Ueber einige Grundbegriffe der Mechanik.

Von

F. Rudio.

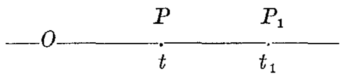
Wenn man irgend eine der einführenden Darstellungen der Mechanik in die Hand nimmt, so wird man sich eines gewissen Gefühles der Nichtbefriedigung kaum erwehren können, wenn man sieht, wie unklar gerade die Grundbegriffe bei ihrer ersten Einführung definirt werden, Begriffe, auf die doch alles ankommt, mit denen später fortwährend operirt wird und die ihrer Wichtigkeit halber Eingang in alle naturwissenschaftlichen Disciplinen gefunden haben. Man wird wahrnehmen, dass man sich bei der Einführung dieser Begriffe durchweg eigenthümlicher unklarer Vorstellungen bedient, die vielmehr der Ausdrucksweise der Metaphysik entlehnt sind, als der Welt der Erscheinungen, wie sie sich unsern Sinnen offenbart.

Der Gedanke, dass gerade die Grundbegriffe der Mechanik einer Reinigung fähig und bedürftig sind, ist nicht neu. Er ist mit vollem Bewusstsein wohl zum ersten Male von Gustav Kirchhoff ausgesprochen worden, der das Wesen der Naturerklärung in einer möglichst vollständigen und einfachen Naturbeschreibung erblickt, wie sie durch die Sprache der Mathematik ermöglicht wird.

Demgemäss soll man bei der Darstellung eines Naturvorganges Alles das weglassen, was sich nicht auf eine bestimmte, auf den Vorgang selbst bezügliche Wahrnehmung stützt. So ist es gewiss nicht das Natürlichste, wenn man bei der Beschreibung eines Bewegungsvorganges die charakteristischen Merkmale desselben zusammenfasst, diese einer unbekannten, der sinnlichen Wahrnehmung und der begrifflichen Definition gleich unzugänglichen Ursache andichtet und dann rückwärts die vorliegende Bewegung als einen Ausfluss dieser durchaus unklaren Ursache betrachtet.

Es ist mir nun keine Darstellung bekannt, welche auf Grund der Kirchhoff'schen Forderungen die Grundbegriffe der Mechanik einer durchgreifenden, elementaren Erörterung unterzogen hätte. Kirchhoffs Mechanik selbst — und das ist ja auch nicht die Meinung ihres berühmten Verfassers gewesen — kann natürlich als eine solche einführende Darstellung nicht angesehen werden. Wenn ich daher in der vorliegenden Arbeit die Begriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Masse und Gewicht einer Besprechung unterziehe, so geschieht dies in der Meinung, dass es an der Zeit wäre, wenn Grundbegriffe, die in allen naturwissenschaftlichen Disciplinen von fundamentaler Natur sind, endlich einmal in ihrer Formulirung denjenigen Grad von Klarheit und Präcision gewinnen würden, dessen sie fähig sind.

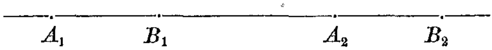
Indem ich die Begriffe von Raum und Zeit als gegeben voraussetze und absichtlich auf eine Analyse derselben verzichte, betrachte ich zunächst folgendes einfache Beispiel als Ausgangspunkt. In einer geraden Linie bewege sich ein Punkt so, dass in je 2 gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden. Diese Bewegung nennt man eine gleichförmige Bewegung. Da in je 2 gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden, so unterscheiden sich die einzelnen Zeit- oder Wegintervalle nicht von einander und die Bewegung ist vollständig bekannt, wenn man weiss, welchen Weg der Punkt in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Man wähle nun eine Zeiteinheit z. B. die Secunde, und eine Längeneinheit z. B. das Meter. Den Weg messe man von einem bestimmten Anfangspunkte O an,



die Zeit von einem bestimmten Anfangsmomente. Den in einer Secunde zurückgelegten Weg nennt man dann die Geschwindigkeit des Punktes. Sie werde mit c bezeichnet; c ist dann eine bestimmte Zahl, die sich auf Meter und Secunde bezieht und bei andern Einheiten ein andern Werth annimmt. Im Zeitmomente t befinde sich der Punkt in P, im Zeitmomente t_1 in P_1.

