Centrische Collineation $n$ter Ordnung und plane Collineation $n$ter Classe

von

Dr. Christian Beyel.

1.

Gegeben sei ein Punkt C und eine Fläche $\mathbf{L}^n$ von der $n$ten Ordnung. C liege nicht in $\mathbf{L}^n$.

Gegeben sei eine Ebene E und eine Fläche $\mathbf{L}_n$ von der $n$ten Classe. E berühren $\mathbf{L}_n$ nicht.

Wir setzen nun die Elemente der mehrfach gedachten Räume in folgende Beziehung zu einander:

Sei P ein Punkt eines Raumes und schneide der Strahl CP die Fläche $\mathbf{L}^n$ in n Punkten $L_1 \ldots L_n$ und bestimmen wir n Punkte $P'_1 \ldots P'_n$ in der Weise, dass:

$$(CL_1 PP_1') = (CL_2 PP_2') = \ldots = (CL_n PP_n') = \varDelta$$

Sei P eine Ebene des Raumes, welche E in e schneide. Dann gehen durch e n Tangentialebenen $L_1 \ldots L_n$ an $\mathbf{L}_n$. Bestimmen wir n Ebenen $P'_1 \ldots P'_n$ in der Weise, dass:

$$(EL_1 PP_1') = (EL_2 PP_2') = \ldots = (EL_n PP_n') = \varDelta$$

wobei $\varDelta$ eine constante Zahl bedeutet, so sind hierdurch

dem Punkte P n Punkte P′ | der Ebene P n Ebenen P'

zugeordnet. Eine derart festgesetzte Beziehung wollen wir als

centrische Collineation $n$ter Ordnung | plane Collineation $n$ter Classe mit der Charakteristik $\varDelta$ bezeichnen und durch das Symbol

$(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta)$ | $(E\,\mathsf{L}_n\,\varDelta)$

ausdrücken.

Je nachdem wir ein Element P zu dem einen oder anderen Raume rechnen, correspondiren ihm n Elemente P′ oder n Elemente P^*. Von diesen sind je zwei — sagen wir $P_n' P_n^*$ dem P in Bezug auf ein L — in unserem Falle auf L_n — zugeordnet. Wir bezeichnen diese als doppelt conjugirt zu P. Da nach der Definition $(C L_n P P_n') = \varDelta$ ist, so muss, wenn P zum gestrichenen Raume gerechnet wird und P_n^* zum correspondirenden hat, $(C L_n P P_n^*) = \frac{1}{\varDelta}$ sein. Folglich ist $(C L_n P_n^* P_n') = \varDelta^2$.

Nun gibt es zu jedem Elemente P^* n doppelt conjugirte P′. Wir erhalten sie, indem wir die dem P^* entsprechenden im gestrichenen Raume — also $P_1' \ldots P_n'$ — bestimmen. Jedes der letzteren — etwa P_x' — können wir als zum ungestrichenen Raume gehörend betrachten. Dann correspondirt ihm — in Bezug auf L_x — ein Element, das nach der oben eingeführten Bezeichnungsweise zu P^* doppelt conjugirt ist.

Fassen wir den zuletzt bewiesenen Schluss mit dem vorhergehenden zusammen, so folgern wir:

Die doppelt conjugirten Elemente einer Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\varDelta)$ *resp.* $(E\,\mathsf{L}_n\varDelta)$ *stehen in einer Collineation* $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta^2)$ *resp.* $(E\,\mathsf{L}_n\varDelta^2)$.

Bestimmen wir zu P ein correspondirendes Element P_n' in der Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta)$ und zu diesem das entsprechende — P_n^* — in der Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta^2)$, so wird P_n^* mit P_n' zusammenfallen, wenn $\varDelta^2 = 1$ ist. Es entspricht dann dem Elemente P, ob wir es zum gestrichenen oder ungestrichenen Systeme rechnen, im anderen das nämliche Element d. h. $P P_n'$ correspondiren sich vertauschbar. Die hierfür geltende Bedingung $\varDelta^2 = 1$ wird erfüllt, wenn $\varDelta = \pm 1$ ist. Für $\varDelta = +1$ sind die correspondirenden Räume in Deckung. Die Beziehung, welche für $\varDelta = -1$ stattfindet, bezeichnen wir als *centrische* resp. *plane Involution* der Räume.

2.

Nach dem Gesagten können wir uns darauf beschränken, für die Gebilde des ungestrichenen Raumes die correspondirenden zu untersuchen und wir wenden uns zu dieser Untersuchung.

Einer Geraden g entspricht in der Collineation

($C\,\mathsf{L}^n\,\varDelta$) eine Curve der $n$ten Ordnung, welche in der Ebene durch C *und g liegt.*

Jedem Punkte auf g correspondiren nach 1) n Punkte und offenbar liegt ihre Gesammtheit in der Ebene durch C und g. Dass der Ort dieser Punkte eine Curve $n$ter Ordnung ist, zeigen wir, indem wir ihn von jedem Punkte X des Raumes durch einen Kegel — K^n — der $n$ten Ordnung projiciren.

Schneide nämlich die Ebene durch C und g die Fläche L^n in der Curve L^n und sei s die Verbindungslinie von C mit X,

($E\,\mathsf{L}_n\,\varDelta$) ein Kegel $n$ter Classe, dessen Spitze der Schnittpunkt S von g mit E ist.

