Der Massraum, eine Erweiterung des Masstabes

von

F. Graberg.

Eine geometrische Figur, welche durch vielfache Anwendung ohne weitere Erklärung verständlich wird, kann als Masszeichen zur Auffassung und Herstellung zusammengesetzter Gebilde dienen, wie die Theilstriche des Masstabes zur Ermittlung der Längen eines Planes. Zwei Höhen eines Dreieckes z. B. zeigen den Höhenpunkt desselben an; da die 3. Höhe durch denselben gehen muss, so kann diese gezeichnet werden, wenn auch die 3. Ecke des Dreieckes ausserhalb des Zeichenblattes liegt. Der Höhenpunkt hat in diesem Falle als Masszeichen gedient... Durch die Theilstriche wird der Massstab in Abschnitte zerlegt, die Masszeichen gliedern zunächst die Zeichenfläche, in weiterem Sinne den Raum. Mit diesem gegliederten vergleichen, messen wir die Gestalten im freien Raume. Ich habe daher den gegliederten Raum, wie er durch die Masszeichen sinnbildlich dargestellt wird, den Massraum genannt. Der Massraum ist eine Erweiterung des Masstabes, nicht nur insofern, als an die Stelle einer einfachen Ausdehnung eine dreifache tritt, sondern auch im Sinn einer umfangreicheren Bedeutung der Punkte und Linien, sowie einer vollkommneren Berücksichtigung aller Raumelemente. Diese beiden Richtungen in der Ausgestaltung des Massraumes sollen hier an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden.

1. Die Massformen: Kreisfläche und Kugel, Cylinder und Kegel sind von so einfacher Gestalt, dass wir nur deren Grösse durch die Masse bestimmter gerader Linien bezeichnen: Durchmesser bei Kreisfläche und Kugel, Durchmesser und Höhe bei Cylinder und Kegel. Für die Bezeichnung derselben reicht also der Masstab aus, welcher das Verhältniss der gezeichneten Linien zu den entsprechenden Längen des Körpers darstellt.

2. Ort. Wenn ein Punkt seine Lage gegen einen festen Punkt verändert, z. B. in einer bestimmten Richtung, so fasst man die ganze Folge von Stellungen in eine Linie zusammen und nennt dieselbe den Ort des Punktes. Räumlich aufgefasst ist also der Ort eine stetige Folge von Stellungen des Punktes und die raum-zeitliche Vorstellung einer Bewegung nur ein Hülfsmittel der Versinnlichung. Man erklärt daher die Kreislinie: als Ort aller Punkte, oder als Ort aller Geraden

einer Ebene, welche von einem festen Punkte
gleich weit entfernt sind;

als Ort aller Punkte der Ebene, von welchen aus eine gegebene Strecke unter gleichem Winkel gesehen wird u. s. w.

3. Ort als Masszeichen. Wenn zu einem Dreieck die Grundlinie vorgezeichnet, der dieser gegenüberliegende Winkel und die Höhe der Grösse nach gegeben sind, so findet man die Spitzen zweier solchen Dreiecke in den Schnittpunkten eines durch die Endpunkte der Grundlinie gelegten Kreises und einer mit ihrer Richtung parallelen Geraden. Der Kreisort fasst alle Winkel von gegebener Grösse über der vorgezeichneten Strecke zusammen, die Parallele dagegen die senkrechten Abstände von derselben mit der gegebenen Grösse.

4. Kegelschnitte. Alle Punkte der Ebene, deren Abstandssumme oder — Differenz von 2 festen Punkten dieselbe ist, erfüllen eine Ellipse oder Hyperbel. Wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels in einem Punkte festgehalten ist, während der Scheitel sich auf einem Kreise bewegt, so umhüllt der andere Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Leitkreises sich befindet.

Diese 4 Sätze und eine Reihe von Ableitungen aus denselben fasst die Fig. 1 in ein Masszeichen zusammen, welches dem Kundigen auf den ersten Blick die Kegelschnitte vergegenwärtigt, welche demselben Kreis und verschiedenen Punktepaaren auf einem seiner Durchmesser oder demselben Punktepaar und den concentrischen Kreisen um seinen Mittelpunkt entsprechen. Alle diese Kegelschnitte werden daher durch das Masszeichen eines Punktepaares und eines Kreises um seinen Mittelpunkt sinnbildlich zusammengefasst.

5. Kegelfläche als Masszeichen. Eine Kegelfläche mit kreisförmiger Leitlinie wird durch eine Ebene nach einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel geschnitten, je nachdem der Parallelstrahl zu der Ebene durch die Spitze des Kegels ausserhalb, innerhalb oder auf der Mantelfläche desselben liegt.

Denkt man sich auf jeder Berührungsebene des Kegels in gleichen Abständen zu beiden Seiten der Mantellinie Parallele mit dieser gezogen, so umhüllen dieselben eine Rotationsfläche, deren Umriss in der Meridianebene eine Hyperbel ist; indem die Mantellinien des Kegels in dieser Meridianebene Asymptoten der Hyperbel darstellen und die Zeichnung die harmonische Lage der Schnittpunkte (t) der Tangentenpaare in der Ebene des Kehlkreises, der entsprechenden Berührungssehnen $|s|$ und der beiden senkrechten Scheiteltangenten $|a_1\ a_2|$ erkennen lässt. Die Fig. 2 fasst alle diese Gestalten in einem Masszeichen zusammen, dessen Kern der Kegel ist.

6. Elementargestalten als Masszeichen. Das Strahlbüschel fasst die stetige Folge der Richtungen zusammen, die in einer Ebene durch denselben Punkt gehen. Zwei sich schneidende Gerade fassen, als Punktreihen betrachtet, die sämmtlichen Geraden einer Ebene zusammen.

Wird von 2 Geraden, welche sich nicht treffen, die eine als Schnitt, die andere als Punktreihe betrachtet, so fassen dieselben in dem Ebenenbüschel die stetige Folge von Ebenen zusammen, welche die Schnittgerade gemeinsam haben.

In dem Strahlen- oder Ebenenbündel endlich werden die sämmtlichen Strahlen oder Ebenen zusammengefasst, welche durch denselben Punkt gehen.