Es sei $OP = s$, $OP_1 = s_1$, sodass $PP_1 = s_1 - s$ ist. Es ist dann $s_1 - s = c(t_1 - t)$, woraus $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ und $s = ct + s_1 - ct_1$ folgt. Es ist also s eine lineare Funktion der Zeit und umgekehrt stellt jede lineare Funktion $s = at + b$ eine gleichförmige Bewegung dar, bei welcher die Geschwindigkeit gleich a ist.

Es möge sich nun zweitens ein Punkt in einer geraden Linie ungleichförmig bewegen, d. h. so, dass in gleichen Zeiten im allgemeinen nicht gleiche Wege zurückgelegt werden. Zwei gleich grosse Wegintervalle, z. B.



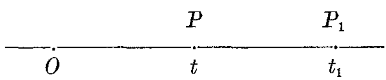
$A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ werden sich jetzt im Allgemeinen von einander unterscheiden, insofern sie in verschiedenen Zeiten zurückgelegt werden. Wenn das Intervall $A_1 B_1$ in kürzerer Zeit zurückgelegt wird als das gleich grosse

$A_2 B_2$, so wollen wir sagen, $A_1 B_1$ werde mit grösserer mittlerer Geschwindigkeit durchlaufen als $A_2 B_2$. Der Einfachheit halber werde angenommen, dass innerhalb der Intervalle $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ die Bewegungsrichtung nicht wechsle. Durch die gewählte Ausdrucksweise soll der Einführung des Begriffes der Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung nicht vorgegriffen werden, es wird nur gesagt, was es heisst, zwei gleich grosse Intervalle werden mit verschiedenen mittleren Geschwindigkeiten durchlaufen. Nehmen wir nun ein Intervall, z. B. $A_1 B_1$ und theilen dasselbe in n gleich grosse Theilintervalle, so zeigt es sich, dass im Allgemeinen auch diese Theilintervalle mit verschiedenen mittleren Geschwindigkeiten durchlaufen werden. Da sich also die verschiedenen Theilintervalle von einander unterscheiden werden, wie klein man dieselben, d. h. wie gross man auch n wählen mag, so wird man zu der Nothwendigkeit geführt, den Begriff der Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkte zu definiren.

Es ist nun ganz auffallend, dass dieser wichtige Begriff in keinem der bekannteren Lehrbücher der Mechanik mit der nöthigen Präcision und Sorgfalt entwickelt wird. Man geht im Allgemeinen folgendermassen zu Werke. Ein Punkt, welcher durch eine Momentankraft in Bewegung versetzt worden ist, bewegt sich gleichförmig, wenn keine weitern Kräfte auf ihn einwirken und ungleichförmig, wenn eine solche Einwirkung während der Bewegung stattfindet. Man übersieht dann, dass die Aussage: auf einen Punkt wirkt keine Kraft, oder es wirkt eine solche auf ihn — gar nichts anderes ist als eine andere Ausdrucksweis für die Wahrnehmung, dass sich der Punkt gleichförmig oder ungleichförmig bewegt, und man definirt dann bei der ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit in einem bestimmten Momente als den Weg, den der Punkt in der folgenden Secunde zurücklegen würde, wenn diese beschleunigenden oder verzögernden Kräfte plötzlich wegfielen.

Ich glaube nun nicht, dass man damit eine klare Vorstellung verbinden kann. Denn jene Kräfte, die plötzlich zum Wegfall kommen sollen, sind uns etwas durchaus unbekanntes, mysteriöses, die wir uns erst durch Beobachtung der vorliegenden ungleichförmigen Bewegung construiren und die daher nicht umgekehrt zur Erklärung der Bewegung dienen können. Und ferner: Wenn nun auch diese unbekannten Kräfte plötzlich weggefallen sind und sich der Punkt dann in Folge der sogenannten Trägheit gleichförmig bewegt, mit welcher Geschwindigkeit soll er sich dann gleichförmig weiterbewegen? Mit der Geschwindigkeit, die er in dem betreffenden Momente hat? Die soll ja gerade erklärt werden.