Jeder Ebene durch g correspondiren n Ebenen durch S. Diese umhüllen einen Ort. Dass derselbe ein Kegel $n$ter Classe ist, zeigen wir, indem wir ihn durch jede beliebige Ebene X des Raumes in einer Curve $n$ter Classe schneiden.

Sei L_{kn} der Tangentenkegel aus S an L_n. Die Ebene X schneide ihn in der Curve L_n und treffe E in s. Dann wird durch s, L_n und $\varDelta$ eine Collineation ($s\,L_n\,\varDelta$) bestimmt, welche folgendermassen charakteriferner L_k^n der Kegel aus X über L_n, so wird durch s, L_k^n und Δ eine Collineation $(s L_k^n \Delta)$ bestimmt, welche folgendermassen charakterisirt ist. Einer Geraden durch X entsprechen n Gerade $h_1' \dots h_n'$. Sind $l_1 \dots l_n$ die Geraden, in welchen die Ebene durch h und s den Kegel L_k^n schneidet, so erhalten wir die h_n' durch Construction der Doppelverhältnisse $s\, l_n\;\; h\, h_n' = \Delta$.

In dieser Collineation $(s L_k^n \Delta)$ correspondirt einer Ebene P durch X ein Kegel der $n$ten Ordnung. Jede Ebene X' durch X enthält nämlich n Gerade h', welche Geraden in P correspondiren. Dies folgt so: Sei d die Schnittlinie der Ebenen X' und P und sei D die Ebene durch d und s, so construiren wir eine Ebene X derart, dass $(DXPX') = \Delta$ ist. Dann schneidet X den Kegel L_k^n in n Geraden $l_1 \dots l_n$. Die Ebenen durch diese und s treffen X' in n Geraden von der Art derer, welche wir oben mit h' bezeichneten; denn sie bilden je mit s, mit sirt ist: Einer Geraden h entsprechen n Gerade $h_1' \dots h_n'$. Bestimmen wir nämlich den Schnittpunkt von h mit s und seien die Tangenten von ihm an L_n mit $l_1 \dots l_n$ bezeichnet, so erhalten wir die h_n' durch Construction der Doppelverhältnisse: $(s\, l_n\;\; h\, h_n') = \Delta$.

In dieser Collineation $(s L_n \Delta)$ correspondirt einem Punkte P in der Ebene X eine Curve n ter Classe. Durch jeden Punkt X′ in X gehen nämlich n Gerade h', welche Geraden durch P entsprechen. Dies folgt so: Ziehen wir PX′ und treffe diese Linie s in D, so construiren wir auf P X′ einen Punkt X von der Beschaffenheit, dass (D X P X′) = Δ ist, Durch X gehen n Tangenten $l_1 \dots l_n$ an L_n. Diese schneiden s in n Punkten. Letztere mit X′ verbunden ergeben n Linien von der Art derer, welche wir oben mit h' bezeichneten; denn sie bilden je mit s, mit einer Geraden l und mit einer Geraden durch P das Doppelverhältniss Δ.

einer Geraden l in X und einer Geraden in P das Doppelverhältniss Δ.

Nachdem wir auf diese Weise die Collineationen ($s\, L_k^n\, \Delta$) resp. ($s\, L_n\, \Delta$) charakterisirt haben, wenden wir uns wieder zu den Geraden g und ihren entsprechenden Gebilden in den Collineationen ($C\, \mathbf{L}^n\, \Delta$) und $E\, \mathbf{L}_n\, \Delta$) zurück. Wir construiren,

um X eine Collineation ($s L_k^n \Delta$). In derselben entspricht der Ebene durch X und g ein Kegel der n ten Ordnung. Dieser projicirt aber aus X den Ort, welcher g in der Collineation (C $\mathbf{L}^n\, \Delta$) correspondirt. Da nun X beliebig gewählt war, so muss der erwähnte Ort von der n ten Ordnung sein.

in X die Collineation ($s\, L_n\, \Delta$). In derselben entspricht dem Schnittpunkte von g mit X eine Curve n ter Classe. Diese ist aber zugleich der Schnitt von X mit dem Orte, welcher g in der Collineation ($E\, \mathbf{L}_n\, \Delta$) correspondirt. Da X beliebig gewählt war, so ist also jener Ort von der n ten Classe.

Wir bemerken noch, dass in der Ebene durch C und g eine n deutige centrische Collineation durch C, L^n, Δ vermittelt wird. Wir bezeichnen sie als eine Collineation (C $\mathrm{L}^n\, \Delta$).*) Um den Punkt S wird durch $E\, L_{nk}\, \Delta$ eine n deutige Collineation der n ten Classe — ($E\, L_{nk}\, \Delta$) festgelegt.

Es führen uns also die räumlichen Collineationen (C $\mathbf{L}^n\, \Delta$) und ($E\, \mathbf{L}_n\, \Delta$) auf vier neue Collineationen.

*) Vgl. meine Abhandlung über: Centrische Collineation n ter Ordnung in der Ebene vermittelt durch Aehnlichkeitspunkte von Kreisen. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zürich. Bd. XXVI, pag. 297. 1881.