7. Doppelverhältniss. Ist von den 3 Eckpunkten eines Dreieckes, ABC, welche stets eine Ebene bestimmen, (A) der Schnitt zweier Strahlen $|b, c|$, während (B, C) die Richtung von $|a|$ bezeichnen, und schneidet ein weiterer Strahl $|d|$ des Büschels (A) die Grundlinie $|a|$ in (D), so ist das Verhältniss der Abschnitte $BD : CD$ dem Verhältniss der senkrechten Abstände $Bd : Cd$ gleich.

Ebenso besteht für einen 4. Strahl $|e|$ des Büschels (A) die Gleichheit: $BE : CE = Be : Ce$; daraus folgt die der Doppelverhältnisse:

$$\frac{BD}{BE} : \frac{CD}{CE} = \frac{Bd}{Be} : \frac{Cd}{Ce}$$

Wird rechts Zähler und Nenner mit $|BA, CA|$ gemessen, so ergibt sich, dass dem Doppelverhältniss der

Abschnitte auf $|a|$ ein gleiches Doppelverhältniss der Sinuszahlen gegenüberliegender Winkel im Strahlbüschel (A) entspricht. Auf Grund der Gleichheit dieser Doppelverhältnisse werden die Punktepaare der Reihe $|a|$ auf die Strahlenpaare des Büschels (A) bezogen und umgekehrt; ebenso die Punktepaare zweier Punktreihen, anderseits die Strahlenpaare zweier Büschel zu einander in Beziehung gebracht. Diese Beziehung ist durch 3 entsprechende Elemente (Punkte, Strahlen) der beiden einander zugeordneten Masszeichen (Punktreihe, Strahlbüschel) gegeben, auch dann, wenn z. B. die Punkte nicht auf den ihnen entsprechenden Strahlen liegen, die beiden einander zugeordneten Masszeichen sich also in schiefer Lage befinden.

8. Schnittlage. Liegen drei Schnitte entsprechender Strahlen zweier einander zugeordneter Büschel auf einer Geraden, so treffen auch alle übrigen Paare entsprechender Strahlen auf derselben zusammen, denn eine solche Gerade kann als Schnitt der Ebenen betrachtet werden, welche die zugeordneten Strahlbüschel erfüllen; dann bezeichnen ihre Mittelpunkte die Axe eines Ebenenbüschels und die 3 Paare entsprechender Strahlen 3 Ebenen desselben; alle weitern entsprechenden Strahlenpaare der beiden Büschel müssen dann auch je in einer Ebene des Ebenenbüschels liegen, dessen Doppelverhältniss durch jene drei Ebenen gegeben ist.

Wenn 3 Verbindungsstrahlen entsprechender Paare zweier Punktreihen durch denselben Punkt gehen, so liegen dieselben in einer Ebene. Jeder weitere Strahl dieses Büschels theilt die beiden Punktreihen nach demselben Doppelverhältniss, welches durch die 3 ersten Strahlen bestimmt ist und es fallen in dem Schnitt der beiden

Punktreihen zwei entsprechende Punkte zusammen; dieser ist also das Masszeichen, dafür, dass die Punktreihen sich in Schnittlage befinden. Analog findet im Falle der beiden Strahlbüschel Schnittlage statt, wenn die Lotebene durch die Axe des Ebenenbüschels entsprechende Strahlen der beiden Büschel enthält, da wir alle Risse am einfachsten durch Senkrechte zur Zeichenebene hervorgebracht denken.

9. Schieflage. Wenn die 3 entsprechenden Strahlenpaare zweier Strahlbüschel sich in 3 Punkten treffen, welche nicht auf derselben Geraden liegen, so können diese nur dann wirkliche Schnittpunkte sein, wenn die beiden Strahlbüschel selbst in einer Ebene liegen; auch alle übrigen Strahlenpaare ergeben nur unter dieser Bedingung wirkliche Schnittpunkte, im Allgemeinen aber werden die Kreuzungen nur Deckpunkte darstellen. Die Strahlbüschel befinden sich daher in solchem Falle nicht mehr in Schnittlage sondern in Schieflage. Ebenso haben zwei Punktreihen im Allgemeinen keinen Punkt gemein, wenn die 3 Verbindungsstrahlen entsprechender Punktepaare nicht durch denselben Punkt gehen.

Für die Bestimmung der übrigen entsprechenden Elementenpaare ist die Annahme, dass die auf einander bezogenen Masszeichen in derselben Ebene liegen die einfachste.

10. Curven 2. Ordnung. Bekanntlich ist der Ort der Schnitte entsprechender Strahlenpaare zweier schiefliegender projectivischer Strahlbüschel, sowie der Hüllort der Verbindungsstrahlen entsprechender Punktepaare zweier schiefliegender Punktreihen eine Curve 2. Ordnung.

11. Dreieck als Masszeichen für Kegelschnitte. Wenn von den 3 Schnittpunkten entsprechender Strahlen-

paare je einer mit einem der beiden Mittelpunkte der Büschel zusammenfällt, so entsprechen dem Verbindungsstrahl der Mittelpunkte beiderseits die Tangenten an diese letzteren. Diese Anlage ist in Fig. 3 gewählt, da sie die allgemeinere mit 5 gegebenen Punkten für unseren Zweck genügend vertritt. Der Punkt (B) bestimmt mit (A_1, A_2) die Zeichenebene und wird zum Mittelpunkt eines Büschels gewählt, auf dessen Strahlen sich die Schnitte der Tangenten (T) verschieben. Jedes Büschel (T) bezieht $|A_1 B, A_2 B|$ und mittelst dieser Reihen die Büschel (A_1, A_2) aufeinander und ergibt einen Kegelschnitt. Jede Verbindung $|B B'|$ theilt als Diagonale eines Vierseits $|A_1 A_2|$ in (y') harmonisch zu $(A_1 A_2 x')$; auch die Tangente $|By|$, welche dem Strahle $|TB|$ entspricht, theilt $|A_1 A_2|$ harmonisch zu (x). Ist also (x) äusserer Theilpunkt der Strecke $|A_1 A_2|$, so wird (y) innerer Theilpunkt derselben und in solchem Falle sind die durch $(A_1 A_2 B)$ gehenden Kegelschnitte stets Hyperbeln. Befindet sich dagegen $|B T|$ in dem Winkelraum $[A_1 B A_2]$, so zeigt uns $|T_p B = Bx|$ die Stelle von (T) für welche der harmonisch zugeordnete (B^*) zu $|T x B|$ im Unendlichen liegt. Der Kegelschnitt ist also eine Parabel. (T_p, x) theilen $|B T|$ in 3 Abschnitte, die im Unendlichen zusammenhängen. Befindet sich (T) im Abschnitte $|T_p x|$, so liegt er auch zwischen (B und B^*) und der Kegelschnitt ist eine Hyperbel; fällt dagegen (T) in den anderen Abschnitt: $|T_p \infty x|$ so sind die entsprechenden Kegelschnitte stets Ellipsen. Die Figur 8 ist also das Masszeichen für eine 2fach unendliche Manigfaltigkeit von Kegelschnitten.