Ich glaube, der Begriff der Geschwindigkeit kann nur auf folgende Weise construirt werden. Die Bewegung eines Punktes ist dann und nur dann vollständig bekannt, wenn wir im Stande sind, in jedem Zeitmomente die Stelle anzugeben, an der er sich befindet. In einem Zeitmomente t befinde



sich der Punkt in P. Charakterisirt man dann den Punkt P durch seine Entfernung s von einem festen Anfangspunkte O, so muss man also s als eine Funktion*)

*) Es braucht nicht bemerkt zu werden, dass bei einem ersten Unterrichte der Funktionsbegriff sehr wohl umgangen werden

von t angeben können. Es sei nun $s = f(t)$. Diese Gleichung heisst die Bewegungsgleichung des Punktes. Der bewegliche Punkt befinde sich nun zur Zeit t an der Stelle P und zur Zeit t_1 an der Stelle P_1. Es sei $OP = s$, $OP_1 = s_1$, so ist also $s = f(t)$, $s_1 = f(t_1)$ und der Punkt hat den Weg $s_1 - s = f(t_1) - f(t)$ in der Zeit $t_1 - t$ zurückgelegt. Die frühere Definition von der Verschiedenheit der mittleren Geschwindigkeiten in 2 gleich grossen Wegintervallen soll nun folgendermassen ergänzt werden. Von 2 Punkten P' und P'' möge der eine P' den Weg $A'B'$ in der Zeit t' zurücklegen, der andere P'' den gleich grossen Weg $A''B''$ in der Zeit t'', ohne dass in diesen Intervallen eine Aenderung der Bewegungsrichtung eintrete. Wir sagen dann, P' besitze eine kleinere, eine ebenso grosse oder eine grössere mittlere Geschwindigkeit als P'', je nachdem t' grösser, gleich oder kleiner als t'' ist.

Wir führen nun ausser dem Punkte, dessen Geschwindigkeit definirt werden soll, einen zweiten Punkt ein, der denselben Weg $s_1 - s$ in derselben Zeit $t_1 - t$ zurücklegen soll und zwar gleichförmig. Die beiden Punkte haben dann auf Grund unserer Definition dieselbe mittlere Geschwindigkeit.

Wir werden demnach die Geschwindigkeit des zweiten sich gleichförmig bewegenden Punktes, nämlich den Ausdruck $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ als die mittlere Geschwindigkeit des ersten Punktes im Intervall PP_1 bezeichnen können. Dieselbe ist also gleich $\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

---

kann, obwohl sich hier andrerseits eine nicht unpassende Gelegenheit zu seiner Einführung bietet.

wenn wir $t_1 - t = h$ setzen. Wir werden nun ein um so vollständigeres Bild von der Bewegung erhalten, je grösser die Zahl der Intervalle ist, für welche wir die mittlere Geschwindigkeit kennen. So wird man die Bewegung des Punktes in der Umgebung der Stelle P um so genauer kennen, je kleiner das Intervall PP_1 ist, für welches wir die mittlere Geschwindigkeit bestimmt haben. Wir lassen daher in dem Ausdruck $\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ $t_1 - t = h$ immer kleiner und kleiner werden. Die Grenze, welcher sich dann die mittlere Geschwindigkeit für $h = o$ nähert, nennen wir die Geschwindigkeit des Punktes im Zeitmomente t oder an der Stelle P. Man bezeichnet diese Grenze durch $f'(t)$ und nennt sie die Ableitung von $f(t)$.

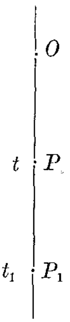
Die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes wird also in jedem Zeitmomente t durch eine ganz bestimmte Zahl $f'(t)$ definirt. Wir wollen die Geschwindigkeit in einem beliebigen Momente t durch v bezeichnen; dann ist also $v = f'(t)$. Diese Gleichung ist nicht, wie es in den meisten Lehrbüchern aufgefasst wird, eine zu beweisende, sondern sie ist die Definition der Geschwindigkeit.

Es ist jetzt auch klar, was man unter der Geschwindigkeitsänderung versteht, wenn man von einem Zeitmomente t zu einem andern t_1 übergeht. Es ist dies die Differenz $v_1 - v = f'(t_1) - f'(t)$.

Wir wollen nun den Begriff der Geschwindigkeit an einem einfachen Beispiel erläutern, um namentlich auch den durchaus elementaren Charakter des Vorhergehenden zu veranschaulichen. Ein Punkt bewege sich so, dass der zurückgelegte Weg proportional dem Quadrate der Zeit sei. Es soll also $s = a\,t^2$ sein.