Bezeichnen wir diese als Collineationen 2. Stufe und die räumlichen als Collineationen 3. Stufe, so können wir die gegenseitigen Beziehungen aller dieser Collineationen dahin zusammenfassen:

Die Collineationen zweiter Stufe von gleicher Ordnung — also ($C L^n \Delta$) *und* ($s L_k^n \Delta$) — *sind zueinander perspectivisch. Desgleichen die Collineationen zweiter Stufe von derselben Classe — also* ($s L_n \Delta$) *und* ($E L_{nk} \Delta$). *Durch Schnitt und Scheinbildung können wir aus den Collineationen dritter Stufe die resp. Collineationen 2. Stufe ableiten.*

Die Behandlung der letzteren wird also mit der der ersteren erledigt.

3.

Einer Ebene P entspricht in der Collineation ($C L^n \Delta$) eine Fläche der $n$ten Ordnung F^n.

Einem Punkte P *entspricht in der Collineation ($E L_n \Delta$) eine Fläche der $n$ten Classe* F_n'.

Wir führen den Beweis nur für die *centrische* Collineation.

Eine Gerade g schneidet $\mathsf{F}^{n\prime}$ in n Punkten; denn die Ebene durch C und g trifft P in einer Geraden, deren entsprechender Ort eine Curve $n$ter Ordnung ist. (2) Die n Schnittpunkte dieser Curve mit g sind zugleich die gemeinsamen Punkte von g mit $\mathsf{F}^{n\prime}$. Also ist die letztere Fläche von der $n$ten Ordnung.

4.

Wir wollen nun in unserer Collineation einige ausgezeichnete Elemente hervorheben, welche wir später zur Durchführung der Construction entsprechender Gebilde benutzen.

Sich selbst entsprechend sind:

a) Das Centrum C und die Punkte von $\mathbf{L}^n$.

b) Die Geraden durch C.

Die Ebene E und die Tangentialebenen an $\mathbf{L}_n$.*)

Die Geraden in *E*.

Für die *entsprechenden Gebilde zu den unendlich fernen Elementen* gilt Folgendes:

Einem unendlich fernen Punkte Q von gegebener Richtung correspondiren *n*-Punkte $Q_1' \ldots Q_n'$. Sie sind mit *Q* durch die Relation verbunden:

$(C L_n \infty Q_n') = \varDelta$. Daraus folgt $(C \infty L_n Q_n') = 1 - \varDelta$ und

$$C L_n : C Q_n' = 1 - \varDelta.$$

Einer unendlich fernen Gerade *q* entspricht eine Curve $Q^{n'}$ in der Ebene durch C und *q*. Schneidet letztere aus $\mathbf{L}^n$ die Curve L^n, so sagt das oben angeführte Verhältniss, dass Q'^n zu L^n centrisch ähnlich liegt im Verhältniss $1 - \varDelta$.

Der unendlich fernen Ebene entspricht eine Fläche $\mathbf{Q}^{n'}$. Diese liegt zu $\mathbf{L}^n$ centrisch ähnlich im Verhältniss $1 - \varDelta$.

Der unendlich fernen Ebene Q′ entsprechen *n* Ebenen $Q_1' \ldots Q_n'$, welche zu *E* parallel sind. Bezeichnen wir mit $L_1 \ldots L_n$ die zu *E* parallelen Tangentialebenen an $\mathbf{L}_n$, so werden die Abstände der Ebenen $E\, L_n\, Q_n'$ durch die Relation verbunden

$$(E\, L_n \infty Q_n') = \varDelta$$

oder $\sin \widehat{E L_n} : \sin \widehat{E Q_n'} = 1 - \varDelta$.

Einer unendlich fernen Geraden *q* entspricht ein Cylinder *n*ter Classe. Seine Mantelinien sind parallel der Schnittlinie einer Ebene von der Stellung *q* mit der Ebene *E*.

Unendlich fernen Punkten von gegebenen Richtungen correspondiren Flächen *n*ter Classe. Nach dem oben angeführten Verhältniss liegen diese Flächen affin zu $\mathbf{L}_n$.

*) Den Flächen $\mathbf{L}^n$ resp. $\mathbf{L}_n$ correspondiren überdies noch Flächen der $n^2 - n$ ten Ordnung resp. Classe.

E ist die Collineationsebene der Affinität. Die Richtung des gegebenen Punktes ist die Affinitätsrichtung.

Wir heben die Fläche $\mathbf{Q}_n$ hervor, welche der normalen Richtung zur Ebene E entspricht.

5.

Unter Benutzung der zuletzt erwähnten Elemente beider Räume entwickeln wir die Methoden, welche zur Construction entsprechender Gebilde führen. Wir geben diese Methoden sowohl für die centrische wie die plane Collineation, weil die Dualität nicht in der sonst gewohnten Weise auftritt.

Sind $A_1 A_2$ zwei Punkte des einen Raumes und schneiden die Strahlen CA_1, CA_2 oder $\varrho_1\ \varrho_2$ die Fläche $\mathbf{L}^n$ in den Punkten $L_1^1 \dots L_1^n$, $L_2^1 \dots L_2^n$, so sollen mit $A_1^{1'} \dots A_1^{n'}$, $A_2^{1'} \dots A_2^{n'}$ die entsprechenden zu $A_1\ A_2$ in der Collineation $(C\,\mathbf{L}^n\,\varDelta)$ bezeichnet sein.