Durchläuft (B) die Punktreihe des Lothes zur Zeichenebene $|\mathrm{b}|$, so erhält man die Kegelschnitte in den Ebenen des Büschels $|A_1 \; A_2|$; die Kegelschnitte der Zeichenebene sind die Grundrisse jener sämmtlichen Kegelschnitte des Massraumes, den die Fig. 3 vertritt.

Analoge Betrachtungen weckt das Masszeichen für die projektivische Beziehung zweier schiefliegender Punktreihen.

12. Gerade und Punkt als Masszeichen für Regelflächen 2. O. Zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich nicht treffen, erzeugen, durch dieselbe Punktreihe aufeinander bezogen, eine Regelschaar. Da nämlich die Punktreihe keine der Axen schneidet, bestimmt jeder Punkt dieser Reihe mit den beiden Axen ein Paar entsprechender Ebenen.

Liegt eine der Axen $|a_1|$ in der Zeichenebene, so befindet sich auch eine Gerade der Regelschaar in derselben und geht durch die Spur (A_2) der anderen Axe wie Fig. 4 zeigt. Ausser dieser können noch 2 andere Strahlen der Regelschaar $|b_1, b_2|$, als Schnitte entsprechender Ebenenpaare beliebig angenommen werden. Die Geraden $|a_1, a_2, b_1, b_2|$ bilden ein windschiefes Vierseit, indem jede von ihnen nur 2 der übrigen trifft. Man findet nun die übrigen Geraden der Schar $\|b\|$, wenn man bedenkt, dass die entsprechenden Ebenenpaare der Büschel $|a_1, a_2|$ auf ihren Axen gegenseitig projectivische Punktreihen bestimmen, welche sich in schiefer Lage befinden und dass $|b_1, b_2, b_3|$ 3 entsprechende Punktepaare dieser Reihen bezeichnen. Von massgebender Bedeutung sind jedoch besonders die Parallelstrahlen.

13. Da nämlich die Strahlen der Schar $\|b\|$ ausser $|a_1, a_2|$ auch die Punktreihe $|a_3|$ schneiden, welche die Beziehung der Büschel $|a_1, a_2|$ vermittelt, so bestimmen auch $|a_1, a_2, a_3|$ auf $|b_1, b_2|$ zwei projectivische Punkt-

reihen, deren Verbindungsstrahlen eine Regelschar $\|a\|$ bilden. Nun fordert die Stetigkeit des räumlichen Denkens, dass Parallele als Strahlen eines Bündels aufgefasst werden, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt. Diess zugegeben, schneiden die Parallelen zur Schaar $\|a\|$ sämmtliche Strahlen derselben, gehören somit zur Schaar $\|b\|$ und umgekehrt. Die beiden Regelschaaren $\|a, b\|$ bilden bekanntlich eine Fläche 2. Ordnung, das Hyperboloid, welche die sämmtlichen Strahlen des Raumes zusammenfasst, die 3 einander nicht treffende Geraden schneiden. Zwei Ebenen der Parallelen $|a_2\, a_2'', b_2\, b_2''|$ schneiden sich nun nach der Diagonale des Parallelogrammes, welche durch die Schnittpunkte (B_2', B_2''') der Strahlenpaare $|a_2\, b_2, a_2''\, b_2''|$ bestimmt ist; und da jedes weitere Parallelogramm $|a_2\, b_i, a_2''\, b_i''|$ zwischen denselben Parallelen $|a_2, a_2''|$ liegt, können auch die Schnittdiagonalen $|b_i\, b_i''|$ die erste nur in ihrem Mittelpunkte (M) schneiden. Die Ebenen $[a_i\, a_i'', b_i\, b_i'']$ gehen somit alle durch (M), ihre Spuren theilen $|a_1, b_3|$ projectivisch, diese Ebenen umhüllen daher einen Kegel 2. Ordnung, welcher die Richtungen sämmtlicher Strahlen des Hyperboloides in seiner Spitze zusammenfasst.

14. Der Mittelpunkt (M), wird durch den Schnitt des Strahlenpaares $|B_1'\, B_1''', B_2'\, B_2'''|$ bezeichnet. Wenn $|b_3|$ das Büschel (A_2) durchläuft, so fasst die Ebene $[a_1\, a_2'']$ die Stellungen von $|a_2''|$ zusammen, die Ebenen $[B_1\, b_2'']$ $\|\, |b_1, b_2|\, \|$ $[B_2\, b_1'']$ die entsprechenden Stellungen von $|b_2'', b_1''|$, die Schnitte $|b_2''|B_2''|a_2''|B_1''|b_1''|$ durchlaufen daher Grade $|b_1''', b_2'''|$, welche mit $[b_1\, b_2'']\, c$ $[a_2\, a_1'']$, folglich auch unter sich parallel sind. Der Ort von (M) ist desshalb $|m|$, welche als Schnitt der Ebenen $[B_1'\, b_1''', B_2'\, b_2''']$ mit $|b_1''', b_2'''|$, mithin auch zu $|c|$ parallel sein muss.

(M) erreicht den unendlich fernen Punkt von $|m|$, wenn $|b_3| \parallel |B_1\ B_2''|$. Dann geht der Richtkegel in ein Ebenenpaar über, welchem die beiden Regelschaaren eines hyperbolischen Paraboloides parallel sind.