Nach diesem Gesetze bewegt sich z. B. ein Punkt, den man ohne Anfangsgeschwindigkeit frei herabfallen lässt.

Dieser Satz ist rein empirischer Natur. Es ist eine durch Beobachtung festgestellte Thatsache, dass die Bewegungsgleichung eines frei herabfallenden Punktes $s = at^2$ lautet. Man hat daher naturgemäss bei der Besprechung der Fallgesetze von dieser durch Beobachtung gewonnenen Gleichung auszugehen und nicht von der sogenannten Schwerkraft, die man sich erst auf Grund dieser Beobachtungen construirt.



Wir betrachten nun 2 aufeinanderfolgende Zeitmomente t und t_1, zu welchen die zurückgelegten Wege $OP = s$ und $OP_1 = s_1$ gehören mögen. Es ist dann $s = a\,t^2$ und $s_1 = a\,t_1^2$.

Das Intervall $PP_1 = s_1 - s$ ist dann in der Zeit $t_1 - t$ zurückgelegt worden, also mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{a\,t_1^2 - a\,t^2}{t_1 - t} = a\,(t_1 + t).$$

Setzt man $t_1 = t + h$, so ist also die mittlere Geschwindigkeit im Intervall PP_1 gleich $a(2t+h)$. Wenn h immer kleiner und kleiner wird und schliesslich verschwindet, so nähert sich dieser Ausdruck der Grenze $2\,a\,t$. In jedem Zeitmomente t wird also die Geschwindigkeit durch den Ausdruck $v = 2\,a\,t$ gemessen. Bei dieser Bewegung wächst die Geschwindigkeit proportional der Zeit, sie nimmt pro Secunde um die Grösse $2a$ zu. Diese constante Zunahme der Geschwindigkeit pro Secunde nennt man die Beschleunigung und die eben beschriebene Bewegung eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Bei dem freien Fall wird speciell diese Grösse $2\,a$ die Beschleunigung der Schwere genannt und mit dem

Buchstaben g bezeichnet, sodass die Bewegungsgleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$ lautet. Die Beobachtung lehrt dann, dass g vom Aequator nach den Polen hin zunimmt.

Auf Meter und Secunde bezogen ist g unter dem 45. Breitegrad $= g_{45} = 9{,}808$. Für den Breitegrad φ ergibt sich dann g_φ aus der Formel

$$g_\varphi = g_{45}\,(1 - 0{,}0026 \cos 2\varphi).$$

Die Beschleunigung $2a$ der zu der Gleichung $s = at^2$ gehörigen Bewegung findet man aus den zu 2 verschiedenen Zeitmomenten t und t_1 gehörigen Geschwindigkeiten v und v_1, denn aus $v = 2at$ und $v_1 = 2at_1$ folgt $2a = \dfrac{v_1 - v}{t_1 - t}$.

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung ist nach der gleichförmigen Bewegung die einfachste. Sie ist also dadurch ausgezeichnet, dass in je 2 gleichen Zeitintervallen die Geschwindigkeitsänderung dieselbe ist.

Wir nehmen jetzt eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung an, d. h. eine solche, bei welcher in gleichen Zeiten im Allgemeinen nicht gleiche Geschwindigkeitsänderungen eintreten. Um die Vorstellungen zu vereinfachen, denken wir uns die vorliegende Bewegung in Abschnitte zerlegt, derart, dass innerhalb eines Abschnittes die Geschwindigkeit absolut genommen nur zunimmt oder nur abnimmt. Wir beschäftigen uns dann nur mit einem solchen Abschnitt. Entsprechend dem früheren führen wir nun folgende Definition ein:

Von 2 Punkten P' und P'' möge der eine, P', in einem bestimmten Zeitintervall die Geschwindigkeitsänderung φ' erleiden, der andere, P'' in einem gleich grossen Zeitintervall die Aenderung φ''. Wir sagen dann, P' habe sich mit einer kleineren, einer ebenso grossen oder einer grösseren mittleren Beschleunigung bewegt als P'', je nachdem φ' kleiner, gleich gross oder grösser als φ'' ist.