Ziehen wir nun die Sehnen, welche je einen Punkt $A_1^{x'}$ mit einem Punkte $A_2^{y'}$ verbinden, so erhalten wir n^2 Linien. Jeder derselben können wir die Verbindungslinie zweier Punkte L in der Weise

Seien $A_1\ A_2$ zwei Ebenen des einen Raumes, welche E in $e_1\ e_2$ schneiden. Durch letztere Linien sollen an $\mathbf{L}_n$ die Tangentialebenen $L_1^1 \dots L_1^n$, $L_2^1 \dots L_2^n$ gehen. $A_1^{1'} \dots A_1^{n'}$ und $A_2^{1'} \dots A_2^{n'}$ seien die entsprechenden zu $A_1\ A_2$ in der Collineation $(E\,\mathbf{L}_n\,\varDelta)$.

Je eine Ebene $A_1^{x'}$ schneidet eine Ebene $A_1^{y'}$. Wir erhalten auf diese Weise n^2 Schnittlinien. Jeder derselben können wir eine Schnittlinie von zwei Ebenen L zuordnen und zwar je der zuordnen, dass der Geraden $A_1^{x'} A_2^{y'}$ die Gerade $L_1^{x'} L_2^{y'}$ entspricht. Sind $B_1 C_1 D_1 \ldots$ und $B_2 C_2 D_2 \ldots$ weitere Punkte auf ϱ_1 resp. ϱ_2, die mit S als Centrum zueinander perspectivisch liegen, so sollen die Geraden durch S die Punkte $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$ auf $\varrho_1 \varrho_2$ verbinden. Dann sind diesen Verbindungslinien in Bezug auf $L_1^x L_2^y$ die Geraden zugeordnet, welche die Punkte $A_1^{x'} A_2^{y'}$, $B_1^{x'} B_2^{y'} \ldots$ verbinden. Wir können beweisen, dass letztere Verbindungslinien durch einen Punkt S^{xy} auf der Geraden CS gehen.

Es ist nämlich nach Construction $(C L_1^n A_1 A_1^{x'}) = \varDelta = (C L_2^y A_2 A_2^{y'})$ d. h. $A_1 A_2$ steht mit $A_1^{x'} A_2^{y'}$ in einer Collineation erster Ordnung. $L_1^x L_2^y$ ist Axe dieser Collineation, C ist das Centrum und $\varDelta$ ist die Charakteristik. In einer Collineation mit derselben Axe, demselben Centrum und der nämlichen Charakteristik stehen aber auch $B_1 B_2$ mit $B_1^{x'} B_2^{y'}$, $C_1 C_2$ mit $C_1^{x'} C_2^{y'}$ u. s. f. Ist dann in dieser Schnittlinie von $A_1^{x'} A_2^{y'}$ die Schnittlinie von $L_1^x L_2^y$.

Sind $B_1 C_1 D_1 ..$ und $B_2 C_2 D_2 ..$ weitere Ebenen durch e_1 resp. e_2, die zu einander perspectivisch liegen mit einer Ebene Σ als Perspectivebene, so sollen sich $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$ in Σ schneiden. Dann sind den Schnittlinien $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$ je in Bezug auf die Schnittlinien von $L_1^x L_2^y$ Gerade zugeordnet, in denen sich die Ebenen $A_1^{x'} A_2^{y'}$, $B_1^{x'} B_2^{y'} \ldots$ schneiden. Wir können beweisen, dass die letzterwähnten Schnittlinien in einer Ebene Σ^{xy} liegen, welche durch den Schnitt von Σ mit E geht.

Es ist nämlich nach Construction $(E L_1^x A_1 A_1^{x'}) = \varDelta = (E L_2^y A_2 A_2^{y'})$ d. h. $A_1 A_2$ steht mit $A_1^{x'} A_2^{y'}$ in einer planen Collineation erster Classe. Die Schnittlinie von $L_1^x L_2^y$ ist Axe dieser Collineation. $\varDelta$ ist ihre Charakteristik und E ihre Leitebene. In derselben Collineation entsprechen sich aber auch die Schnittlinien der Ebenen ser Collineation dem Punkte S der Punkt S^{xy} zugeordnet, so müssen sich die Geraden $A_1^{x'} A_2^{y'}$, $B_1^{x'} B_2^{y'}$ ... in S^{xy} schneiden, was zu beweisen war.

Ist S unendlich ferne in gegebener Richtung gelegen, so muss S^{xy} auf einer Geraden durch C liegen, welche diese Richtung hat.

In diesem Falle gehört zu den Geraden durch S auch diejenige, welche die unendlich fernen Punkte auf ϱ_1 und ϱ_2 verbindet. Die entsprechenden zu letzteren Punkten seien mit $Q_1^{1'}$ ... $Q_1^{n'}$, $Q_2^{1'}$ ... $Q_2^{n'}$ bezeichnet. Dann muss die Verbindungslinie der Punkte $Q_1^{x'}$ $Q_2^{y'}$ ebenfalls durch S^{xy} gehen.

Kennen wir nun $A_1 A_1'$ und somit auch $Q_1^{1'}$, so ergibt sich aus dem Gesagten folgende Regel zur Construction der Punkte, welche einem beliebigen Punkte A_x entsprechen.