15. $|m|$ ist die Gerade durch die Diagonalenmitten des Vierseits $|a_1\ a_2\ b_1\ b_2|$, wie man leicht erkennt, wenn $|b_3|$ in $|A_2\ B_1, A_2\ B_2|$ fällt. Durchläuft $|b_2|$ das Büschel $[B_2\ a_2]$, so beschreibt daher $|m|$ um die Mitte von $|B_2\ B_1'|$ ein Strahlbüschel in der Mittelebene des Vierflaches $[B_1'\ A_2\ B_1\ B_2]$, welche $|a_1, a_2|$ parallel ist, und wird zur Mittellinie, wenn $|b_2|$ mit $|B_2\ A_2|$ zusammenfällt.

16. Hält man $|a_1|$ und (A_2) als Bestimmungselemente der Zeichenebene fest und vorerst auch die Richtung von $|a_2|$, so bezeichnen $|b_1, b_2|$ zwei Ebenenpaare, welche Büschel um $|a_1, a_2|$ beschreiben können und daher eine 4fach unendliche Manigfaltigkeit von Anlagen vertreten. Nimmt man noch die 3 Büschel hinzu, welche $|a_2$ u. $b_3|$ um (A) beschreiben, so erkennt man, dass Fig. 4 als Masszeichen für eine 6fach unendliche Manigfaltigkeit von Regelflächen 2. Ordnung gelten kann. [1])

17. Involutorische Lage. Die beiden projectivischen Strahlbüschel (A_1, A_2) der Fig. 3 theilen jede Gerade ihrer Ebene in zwei projectivische Punktreihen; in den Geraden $|Ty, Tx|$ liegen die entsprechenden Punktepaare beider Reihen verkehrt aufeinander, so dass dasselbe Paar je zwei Punkte des Kegelschnittes bestimmt. Diese involutorische Lage der Punktreihen rührt bei $|Ty, Tx|$ davon her, dass (y, x) beiderseits der Schnitt (T) der Tangenten entspricht, so dass die Strahl-

---

[1]) Dabei bleibt die Erhebung der Geraden über die Zeichenebene unberücksichtigt, weil sie auf die planare Anlage keinen Einfluss hat.

büschel (A_1, A_2) in Bezug auf $|Ty, Tx|$ sich zugleich in Schnittlage befinden, indem die gleichen Strecken $|Ty = yT|$ verkehrt aufeinanderliegen. Da nun das Doppelverhältniss: $|Tyyvz| = |yTzv|$, so fällt auch jedes weitere Paar gleicher Strecken $|vz = zv|$ verkehrt aufeinander. Wie Fig. 3 erkennen lässt sind die Punktreihen auf $|Ty|$ gleichlaufend und kreuzen sich desshalb nicht; die Punktreihen auf $|Tx|$ dagegen begegnen sich in 2 Punkten, den Schnitten (B, B') dieser Geraden mit dem Kegelschnitte.

18. Polarsystem als Masszeichen. Zwei involutorische Punktreihen bilden ein Punktsystem, welches elliptisch oder hyperbolisch genannt wird, je nachdem die beiden das System bestimmenden Punktepaare sich trennen oder nicht, im letzteren Falle gibt es 2 Doppelpunkte, im ersteren dagegen nicht. Dieselben Ordnungen lassen sich, wie man weiss, auch auf ein Paar concentrischer Strahlbüschel übertragen, welche alsdann ein hyperbolisches oder elliptisches Strahlsystem bilden, von denen das erstere ein Paar Doppelstrahlen besitzt. Befinden sich Strahlsystem und Punktsystem in Schnittlage zu einander, indem die Strahlen des ersteren durch die entsprechenden zu den Punkten des letzteren gehen, so nennt man die Punkte Pole, die denselben involutorisch gegenüberliegenden Strahlen: Polaren. Zwei Punktsysteme bestimmen ein ebenes Polarsystem, wenn sie sich schneiden, und die dem Schnitt beiderseits entsprechenden Punkte zugleich die gegenseitigen Pole sind.

Ein ebenes Polarsystem und der Pol seiner Ebene bestimmen ein Polarbündel.

Ein Polarbündel bestimmt mit einer Ebene und deren Pol ein räumliches Polarsystem.

Durch das Polarsystem werden dort die Punkte und Geraden der Ebene, hier die Punkte und Ebenen des Raumes zusammengefasst.

19. Kegelschnitt als Masszeichen des Polarsystems. Da in den Doppelpunkten, sowie in den Doppelstrahlen je zwei entsprechende Elemente vereinigt sind, so muss bei Schnittlage des Punkt- und Strahlsystemes der Doppelpunkt auf dem entsprechenden Doppelstrahle liegen und umgekehrt.

Der Kegelschnitt ist nun der Ort eines ebenen Polarsystems, in welchem alle Punkte auf ihren entsprechenden Polaren liegen.

Analog ist die Fläche 2. Ordnung im räumlichen Polarsystem der Ort aller Punkte, welche in ihren Polarebenen liegen.

Jede Linie oder Fläche 2. Ordnung bezeichnet daher ein ebenes oder räumliches Polarsystem als dessen Kern.

20. Mittelpunkt. In jedem Punktsystem entspricht dem unendlich fernen ein bestimmter Mittelpunkt, in dem zugehörigen Strahlsystem entspricht alsdann dem Mittelstrahle der Parallelstrahl zu der Geraden, welche Träger des Punktsystemes ist. Wie das Punktsystem durch ein Punktepaar und seinen Mittelpunkt, so ist das zugehörige Strahlsystem durch das entsprechende Strahlenpaar und den Mittelstrahl bezeichnet.

Ein Punktepaar und das zugehörige Strahlenpaar bilden ein Dreieck, in welchem jede Ecke der Pol ihrer Gegenseite ist. Legt man durch zwei solcher Ecken die Mittelstrahlen, welche den unendlich fernen Punkten der Gegenseiten entsprechen sollen, so bezeichnet der Schnitt solcher 2 Strahlen den Pol der unendlich fernen Geraden der Ebene, welche durch das Dreieck bestimmt wird, den Mittelpunkt des Polarsystemes.