Wenn man nun bei der zu betrachtenden Bewegung ein Zeitintervall in n gleiche Theile theilt, so wird man beobachten, dass der bewegliche Punkt im Allgemeinen in diesen Theilintervallen verschiedene mittlere Beschleunigungen besitzt und da dies gilt, wie klein auch diese Theilintervalle gewählt werden, so wird man zu der Nothwendigkeit geführt, den Begriff der Beschleunigung für einen bestimmten Zeitmoment zu definiren. Hier begegnet man nun fast durchweg denselben Unklarheiten, die bei dem Begriffe Geschwindigkeit hervorgehoben wurden. Man sagt gewöhnlich so: Die gleichförmig beschleunigte Bewegung eines Punktes wird erzeugt durch Einwirkung einer constanten Kraft und der Punkt wird sich ungleichförmig bewegen, wenn die auf ihn einwirkende Kraft eine veränderliche ist. Auch hier vergisst man, dass, wenn man von einer constanten oder einer veränderlichen Kraft redet, dies durchaus keine Erklärung ist, sondern nur eine etwas unklarere Ausdrucksweise für die directe Wahrnehmung, dass sich der Punkt eben gleichförmig oder ungleichförmig beschleunigt bewegt. Man wird sich daher auch nicht von der üblichen Definition befriedigt fühlen können, nach welcher die Beschleunigung des Punktes in einem bestimmten Momente die in der folgenden Secunde eintretende Geschwindigkeitsänderung ist, wenn plötzlich die veränderliche Kraft constant würde.

$$\begin{array}{cc} P & P_1 \\ \hline t & t_1 \\ v & v_1 \end{array}$$

Im Zeitmomente t befinde sich der Punkt an der Stelle P und seine Geschwindigkeit sei v, in einem spätern Zeitmomente t_1 sei der Punkt an der Stelle P_1 angelangt und habe die Geschwindigkeit v_1 erlangt. Er hat dann in der Zeit $t_1 - t$ die Geschwindigkeitsänderung $v_1 - v$ erhalten. Wäre die Bewegung eine gleichförmige, so würde der Quotient $\frac{v_1 - v}{t_1 - t}$ die Beschleunigung darstellen. Wenn nun auch die Bewegung keine gleichförmige ist, so können wir sie doch auf folgende Weise mit einer gleichförmigen in Beziehung bringen.

Wir führen einen zweiten Punkt ein, der ebenfalls im Zeitmomente t mit der Geschwindigkeit v aufbricht, im Zeitmomente t_1 mit der Geschwindigkeit v_1 ankommt und sich ausserdem gleichförmig beschleunigt bewegt. Da beide Punkte in derselben Zeit $t_1 - t$ dieselbe Geschwindigkeitsänderung $v_1 - v$ erleiden, so werden wir entsprechend der früheren Ausdrucksweise sagen, dass beide Punkte sich mit derselben mittleren Beschleunigung im Zeitintervalle $t_1 - t$ bewegt haben, und da der Quotient $\frac{v_1 - v}{t_1 - t}$ gerade die Beschleunigung des zweiten Punktes darstellt, so wird man diesen Ausdruck passend als die mittlere Beschleunigung des ersten Punktes bezeichnen. Dieselbe ist also

$$\frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{f'(t_1) - f'(t)}{t_1 - t} = \frac{f'(t+h) - f'(t)}{h},$$

wenn man $t_1 - t = h$ setzt. Diese mittlere Beschleunigung sagt uns zunächst nur, dass der Punkt im Zeitintervall $t_1 - t = h$ die Geschwindigkeitsänderung $v_1 - v$ erfahren habe, nicht aber, in welcher Weise diese Aenderung *während* dieser Zeit $t_1 - t$ vor sich gegangen ist. Unsere Vorstellung über die Art und Weise der Geschwindigkeitsänderung wird nun aber immer vollständiger, wenn wir für möglichst viele, möglichst kleine Zeitintervalle die mittlere Beschleunigung bestimmen. Dies führt uns dazu, in dem Ausdrucke $\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}$ das Intervall h immer kleiner und kleiner werden zu lassen. Die Grenze, welcher sich dann der Ausdruck $\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}$ nähert, wenn h gleich 0 wird, nennen wir die Beschleunigung des Punktes im Momente t oder an der Stelle P. Wir bezeichnen diese Grenze mit $\varphi = f''(t)$ und nennen sie die 2te Ableitung von $f(t)$. Auch hier ist also die Gleichung $\varphi = f''(t)$ die Definition der Beschleunigung und nicht etwa eine Gleichung, deren Richtigkeit zu beweisen wäre.