Wir bestimmen die Punkte, in welchen CA_x *die Fläche* **Q**$^{'n}$ *schneidet und projiciren dieselben aus* $Q_1^{1'}$ *auf eine* $B_1 B_2$, $B_1^{x'} B_2^{y'}$; $C_1 C_2$, $C_1^{x'} C_2^{y'}$...

Entspricht in dieser Collineation der Ebene Σ die Ebene Σ^{xy}, so müssen sich in derselben $B_1^{x'} B_2^{y'}$, $C_1^{x'} C_2^{y'}$... schneiden.

Steht Σ normal zu E, so gehören zu den Ebenen durch e_1 und e_2 auch diejenigen, welche normal zu E sind. Ihnen correspondirenEbenen, $Q_1^{1'}$ ... $Q_1^{n'}$ und $Q_2^{1'}$ ... $Q_2^{n'}$, welche Tangentialebenen an die unter 4 hervorgehobene Fläche **Q**$^{n'}$ sind. Die Schnittlinie von 2 Ebenen $Q_1^{x'}$ $Q_2^{y'}$ muss nach dem oben bewiesenen auf Σ^{xy} liegen.

Es ergibt sich daraus, wenn wir A_1 und $A_1^{1'}$, also auch $Q_1^{1'}$ kennen, folgende Regel zur Construction der Ebenen, welche einer beliebigen Ebene A_x correspondiren.

Wir bestimmen die Schnittlinie e_x *von* E *mit* A_x *und von* A_1 *mit* A_x. *Durch letztere Gerade legen wir eine Normalebene —* Σ *— zu* E, *welche* E *in* s *schneide. Dann zeichnen wir durch* e_x *die Tangentialebenen an die*

Parallele durch C *zu* $A_1 A_x$. *Ueber der so erhaltenen Reihe von Punkten —* S_{xy} *— bilden wir aus* $A_1^{1'}$ *ein Büschel. Seine Strahlen treffen* C A_x *in den gesuchten Punkten.*

Fläche $\mathbf{Q}'^n$ *und schneiden dieselben mit* $Q_1^{1'}$. *Ueber dem erhaltenen Strahlenbüschel bilden wir aus s das Ebenenbüschel und schneiden dies mit* $A_1^{1'}$. *Wir gelangen auf diese Weise zu einem neuen Strahlenbüschel, das mit* e_x *die gesuchten Ebenen bestimmt.*

6.

Wir wollen diese Constructionsmethoden im Folgenden auf Curven und Flächen anwenden und dabei unsere Erörterungen auf die Collineation $(C\,\mathbf{L}^n\,\Delta)$ beschränken.

a) In der Ebene X durch C *liege eine Curve von der Ordnung m. Ihr entspricht eine Curve der Ordnung* mn — C'^{mn} — *welche in X gelegen ist.*

Wir beweisen diese Behauptung, indem wir auf die in 5 angegebene Weise zu C^m das entsprechende Gebilde construiren. Wir setzen voraus, dass zu A_1 ein entsprechender Punkt — $A_1^{1'}$ — und der zugehörige Punkt $Q_1^{1'}$ bekannt sei. Dann construiren wir den Kegel aus A_1 über C^m und zeichnen den Parallelenkegel — K^{m*} — aus C. Nun projiciren wir die Schnittcurve von X mit der Fläche $\mathbf{Q}^{n'}$ — also eine Curve $n$ter Ordnung — aus $Q_1^{1'}$ und erhalten hierdurch einen Kegel $n$ter Ordnung — K^n. Letzterer und der Kegel K^{m*} durchdringen sich in einer Curve der mnten Ordnung — S^{mn}. Indem wir diese von $A_1^{1'}$ aus auf X projiciren, erhalten wir die Curve, welche in der Collineation $(C\,\mathbf{L}_n\,\Delta)$ der Curve C^m correspondirt. Also ist erstere wirklich von der Ordnung mn.

Bei diesem Constructionsverfahren ist A_1 beliebig gewählt; mithin ist auch $A_1^{1'}$ ein beliebiger Punkt des Raumes. C'^{mn} erscheint daher aus jedem Punkte des Raumes als die Projection der Durchdringungscurve von 2 Kegeln der $m$ten resp. $n$ten Ordnung. Eine solche Curve hat bekanntlich im Allgemeinen keine Doppelpunkte und ihre Developpable ist von der Ordnung $m\,n\,(m+n-2)$. Daraus folgt, dass C'^{mn} keine Rückkehrpunkte besitzt und von der $m\,n\,(m+n-2)$ten Classe ist. Wir kennen also von C'^{mn} drei Charaktere. Somit sind auch die übrigen bestimmt.

b) Sei C^m *eine Curve* m*ter Ordnung in einer Ebene* X*, welche* C *nicht enthält, so entspricht* C^m *in der Collineation* $(C\,\mathbf{L}^n\,\Delta)$ *eine Raumcurve* — C'^{mn} — *von der* $m\,n$*ten Ordnung.*

C'^{mn} wird nämlich erhalten als Durchdringungscurve der Fläche $n$ter Ordnung, welche der Ebene X correspondirt (3), mit dem Kegel K^m aus C über C^m.

c) Sei C^m *eine Raumcurve der* m*ten Ordnung, so entspricht ihr in der Collineation* $(C\,\mathbf{L}^n\,\Delta)$ *eine Raumcurve der Ordnung* $m\,n$.

