|DA_1|$ und die $(\varepsilon)^3$.

In dem Masszeichen 11 stehen $|c, b|$ gleich weit vom senkrechten Durchmesser der Grundkugel ab, schneiden desshalb diese auf demselben Parallelkreis. Liegt $|b|$ in der Lothebene durch $|b, c|$ an diesen Parallelkreis, so vertreten die 4 Geraden $|CB, DM, DB, CD'|$ die Bipolarcurve in dessen Ebene. Innerhalb dieses Vierseites fallen die höher liegenden Bipolarcurven, ausser demselben die tieferen. Die Doppelseitigkeit der erzeugenden Strahlbüschel gibt sich dabei an den Hohlräumen der Curve zu erkennen, wie sie durch Schraffen angedeutet sind.[1]) Da die Erzeugung jeder dieser Bipolarcurven ausschliesslich in der Ebene des betreffenden Parallelkreises stattfindet, so sind wir von der Gestalt der Meridiane unabhängig. Die Parallelkreise können daher bis in's Unendliche zunehmen. Der unendlich fernen Geraden, als Kreis aufgefasst, entspricht eine Hyperbel $(h^*)^2$, durch $.B.$ mit denselben Asymptoten wie die früher erwähnte Fluchthyperbel $(h)^2$. Indem der Ast $(BAD)^2$ die Hohlräume durchzieht, deutet er die Grenze an, der sich die Fläche ohne Ende nähert, gleich dem Horizont in der Perspective.

Bei planarer wie bei Relief-Betrachtung vergegenwärtigen Curvenbüschel die Stufenfolge der Massräume. Die Stetigkeit der Blickbewegung, die der einzelnen Curve folgt, erweitert sich zum logischen Zusammenhang der Massverhältnisse, welcher den ganzen Raum beherrscht.

Vorstehende Betrachtung der Flächen hat uns gelehrt, aus gegebenen Punktgruppen und Liniengebilden Curven zu erkennen und deren Gestaltwechsel zu verfolgen, ohne dass dieselben gezeichnet vorliegen. Wenn im Eingange die Bedeutung des Zeichens für die Raumerkenntniss hervorgehoben, geschah diess also keineswegs in der Meinung, dass Alles gezeichnet sein müsse, was man sich vorstellt.

Doch als Grundlage der Verständigung, gleich Baurissen, Karten, Formeln, sollten auch Masszeichen dienen können. Diess ist möglich, wenn dieselben methodisch angelegt, ausgeführt, geordnet und erklärt werden. Je weiter die Vorstellungen tragen, die sich an die Wahrnehmung einer Linie knüpfen, um so höher steigt die

[1]) Die Curven d. Msz. 11 erwähnt Cardinal i. Journal f. Math. Bd. 102 p. 167.

Bedeutung der letztern als Zeichen. Auch Spezialfälle stellen deshalb allgemeine Massverhältnisse dar, wenn dieselben nicht zufällig aufgegriffen, sondern mit Ueberblick über die verschiedenen möglichen Anordnungen gewählt sind. So deutet die symmetrische Anlage unserer Masszeichen die sämmtlichen Strahlenpare $|CB|$ an, die zu Seiten des Lothes zu $|a|$ möglich sind; ebenso der Durchmesser sämmtliche Secanten zum Kreise $(\beta)^2$. Die wirklichen Schnittpunkte der Polarcurven weisen auf die imaginären hin, sich treffende Gerade auf die windschiefen, die sichtbaren Punkte und Linien im Rahmen der Zeichenfläche auf die gedachten ausserhalb desselben, wenn der Beschauer weiss, welche Veränderungen solche Annahmen in dem Masszeichen herbeiführen. Wie die Schriftzeichen entlasten die Masszeichen theilweise das Gedächtniss und halten dadurch die Vorstellungskraft für weitere Gedankenverbindungen verfügbar.