Auf diese Weise kann man die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung auf eine klare und einwurfsfreie Weise einführen, ohne dass man nöthig hätte, zu den Kräften als Bewegungsursachen seine Zuflucht zu nehmen. Diese sogenannten Ursachen entbehren nicht nur jeder Anschaulichkeit, sondern sind auch, wie dies schon David Hume in seinen Essay's dargethan hat, nicht einmal begrifflich genau definirt, sodass man dieselben zur Formulirung der Fundamentalbegriffe nicht wohl heranziehen sollte.

Bisher war nur von der Bewegung eines materiellen Punktes die Rede, wir gehen jetzt zur Bewegung von Körpern über. Unter einem Körper verstehen wir gewöhnlich alles das, was wir durch unsere Sinne wahrnehmen können. Dieser Erklärung liegt die Annahme einer ausserhalb und unabhängig von uns existirenden Körperwelt zu Grunde, welche auf unsere Sinne einwirkt und von der wir durch diese sinnliche Einwirkung Kenntniss erlangen. Diese Annahme ist für alle Bedürfnisse der Wissenschaft und der Praxis ausreichend. Es sei aber gestattet, mit wenigen Worten von erkenntnisstheoretischer Seite her auf dieselbe einzutreten. Soviel wird zugegeben werden müssen, dass das, was ursprünglich einzig und allein uns gegeben ist, unsere Vorstellungen, unsere Empfindungen sind. Mit ihnen müssen wir als etwas Gegebenem rechnen. Diese Vorstellungen zerfallen in unzählig viele mehr oder weniger von einander abgegrenzte Complexe, die sich auf das beziehen, was wir gewöhnlich Körper nennen.

Wir machen nun die Beobachtung, dass diese Vorstellungscomplexe, von unwesentlichen Nuancen abgesehen, sich bei allen Menschen in derselben Weise wiederholen. Dieser Umstand erzeugt in uns ein gewisses Gefühl der Unabhängigkeit jener Complexe von dem eigenen Ich, ein Gefühl, welches einen besonders lebhaften Ausdruck in unserer Sprache findet. Im Interesse der Einfachheit und der leichteren Verständigung liegt es, diese Vorstellungsgruppen in einer Art und Weise zu bezeichnen, die nicht mehr an den subjectiven Ursprung erinnert. Mit andern Worten, wir objectiviren durch die Sprache und verstärken durch diese stete Gewohnheit das oben bezeichnete Gefühl der Selbstständigkeit jener Vorstellungscomplexe und ihrer Unabhängigkeit vom vorstellenden Subject. Ich glaube nicht, dass man mit der Annahme einer ausser uns existirenden Körperwelt einen andern als den bezeichneten Sinn verbinden kann. Wenn man nun sagt, jenen Vorstellungen müsse doch etwas Thatsächliches, von uns Unabhängiges zu Grunde liegen, was dieselben erzeugt, so wäre zunächst mit Hume, der wohl zuerst das Causalitätsprincip einer sorgfältigen Kritik unterworfen hat, zu fragen, worin denn dieses

« muss » begründet ist, dann aber namentlich, welcher Art von Existenz dieses unbekannte, zu Grunde liegende Ding an sich führen soll. Es kommt natürlich Alles darauf an, anzugeben, welchen Sinn man jetzt neuerdings mit diesem Verhältnissbegriff Existenz verbinden will. Von einer Existenz schlechtweg zu reden und dem Leser zu überlassen, sich etwas dabei zu denken (wie z. B. Spinoza verfährt), scheint doch unstatthaft. Wenn man daher von einem Ding an sich redet und, wie allgemein geschieht, anzugeben unterlässt, in welcher Art dasselbe existiren soll, so operirt man eben in einer fundamentalen Frage mit Worten, deren Bedeutung nicht definirt worden ist und wohl auch nicht definirt werden kann.