Wir weisen dies nach, indem wir C'^{mn} auf die in 5 angegebene Weise construiren. Sei wieder $A_1\,A_1^{1'}$ und $Q_1^{1'}$ eine in Bezug auf L_1 zusammengehörige Punktegruppe und sei X eine beliebige Ebene, welche durch C und A_1 geht, so schneidet diese C^m in m Punkten — $P_1 \dots P_m$ —. Diese verbinden wir durch die Linien $a_1 \dots a_m$ mit A_1 und ziehen zu letzteren durch C die Parallelen $a_1^* \dots a_m^*$. Ferner legen wir durch C nach $P_1 \dots P_m$ die Geraden $c_1 \dots c_m$. Jede derselben trifft $\mathbf{Q}_n'$ in n Punkten Q'. Projiciren wir dann aus $Q_1^{1'}$ die n Punkte Q', welche in c_1 liegen, auf a_1^*, so erhalten wir n Punkte S^{xy}. Projiciren wir endlich diese aus $A_1^{1'}$ auf a_1, so gelangen wir zu n Punkten von C'^{mn}.

Es liegen mithin in der Ebene X — also in jeder Ebene durch CA_1 — entsprechend den m Geraden $C\ mn$ Punkte von C'^{mn}. Nehmen wir daher auf CA_1 einen beliebigen Punkt X an und verbinden wir ihn mit den jetzt gefundenen Punkten von C'^{mn}, welche auf den Ebenen durch CA_1 liegen, so erhalten wir einen Kegel von der Ordnung mn.

Nun war $A_1 A'_1 Q_1^{1'}$ eine beliebige zu L_t gehörende Punktegruppe. Nehmen wir daher den Punkt X willkürlich an und bestimmen wir auf der Geraden CX eine solche Punktegruppe, so erhalten wir mit ihrer Hülfe einen Kegel der mnten Ordnung über C'^{mn}. Es wird also C'^{mn} von jedem Punkte des Raumes aus durch einen Kegel der Ordnung mn projicirt. Also ist C'^{mn} selbst von dieser Ordnung.

d) Einer Fläche F^m *der* m*ten Ordnung correspondirt in der Collineation* $(C\,\mathsf{L}^n\varDelta)$ *eine Fläche von der Ordnung* mn — $\mathsf{F}^{mn\prime}$.

Eine beliebige Gerade g trifft nämlich $\mathsf{F}^{mn\prime}$ in mn Punkten; denn die Ebene durch C und g schneidet F^m in einer Curve $m$ter Ordnung. Dieser entspricht eine Curve der Ordnung mn — C'^{mn} — welche mit g mn Punkte gemein hat. Sie sind die Schnittpunkte von g mit F'^{mn}.

Sei F ein Punkt auf F^m und F'_x sein entsprechender in Bezug auf L_x, so ist nach $1: (C L_x F F'_x) = \varDelta$, mithin $(C F L_n F'_x) = 1 - \varDelta$. Wir schliessen daraus:

Ist F'^{mn} *eine Fläche, welche in einer Collineation* $(C\,\mathsf{L}^n\varDelta)$ *der Fläche* F^m *correspondirt, so entspricht auch* F'^{mn} *der Fläche* L^n *in der Collineation* $(C\,\mathsf{F}^m 1 - \varDelta)$ *d. h. wir können die Fläche, zu der wir die entsprechende suchen, mit der Leitfläche* L^n *vertauschen, wenn wir gleichzeitig* $\varDelta$ *in* $1 - \varDelta$ *übergehen lassen.*

Ist speciell F'^n die Fläche, welche einer Ebene P entspricht, so schliessen wir aus dem vorstehenden Satze, dass F'^n mit L^n in einer Collineation erster Ordnung steht, deren Leitfläche P und deren Charakteristik $1-\varDelta$ ist. Das Entsprechen von F'^n und L^n ist dann derart, dass wir F'^n auch als die entsprechende Fläche zu C in einer planen Collineation erster Classe betrachten können, deren feste Ebene P und deren Charakteristik $1-\varDelta$ ist. Daraus folgt, dass die Fläche n ter Ordnung, welche in der Collineation $(C\,\mathsf{L}^n\varDelta)$ einer Ebene entspricht, von derselben Classe ist, wie die Leitfläche dieser Collineation.

Indem wir eine analoge Betrachtung für die in einer Ebene gelegene Collineation $(\mathrm{C\,L}^n\varDelta)$ anstellen, können wir sagen: Die Curve n ter Ordnung, welche in dieser Collineation einer Geraden entspricht, hat dieselben Charaktere wie L^n.

e) Ist F^m ein Kegel mit der Spitze, S so entsprechen dieser n Punkte auf C S. Den Erzeugenden des Kegels correspondiren Curven n ter Ordnung, welche dieselben Charaktere haben wie die Schnittcurven von Ebenen durch $\overline{\mathrm{CS}}$ mit L^n. In jeder solchen Ebene liegen m derartige Curven der Ordnung n, welche durch n feste Punkte auf C S gehen.

f) Ist F^m eine Regelfläche mit den Leitcurven $\mathrm{L}_1^{m_1}$, $\mathrm{L}_2^{m_2}$ $\mathrm{L}_3^{m_3}$ (wobei $m_1 \,.\, m_2 \,.\, m_3 = 2m$ ist), so correspondiren den Geraden von F^m Curven C'^n, deren Charaktere dieselben sind, wie die der Curven, welche eine Ebene durch C und die resp. Geraden aus der Fläche L^n schneidet. Die Curven C'^n treffen die resp. Curven $\mathrm{L}_1'^{m_1 n}$, $\mathrm{L}_2'^{m_2 n}$, $\mathrm{L}_3'^{m_3 n}$, welche $\mathrm{L}_1^{m_1}$, $\mathrm{L}_2^{m_2}$, $\mathrm{L}_3^{m_3}$ correspondiren, je in n Punkten, die auf einer Geraden durch C liegen.