Theilt der Mittelpunkt das Punktepaar, welches die Richtung des Trägers bezeichnet, innerlich, so trennen sich die Punktepaare, das Punktsystem ist daher elliptisch; fällt dagegen der Mittelpunkt ausserhalb der durch das Punktepaar begrenzten Strecke, so umschliessen die Paare des Systemes zwei Doppelpunkte, dasselbe ist desshalb hyperbolisch. Endlich heisst das Punktsystem parabolisch, wenn jene beiden Doppelpunkte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen.

Da die polar zugeordneten Strahlsysteme den Punktsystemen gleichartige Strahlenfolgen besitzen, so bezeichnen 2 elliptische Punktsysteme stets ein elliptisches Polarsystem, dessen Mittelpunkt innerhalb des Poldreieckes liegt und welches keine Doppelpunkte, daher auch keinen Kernkegelschnitt enthält. Ist dagegen eines der Punktsysteme hyperbolisch, so fällt der Mittelpunkt des Systemes in einen der 6 Aussenräume, in welche die 3 Polaren die Ebene ihres Dreieckes gliedern.

Die Strahlen eines Systems im Mittelpunkte heissen Durchmesser.

Alle diese Betrachtungen lassen sich auf das Vierflach ausdehnen, welches durch 4 Pole mit deren zugeordneten Polarebenen bestimmt ist, worauf jetzt nicht weiter eingetreten werden soll.

21. Gerade und Punkt als Masszeichen für Kegelschnittbüschel. Zwei Punktsysteme einer Ebene, welche einander im Allgemeinen nicht polar zugeordnet sind, bestimmen ein Kegelschnittbüschel mit 4 Mittelpunkten, wenn beide Systeme hyperbolisch; mit 2 Mittelpunkten, wenn eines von ihnen elliptisch,

ohne reelle Mittelpunkte, wenn beide Punktsysteme elliptisch sind.

Die Fig. 5 stellt den 2. dieser 3 Fälle dar, welcher die beiden anderen sinnbildlich vertritt.

Dem Schnitt (A) entsprechen (A_1, A_2) in dem einen und anderen der beiden Punktsysteme, so ist $|A_1\ A_2|$ die Polare von (A), durch welche die beiden Systeme aufeinander bezogen werden. Auf der Polaren $|A_1 A_2 = a|$ bezeichnen je zwei Pole (B_1', B_2') zu $|AA_1 = a_1, AA_2 = a_2|$ mit (A_1, A_2) ein Punktsystem. Die Verbindungslinien $|B_1' m_1,\ B_2' m_2|$ mit den Mittelpunkten von $||a_1, a_2||$ ergeben den Mittelpunkt (M_i) des entsprechenden Polarsystemes, durch welchen auch der Mittelstrahl des Polarbüschels $((A))$ gehen muss.

22. Zur weiteren Vermittelung der polaren Beziehungen wird durch (A) ein Kreis [o] gelegt, welcher $|a_1, a_2|$ in (α_1, α_2) und den Parallelstrahl zu $|a|$ in (α) schneide. Die Strahlen $|AB_1', AB_2'|$ treffen den Kreis [o] in (β_1, β_2); dann sind $|\alpha_1\ \beta_1,\ \alpha_2\ \beta_2|$ zugeordnete Strahlenpaare eines Polarbüschels $((\pi_i))$ in Bezug auf [o]. Dem Strahlsystem $A\ ||a_1\ B_1,\ a_2\ B_2||$ gehört auch der Parallelstrahl zu $|a|$ und der demselben zugeordnete Mittelstrahl $|m_\alpha|$ an. Fällt nun (B_1') nach (A_2), so wird die Sehne $|\alpha_1 \beta_1|$ zu $|\alpha_1 \alpha_2|$; und ist $(\mu\alpha)$ die Marke des entsprechenden Mittelstrahles $|m_\alpha|$ auf [o], so ergibt sich $|\alpha_1 \alpha_2|\ \pi\ |\alpha\, \mu\alpha|$ als Pol zu [o] für das Strahlsystem $((A))$. Befindet sich (π) ausserhalb [o], so zeigen die Tangenten aus diesem Punkt auf dem Kreis [o] mit den Berührungspunkten zugleich die Doppelstrahlen des Systemes $((A))$, welche den Kegelschnitt berühren, der durch das Polarsystem $[[AA_1 m_1, AA_2 m_2]]$ bezeichnet ist.

Sollen sich (B_1', B_2') auf $|A_1 A_2|$ so verschieben, dass sie stets mit diesen festen Punkten ein bestimmtes Punktsystem bilden, so müssen sie projectivische Punktreihen durchlaufen, folglich die Büschel A (β_1, β_2), somit auch $(\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2)$ projectivisch sein und, weil in $|\alpha_1 \alpha_2|$ entsprechende Strahlen zusammenfallen, sich in Schnittlage befinden; der Ort von (π) daher eine Gerade sein, welche durch den Schnitt (Π) der Tangenten zu (α_1, α_2) geht, da diese dem Fall entsprechen, wo (B_1') mit (A_1) und (B_2') mit (A_2) zusammenfällt.

Auch die Strahlbüschel $(m_1 B'_1, m_2 B_2')$, sowie die zu diesen Parallelen A (μ_1, μ_2) sind projectivisch, mithin auch $(\alpha_1 \mu_1, \alpha_2 \mu_2)$. Den Strahlen $|m_1 B_1', m_2 B_2'|$ sind in jedem Strahlsystem des Mittelpunktes (M) Parallelstrahlen zu $|a_1, a_2|$ zugeordnet; wird also $|m_1 B_1'| \parallel |a_2|$, so muss der conjugirte Durchmesser im Strahlsystem $((M)) \parallel |a_1|$ durch (m_2) gehen.

In diesem Falle gelangt daher (μ_1) nach (α_2) und gleichzeitig (μ_2) nach (α_1), woraus erhellt, dass sich auch die Büschel $(\alpha_1 \mu_1, \alpha_2 \mu_2)$ in Schnittlage befinden. Das Strahlsystem, welches der Schnitt $|\alpha_1 \mu_1|$ $\mathfrak{m}$ $|\alpha_2 \mu_2|$ in Bezug auf [o] bestimmt, ist nun dem Strahlsystem projectivisch, welches dem entsprechenden Mittelpunkt im Polarsystem des Kegelschnittes zugehört.