Aber wie gesagt, für unsere Zwecke ist jene Annahme einer unabhängig von uns existirenden Körperwelt, so unexact auch diese Ausdrucksweise ist, vollständig ausreichend und das Causalitätsbedürfniss, welches vor der Kritik der reinen Vernunft als eine anerzogene, durch nichts motivirte Angewohnheit erscheint, stellt sich in praxi als zweckmässig, ja als unentbehrlich heraus.

Unter einem Körper verstehen wir also alles das, was wir durch unsere Sinne wahrnehmen. Jeder Körper nimmt einen bestimmten Raum ein, dessen Grösse als sein Volumen bezeichnet wird. Dasjenige, womit dieser Raum ausgefüllt wird und was eben auf unsere Sinne einwirkt, nennen wir die Masse des Körpers. Jeder Körper besitzt ferner ein bestimmtes Gewicht. Damit soll zunächst nur der subjectiven Empfindung Ausdruck gegeben werden, dass jeder Körper auf seine Unterlage einen bestimmten Druck ausübt.

Auch ohne ein genaues Mass für diesen Druck zu besitzen, sprechen wir bereits, indem wir wiederum rein unserer subjectiven Empfindung folgen, von grösseren und kleineren Gewichten und finden eine Berechtigung für diese Ausdrucksweise in dem Umstande, dass im Wesentlichen alle Menschen in der Beurtheilung des relativen Gewichtes der Körper übereinstimmen.

Es handelt sich aber nun darum, die Begriffe Masse und Gewicht mathematisch d. h. durch Zahlen zu fixiren. Dabei müssen wir uns fragen, welche Merkmale wir als wesentlich mit in die Definition aufnehmen wollen. Als ein wesentliches Merkmal für die Masse betrachten wir ihre Unveränderlichkeit im Raum und in der Zeit. Die Masse eines Körpers ist also durch eine von der Raum- und Zeiteinheit unabhängige Zahl zu definiren. Wir beurtheilen ausserdem eine Masse wesentlich nach ihrem Gewichte und stellen daher folgende Definition auf: Zwei Massen sind einander gleich und von gleichem Gewichte, wenn sie auf die Waage gebracht sich das Gleichgewicht halten. Zur Vervollständigung dieser Definition und insbesondere auch für das practische Wägen sind dann noch folgende Erfahruugssätze erforderlich:

1) Zwei Massen, die an irgend einem Orte und zu irgend einer Zeit als einander gleich befunden worden sind, sind es an jedem Orte und zu jeder Zeit.

2) Wenn zwei Massen einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich.

Der erste dieser beiden empirischen Sätze zeigt, dass unsere Definition von der Gleichheit der Massen wirklich der oben betonten Unveränderlichkeit im Raum und in der Zeit Rechnung trägt, der zweite dispensirt uns davon, alle Massen mit einer und derselben als Einheit gewählten Masse zu vergleichen, ist also für die practische Anwendung unserer Definition unentbehrlich.

Als Masseneinheit pflegt man nun einen Cubikcentimeter Wasser bei 4 Grad Celsius zu wählen. Diese Masse bezeichnen wir durch die Zahl 1 und drücken dann die Masse eines beliebigen andern Körpers durch die Zahl m aus, wenn auf der Waage m Cubikcentimeter Wasser von 4° Celsius dem betreffenden Körper das Gleichgewicht halten. Auf diese Weise also ordnen wir einem jeden Körper eine ganz bestimmte, von den Einheiten des Raumes und der Zeit unabhängige Zahl zu, die wir nun kurz seine Masse nennen.

Da wir gleichen Massen gleiche Gewichte zugesprochen haben, so läge es nahe, das Gewicht eines Körpers durch dieselbe Zahl m zu bezeichnen, wie seine Masse. Dem steht aber die Beobachtung gegenüber, dass der Druck, den ein Körper auf seine Unterlage ausübt, nicht vom Raume unabhängig ist, dass derselbe vom Aequator nach den Polen hin zunimmt. Diese Thatsache können wir mit Hülfe der Federwaage erkennen, auch wenn wir noch nicht den Druck selbst durch Zahlen ausgedrückt haben. Die Zahl m kann also als Mass für das Gewicht eines Körpers nicht gewählt werden. Die früher gegebene Definition, der zu Folge 2 Körper gleiches Gewicht haben, wenn ihre Massen gleich sind, d. h., wenn sie auf der Waage sich das Gleichgewicht halten, vervollständigen wir nun folgendermassen:

An einem und demselben Orte hat der Körper A ein k mal grösseres Gewicht als der Körper B, wenn die Masse von A k mal grösser ist als die von B, d. h. an einem und demselben Orte sind die Gewichte zweier Körper ihren Massen proportional. Wählen wir daher für einen bestimmten Ort eine Gewichtseinheit, die natürlicherweise nur für diesen Ort eine Bedeutung hat, so können wir jetzt mit Hülfe dieser Proportionalität an der Federwaage eine Scala entwerfen, welche das relative Gewicht eines jeden Körpers für den betreffenden Ort angibt. Wägen wir dann auf dieser Federwaage denselben Körper an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche, so ergibt sich zunächst die schon oben hervorgehobene Abhängigkeit des Gewichtes vom Orte und dann genauer, dass die Gewichte eines und desselben Körpers an zwei verschiedenen Punkten der Erdoberfläche sich verhalten, wie die zu diesen Punkten gehörigen Beschleunigungen der Schwere.

Haben wir daher 2 Körper K_1 und K_2 mit den Massen m_1 und m_2, so sind die für zwei verschiedene Orte P_1 und P_2 mit den respectiven Beschleunigungen der Schwere g_1 und g_2 gültigen Gewichte dieser Körper durch Zahlen G_1 und G_2 zu bezeichnen, welche der Proportion $G_1 : G_2 = m_1\, g_1 : m_2\, g_2$ genügen müssen. Dieser Bedingung wird am einfachsten Genüge geleistet, wenn wir das Gewicht eines Körpers mit der Masse m an dem durch die Beschleunigung g charakterisirten Orte durch das Produkt $G = m\,g$ definiren.

Nachdem in dieser Weise die Begriffe Masse und Gewicht eingeführt sind, ohne Zuhülfenahme von Begriffen, die nicht direct der Controle der Wahrnehmung unterliegen, wollen wir uns noch mit dem Begriffe der bewegenden Kraft beschäftigen. Wenn sich ein Körper von der Masse m mit der Beschleunigung φ bewegt, so sagt man gewöhnlich, dass der Körper unter dem Einfluss einer beschleunigenden Kraft von der Grösse $m\,\varphi$ stehe, welche als die Ursache dieser Bewegung aufgefasst wird. So wird übereinstimmend hiermit der freie Fall als eine Folge der Schwerkraft angesehen, welche durch das Produkt mg, d. h. durch das Gewicht des fallenden Körpers gemessen wird. Thatsächlich kann man nun aber doch mit dem Satze, dass die bewegliche Masse unter dem Einfluss der bewegenden Kraft $m\varphi$ stehe, keinen andern Sinn verbinden als den, dass sich eben die Masse m mit der Beschleunigung φ bewegt. Eine Erklärung der Bewegung wird durch die Einführung des Kraftbegriffes nicht gewonnen, wohl aber kann derselbe häufig zur Vereinfachung der Ausdrucksweise mit Vortheil verwendet werden. Mit Bezug auf diesen Punkt kann ich mich darauf beschränken, auf die Darstellung in Kirchhoff's Mechanik zu verweisen, wo zum ersten Male der Kraftbegriff von den ihm anhaftenden metaphysischen Unklarheiten befreit worden ist. In der vorlieliegenden Arbeit kam es mir darauf an, zu zeigen, wie man auch andere Grundbegriffe der Mechanik klarer und einfacher formuliren kann, dadurch, dass man in richtiger Auffassung des Causalitätsbegriffes den empirischen Charakter dieser Begriffe stärker betont, als dies gewöhnlich geschieht.

Zürich, 11. Januar 1886.

Notizen.

Zum täglichen Gang der Temperatur auf Bergstationen. — Die Frage nach dem Einfluss der Erhebung über Meer auf den täglichen und jährlichen Gang der Temperatur ist schon vielfach erörtert worden; die Wechselwirkung zwischen Meereshöhe und Temperatur zeigt sich ja ebenso deutlich in den täglichen und jährlichen Perioden wie in den Mitteln. Die bisherigen Beobachtungen, speziell darüber inwiefern die Höhenlage massgebend ist auf den täglichen Gang