7.

Bei der Construction der im vorhergehenden besprochenen geometrischen Gebilde treten Punkte S^{xy} auf, deren Ort wir für den Fall näher untersuchen wollen, in welchem A_1 ein Punkt des geometrischen Gebildes ist, zu dem wir das correspondirende suchen.

a) Sei C^m eine Curve der m ten Ordnung in einer Ebene X, welche nicht durch C geht und sei A_1 ein Punkt von C^m, $A_1^{1'}$ $Q_1^{1'}$ seien seine zugehörigen in Bezug auf L_1 — so erhalten wir C'^{mn} auf folgende Weise: Wir construiren den Kegel aus C über C^m — K_c^m. Derselbe durchdringt $\mathbf{Q}'^n$ in einer Curve D^{mn}, auf der $Q_1^{1'}$ liegt. Projiciren wir D^{mn} aus $Q_1^{1'}$ auf eine Ebene X^* durch C, welche zu X parallel ist, so wird der projicirende Kegel, dessen Spitze ein Punkt von D^{mn} ist, von der Ordnung $mn - 1$ sein. Also schneidet er X^* in einer Curve S^{mn-1}. Der Kegel über ihr aus $A_1^{1'}$ durchdringt K_c^m in der Curve C'^{mn}, welche C^m in der Collineation $(C\,\mathbf{L}^n\varDelta)$ correspondirt. Die Curve S^{mn-1} ist der Ort der bei dieser Construction auftretenden Punkte S^{xy}. Also liegen diese Punkte in einer Curve der $mn - 1$ ter Ordnung, deren Ebene durch C geht.

b) Ist C^m eine Curve m ter Ordnung, welche in einer Ebene X durch C liegt, so specialisirt sich die in *a)* skizzirte Construction dahin, dass X^* mit X zusammenfällt und dass an Stelle der Kegel ebene Strahlenbündel treten, deren Strahlen in einer ganz bestimmten Zuordnung zu einander stehen. Aus dieser schliessen wir, dass auch in diesem Falle die Punkte S^{xy} auf einer Curve der $mn - 1$ ten Ordnung liegen.

c) Liege A_1 auf der Fläche $\mathbf{F}^m$, zu welcher wir die entsprechende suchen, so können wir zeigen, dass die bei Construction der entsprechenden Fläche — $\mathbf{F}'^{mn}$ — auftretenden Punkte S^{xy} in einer Fläche der $mn - 1$ ten Ordnung — Σ^{mn-1} — gelegen sind. Alle S^{xy} nämlich, welche sich in einer Ebene X durch C befinden, erfüllen eine Curve der $mn - 1$ ten Ordnung. Dies folgt so: Denken wir durch A_1 eine Ebene X^* gelegt, welche zu X parallel ist, so schneidet X^* die Fläche $\mathbf{F}^m$ in einer Curve F^m. Der Kegel über ihr aus C durchdringt $\mathbf{Q}'^n$ in einer Curve D^{mn}, auf welcher sich $Q_1^{1'}$ befindet. Projiciren wir daher D^{mn} aus $Q_1^{1'}$ auf X, so erhalten wir eine Curve der $mn - 1$ ten Ordnung als Ort der Punkte S^{xy} in X.

8.

Handelt es sich darum, von einer Collineation zu einer solchen der gleichen Ordnung (resp. Classe) überzugehen, so gilt folgender Satz, dessen Nachweis sich aus dem in 1 Gesagten leicht ergibt:

Sei gegeben eine centrische Collineation ($C\,\mathbf{L}^n\,\Delta$), *so können wir dieselbe von einem Centrum* C_1 *aus durch eine centrische Collineation erster Ordnung mit einer Leitebene* E *und einer Charakteristik* Δ_1 *transformiren. Dann erhalten wir eine neue centrische Collineation. Sie hat die Charakteristik* Δ. *Centrum und Leitfläche sind die correspondirenden zu* C *und* $\mathbf{L}^n$ *in der Collineation* ($C_1\,E\,\Delta_1$).

Ein dualer Satz gilt für die plane Collineation ($E\,\mathbf{L}_n\,\Delta$).

Versuchen wir eine Transformation einer Collineation n ter Ordnung resp. Classe aus einem Centrum resp. einer Ebene durch eine Collineation p ter Ordnung resp. Classe, so erhalten wir np deutige Beziehungen. Einem Punkte entsprechen np Punkte auf einer Curve p ter Ordnung, welche durch p feste Punkte geht u. s. f. Im Allgemeinen werden derartige Beziehungen nur dann bestimmt sein, wenn wir jenen Curven p ter Ordnung noch $\frac{p(p+3)}{2} - p$

Bedingungen auferlegen. Wir unterlassen es hier auf diese Art von Verwandtschaften näher einzutreten.