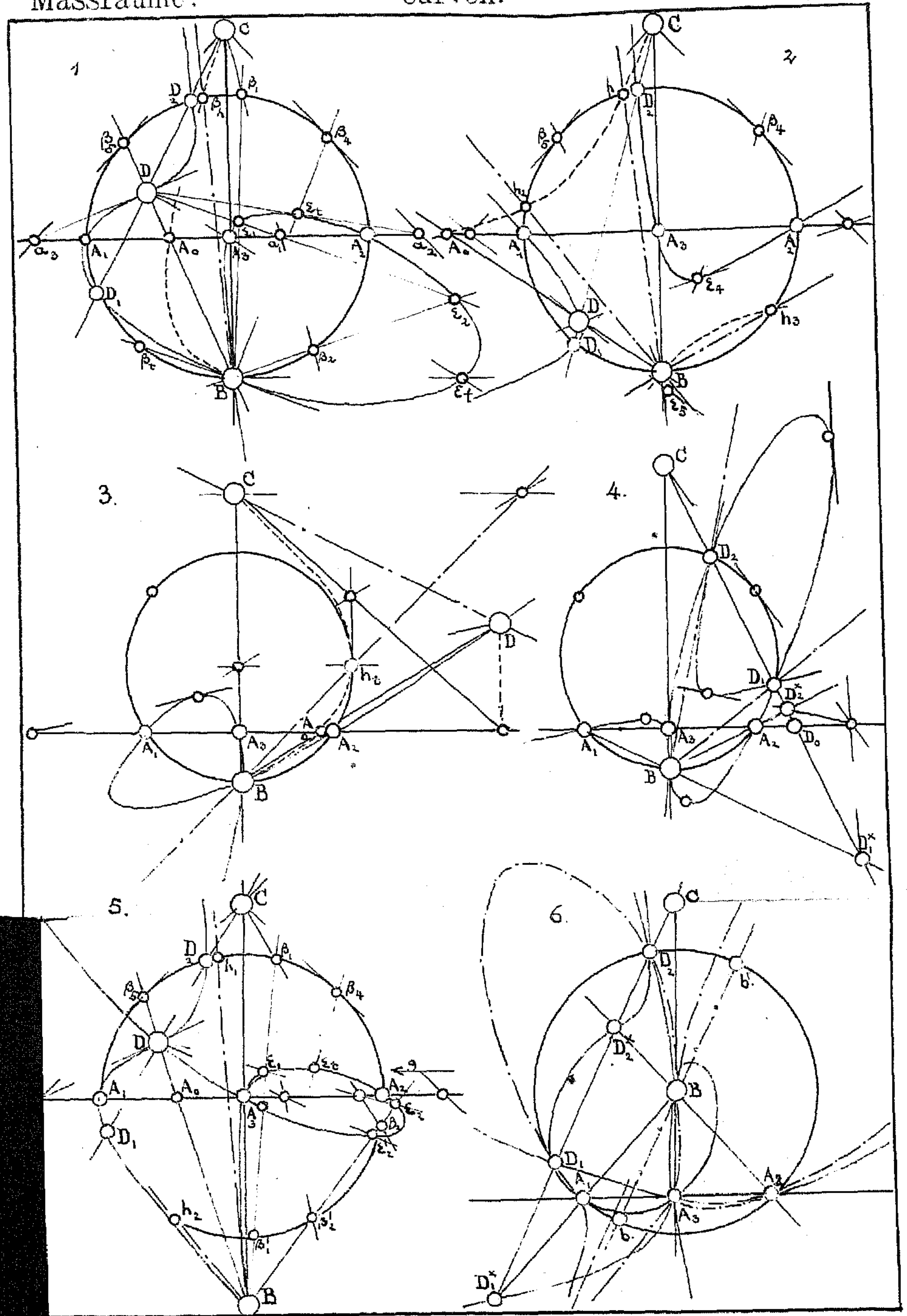
In diesem Sinne zeigen unsere beiden Tafeln die Erzeugung der Curven durch Schnitte von Strahlbüscheln auf Grund von Geraden und Curven, welche durch dasselbe Strahlbüschel getheilt werden, anderseits die Erzeugung von Flächen durch Schnitte von Ebenenbüscheln auf Grund von Leitstrahlen oder von Flächenparen, die durch dasselbe Ebenenbüschel getheilt werden. Bedenkt man nun, dass jede Curve aus einer Schar dieselbe einhüllender Strahlen besteht, so erkennt man darin nicht blos eine allgemeine Anweisung zur Ableitung der Tangenten zur Schnittcurve aus denen der Grundcurve, sondern nimmt zugleich wahr, wie Curvenzüge höherer Ordnung mit denen der niedern zusammenhängen, aus welchen jene abgeleitet werden können. Wenn alsdann jeder Punkt der Zeichenebene als Symbol für die Normale zu dieser aufgefasst wird, erweitert sich die Flächenanschauung zur Vorstellung einer Reliefgestalt: über der Geraden erhebt sich die Ebene, über dem Kreise die Kugel, u. s. f.

So erhalten wir ein Liniengewebe mit Reliefbedeutung, dessen stetiger Zusammenhang uns gegenwärtig bleibt, weil die Blickbewegung an jeder Stelle das Sichtbare mit der Vorstellung verbindet, jeder Gedanke in einem entsprechenden Zuge seinen directen Ausdruck findet und weil die Gestalten durch stetige Bewegung ihrer Elemente aus einander hervorgehen.

Indem man auf Grund gegebener Theilungen der Zeichenebene Curven messend bestimmt und zeichnet, wird die Blickbewegung geregelt. Mit dieser verbindet sich die Vorstellung der Relief-Gestalt von Linien und Flächen, sowie die Vorstellung der stetigen Bewegung derselben nach gegebenen Massverhältnissen zur Anschauung des gegliederten Massraumes. Da nun die räumliche Vorstellung selbst auf der Blickbewegung beruht, so schliesst sich dieselbe unmittelbar an gezeichnete Linien an, in Folge dessen gelten die Masszeichen durch ihren Bau und ihre Anordnung als Merkmale des Gedankenverlaufes und dienen so der Ordnung desselben. Je vielseitiger die Massverhältnisse, je vollkommner die Zeichenfertigkeit und das Verständniss der Zeichnung sich diesen anpassen, um so bedeutungsvoller wird der einzelne Linienzug für die Gedankenvermittlung, um so sicherer und schneller **regeln Masszeichen die Gedankenreihen.**

Hottingen-Zürich, 4. December 1887.

Massräume: Curven. *Taf. I.*



Flächen. *Taf. II.*