(Π) entspricht auch für die Büschel $(\alpha_1 \mu_1, \alpha_2 \mu_2)$ den Strahlen $|m_1 A_1, m_2 A_2|$, daher befinden sich $|\pi, \mathfrak{m}|$ in Schnittlage; aus früherem erhellt, dass (α) der Mittelpunkt des projicirenden Büschels sei.

$|\mathfrak{m}|$ zeigt die Gliederung des Kegelschnittbüschels an: den Schnitten $|\mathfrak{m}|$ $\mathfrak{m}p$ [o] entsprechen die beiden Parabeln desselben, $(\mathfrak{m}_\infty)$ die gleichseitige Hyberbel; $(\mathfrak{m}_i)$ die Ellipse, welche dem Kreis am nächten steht oder deren Axen die Winkel der beiden Parabelaxen hälften.

Es gibt immer zwei Punktreihen $|m_1, m_2|$ auf $|a_1, a_2|$, welche so liegen, dass die Büschel $(A_1\, m_2,\, A_2\, m_1)$ einen gegebenen Strahl $|A\, \mu|$ zum Schnitte haben; der Ort der entsprechenden $(\mathfrak{m})$ ist in solchem Falle $|\alpha\, \mu\, \pi|$; folglich ist die Lage von $|\Pi \mathfrak{m}|$ nicht weiter von der Lage der $|\Pi \pi|$ abhängig.

Fasst man die Büschel der Strahlen $|\Pi \pi, \Pi \mathfrak{m}|$ als zweifache Mannigfaltigkeit auf, so sind nach dem Vorigen die Reihen $|m_1, m_2|$ inbegriffen und bleiben noch die Büschel der Strahlenpaare $|a_1, a_2|$ zu zählen.

Die Fig. 5 zeigt also, (A) und $|a|$ als Bestimmungselemente der Ebene aufgefasst, eine 4fache Mannigfaltigkeit von Kegelschnittbüscheln, von denen jeder zugleich eine Reihe Polarsysteme vertritt.

Auch Fig. 5 kann, wie Fig. 3, als Projection eines Ebenenbüschels $|A_1\, A_2|$ aufgefasst werden.

Ein analoges Masszeichen lässt sich für Kegelschnittschaaren gewinnen.

23. K e g e l s c h n i t t a l s M a s s z e i c h e n f ü r B ü s c h e l v o n F l ä c h e n 2. O r d n u n g. Ein Paar Flächen 2. Ordnung hat im Allgemeinen ein Curve 4. Ordnung gemein. Diese kann in ein Ebenenpaar zerfallen.

Weitläufigkeit zu vermeiden legen wir diesen einfacheren Fall zu Grunde. Der Kreis $|\alpha|$ sei die gemeinsame Leitlinie zweier Kegelflächen; (A) sei die Spur der Verbindungsgeraden $|A_1\, A_2|$ ihrer Spitzen in der Ebene des Kreises $[\alpha]$, welche zugleich die Zeichenebene ist. Die Fig. 6 zeigt in $[B_1\, b_1]$ einen Zweig der Hyperbel, nach welcher die Kegelflächen $||A_1, A_2||$ sich schneiden und deren Ebene in (B) von $|a|$ getroffen wird, d. h. in dem harmonisch zugeordneten Punkte zu (A) in Bezug auf die Schnitte (A_1, A_2) der Gegenseiten $|A_1 a_1, A_1 a_2; A_2 a_1, A_2 a_2|$ eines Vierseites.

Eine F. $(^2)$, welche die Kegelschnitte $[\alpha, \beta]$ mit dem Kegelpaare gemein hat, geht auch durch die Ecken $(a_1, a_2; b_1, b_2)$ jenes Vierseits. Das Kegelschnittbüschel dieser 4 Mittelpunkte zeigt daher die Flächen 2. Ordnung an, welche mit dem Kegelschnitt $[\alpha]$ und dem Knotenpaare (A_1, A_2) gegeben sind.

Die Tangentenpaare eines solchen Kegelsbhnittbüschels schneiden sich auf $|A_1 A_2|$, bestimmen auf derselben ein Punktsystem mit den Doppelpunkten (A_1, A_2) und sind zugleich die Pole der Ebenen $[a, b]$, indem das Punktsystem $((A_1 A_2))$ für alle Ebenen des Büschels $|A_1 A_2|$ dasselbe bleibt. Diese Axe enthält somit auch die Pole sämmtlicher Ebenen des Büschels $|m B_1|$, sowie umgekehrt diese Gerade die Pole des Büschels $|A_1 A_2|$; $|A_1 A_2, m B_1|$ sind folglich zugeordnete Gerade aller Polarsysteme der Flächen 2. Ordnung, welche durch $[\alpha, \beta]$ gehen.

Die Lothebene durch $|A_1 A_2|$ geht durch den Mittelpunkt des Systemes $\|m B_1\|$, ist daher eine Mittelebene und enthält die Mittelpunkte sämmtlicher Flächen des Büschels $[\alpha, \beta]$. Der Ort jener Mittelpunkte ist ein Kegelschnitt, $[\mu]$, bestimmt durch die Mittelpunkte (M_a, M_b) der Kegelschnitte $[\alpha, \beta]$ und das Punktsystem $((A_1, A_2))$.

Das Punktsystem auf einem Strahle $|M_\alpha x|$ des Büschels (M_α) in der Mittelebene $[m A_1 A_2]$ ist elliptisch und besitzt keine Doppelpunkte, wenn der Schnitt $|M_\alpha x|$ $\mathfrak{m}[\mu]$ zwischen (M) und $|A_1 A_2|$ liegt. Dann geht kein Zweig des Kegelschnittes in $[m A_1 A_2]$ von (a_3) nach (a_4), dieser ist desshalb eine Hyperbel. Ist dagegen das Punktsystem auf $|M_\alpha x|$ hyperbolisch, so wird der Kegelschnitt über $|a_3 a_4|$ Hyperbel, wenn die Doppelpunkte von $\|M_\alpha x, \mathfrak{m}\|$

auf derselben Seite von $|a_3 a_4|$ liegen, im andern Falle dagegen wäre der fragliche Kegelschnitt eine Ellipse.

Die Kegelschnitte $[\alpha, m A_1 A_2]$ bezeichnen die Gestalt der Fläche 2. Ordnung. In vorliegendem Falle z. B. enthält das Büschel $[\alpha, \beta]$ nur ein- und 2mäntelige Hyperboloide, was im Allgemeinen schon dadurch angezeigt wird, dass $[\alpha]$ Ellipse, $[\beta]$ Hyperbel ist, wodurch das Ellipsoid und hyp. Paraboloid ausgeschlossen sind, da jenes keine hyperbolischen, dieses keine elliptischen Schnitte enthält. Das elliptische Paraboloid aber ist im vorliegenden Falle desshalb unmöglich, weil der Mittelpunktskegelschnitt $[\mu]$ keinen Punkt im Unendlichen hat.

Da $(A_1 A_2)$ die Gerade $|AB|$ harmonisch theilen, so entsprechen jedem (B) zwei Reihen harmonischer Punkte und der Punktreihe $|AB|$ daher eine doppelte Mannigfaltigkeit von Punktepaaren (A_1, A_2). Das Strahlenbündel (A) enthält eine doppelte Mannigfaltigkeit von Punktreihen. $|AB|$; das Strahlbüschel der Durchmesser endlich eine zweifache Mannigfaltigkeit von Punktreihen $|A\ M_\alpha|$.

Folglich stellt Fig. 6 den Kegelschnitt als Masszeichen für eine 8fache Mannigfaltigkeit von Flächen 2 Ordnung dar.

24. Ueberblick. Unsere Tafel zeigt den Massraum in 3facher Weise gegliedert:

I. Durch Linien und Flächen:

Fig. 1. Ein Punktepaar und eine Kreis um dessen Mittelpunkt als Masszeichen für die Kegelschnitte, welche die Punkte zu Brennpunkten und den Durchmesser zur Axe haben.

Fig. 2. Ein Rotationskegel als Masszeichen für seine ebenen Schnitte und die Rotationshyperboloide, welche seinen Erzeugungslinien parallel sind.

II. Durch Büschel von Linien und Flächen.

Fig. 3. Ein Dreieck als Masszeichen einer zweifachen Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten, welche durch seine Ecken gehen.

Fig. 4. Eine Gerade und ein Punkt als Masszeichen einer 6fachen Mannigfaltigkeit von Regelflächen 2. Ordnung, welche jene Elemente enthalten.

III. Durch Gruppen von Polarsystemen.

Fig. 5. Eine Gerade und einen Punkt als Masszeichen für eine 4fache Mannigfaltigkeit von Kegelschnittbüscheln, von denen jedes eine Reihe ebener Polarsysteme vertritt.

Fig. 6. Ein Kegelschnitt als Masszeichen für eine 8fache Mannigfaltigkeit von Flächen 2. Ordnung, von denen jede ein räumliches Polarsystem vertritt.

So stellt jede Stufenfolge geometrischer Figuren, diese letzteren als Masszeichen aufgefasst, eine Gliederung des Massraumes dar. Wie der Massstab die Grössenverhältnisse der Gegenstände in Längeneinheiten zusammenfasst, so fasst der Massraum die Weisen gegenseitiger Abhängigkeit von Lagen- und Grössenverhältnissen in Masszeichen zusammen. Darum ist der Massraum eine Erweiterung des Massstabes.

Hottingen-Zürich, 1. Jan. 1887.

Der Maſsraum.

Fig. 1.

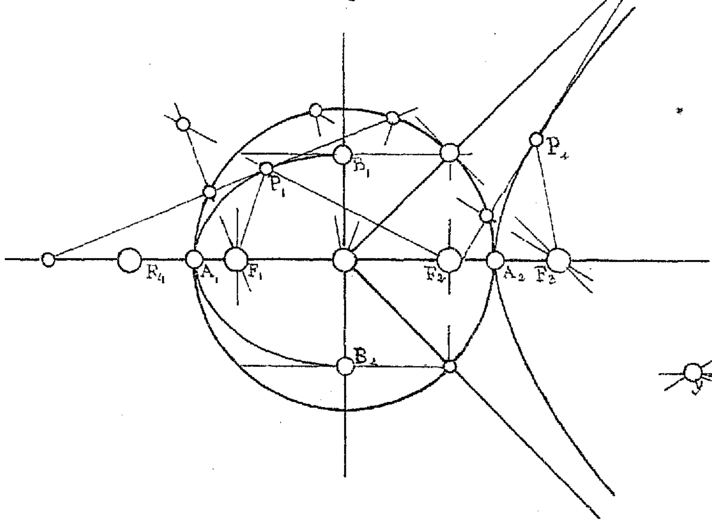


Fig. 3.

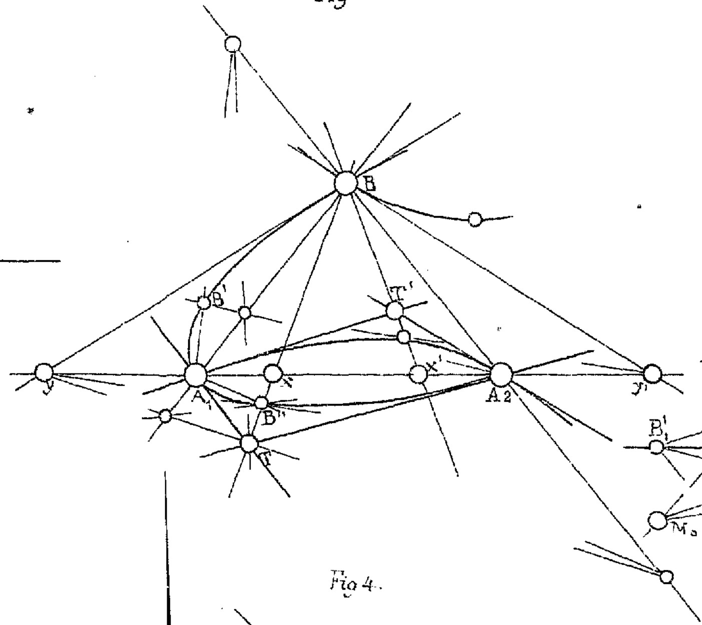


Fig. 5.

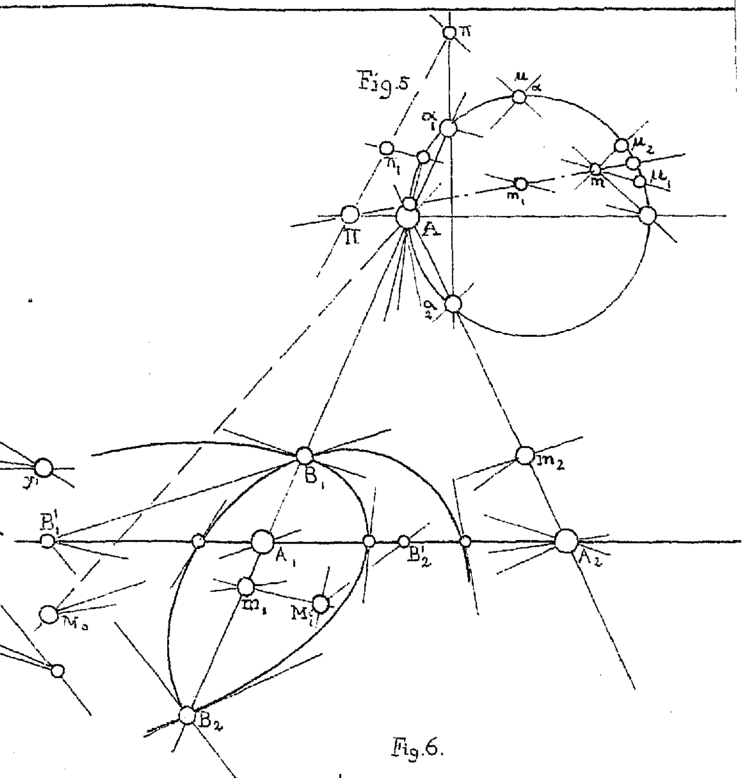


Fig. 2.

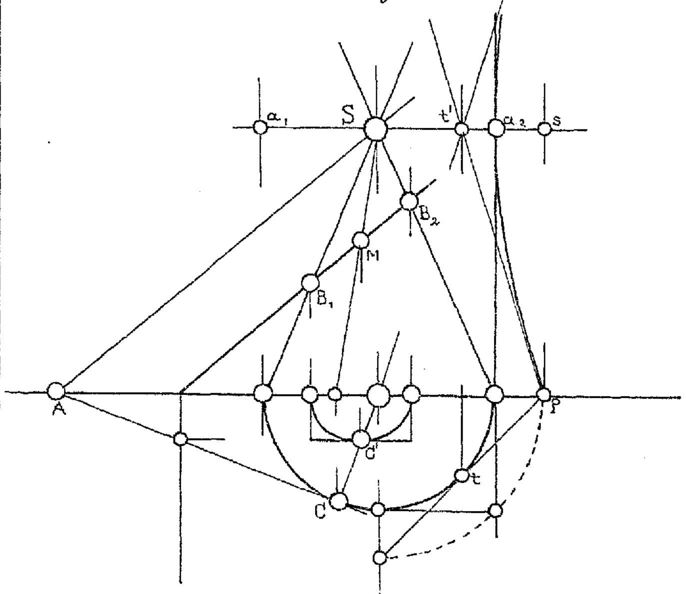


Fig. 4.

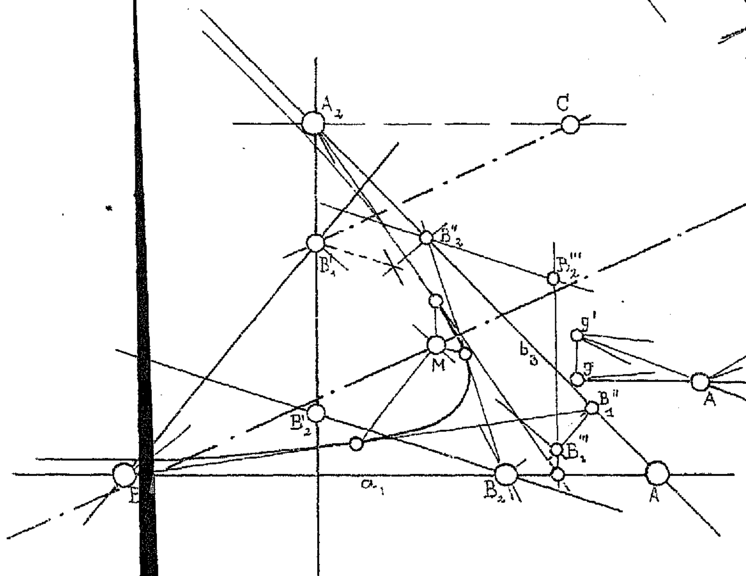
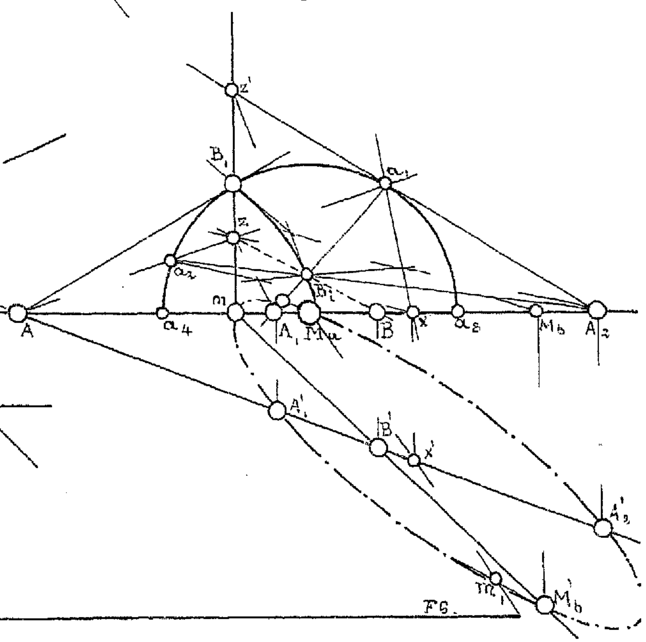


Fig. 6.



F6.