9. [9]

Unter den Specialisirungen unserer Collineationen erwähnen wir diejenigen, für welche C unendlich ferne in gegebener Richtung sich befindet (Affinitäten) und diejenigen, für welche E unendlich ferne ist (centrische Aehnlichkeiten).

Ferner heben wir den Fall hervor, in welchem:

C auf L^n liegt

E eine Tangentialebene an L_n ist.

Dann entsprechen

einem Punkte P ausser C noch $n-1$ Punkte. Einer Geraden, einer Ebene, einer Fläche F^m correspondiren resp. eine Curve $n$ter, eine Fläche $n$ter, eine Fläche mn ter Ordnung, welche durch C gehen.

Die Geraden durch C entsprechen sich selbst. Enthält eine Ebene den Punkt C, so entspricht ihr eine Fläche der $n-1$ten Ordnung. Einer Fläche F^m durch C correspondirt eine Fläche der Ordnung $mn-1$.

einer Ebene P ausser E noch $n-1$ Ebenen. Einer Geraden, einem Punkte, einer Fläche F_m correspondiren resp. ein Kegel $n$ter, eine Fläche $n$ter, eine Fläche mn ter Classe, die von E berührt werden.

Liegt eine Gerade in E, so entspricht sie sich selbst. Einem Punkte in E correspondirt eine Fläche der $n-1$ten Classe. Einer Fläche — F_m — welche von E tangirt wird, entspricht eine Fläche der $mn-1$ten Classe.

Schliesslich weisen wir noch darauf hin, dass das Auftreten eines $p$fachen Punktes C resp. einer $p$fachen

Ebene E Specialisirungen veranlasst, welche den letzterwähnten analog sind.

10.

Bis jetzt haben wir stillschweigend angenommen, dass die Elemente der Räume, welche wir in Beziehung setzten, reell seien. Lassen wir diese Annahme fallen, so bedürfen die in 1 gegebenen Definitionen einer erweiterten Intpretation, welche wir im Folgenden für die centrische Collineation $(C\,\mathbf{L}^n\,\Delta)$ durchführen wollen.

Gehen wir von einem imaginären Punkte P_i aus, der auf der reellen Geraden ϱ durch C gelegen ist, so wird P_i durch eine elliptische Involution und durch einen bestimmten Sinn gegeben.*) Paare dieser Involution seien $x\,x_1$, $y\,y_1$. Trifft dann ϱ die Leitfläche $\mathbf{L}^n$ in den n reellen Punkten $L_1 \ldots L_n$, so construiren wir n Punktegruppen $x'y'x_1'y_1'$ in der Weise, dass

$$(C L_n X X_n') = \Delta = (C L_n Y Y_n') = (C L_n X_1 X_1^{n'}) = (C L_n Y_1 Y_1^{n'}).$$

Die Aufeinanderfolge der Elemente in diesen Punktegruppen muss die gleiche sein, wie die der Punkte $X Y X_1 Y_1$. Daher bestimmt jede solche Punktegruppe eine elliptische Involution. Diese definirt zwei imaginäre Punkte. Bezeichnen wir mit P_{in}' denjenigen dieser Doppelpunkte, für welchen der Sinn der definirenden Involution mit dem Sinne der Involution übereinstimmt, durch welche P_i bestimmt ist, so können wir P_{in}' als den correspondirenden zu P_i in der Collineation $(C\,\mathbf{L}^n\,\Delta)$ betrachten. Es sind somit dem imaginären Punkte P_i n bestimmte imaginäre Punkte P_i' zugeordnet.

*) Vgl. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage. Nr. 116.

Trifft eine reelle Gerade ϱ durch C die Fläche $\mathbf{L}''$ in einer Anzahl — sagen wir in p — bestimmten imaginären Punkten und sind zu einem reellen Punkte P auf ϱ die correspondirenden zu finden, so werden p von ihnen bestimmte imaginäre Punkte sein. Wir erhalten sie nach dem in 6 *d*) ausgesprochenen Gesetze der Vertauschung, indem wir zu den p imaginären Punkten die entsprechenden in Bezug auf P suchen. Wir müssen also in einer Collineation (C, P, $1-\varDelta$) zu den reellen Elementen, welche die p imaginären Punkte definiren, die entsprechenden construiren. Diese definiren p imaginäre Punkte P'_i, welche wir als die correspondirenden zu P auffassen.

Endlich untersuchen wir den Fall, in welchem P_i ein bestimmter imaginärer Punkt auf einer Geraden ϱ durch C ist und in welchem ϱ die Fläche $\mathbf{L}''$ in p bestimmten imaginären Punkten trifft. Dann correspondiren im Allgemeinen dem Punkte P_i in Bezug auf die p imaginären Punkte L_i p imaginäre Punkte P'_i. Um dies zu zeigen, schicken wir folgende Bemerkung voraus: Sind P und L_1 zwei reelle Punkte auf ϱ, so erhalten wir bekanntlich einen Punkt P', welcher mit $C L_1$ und P das Doppelverhältniss $(C L_1 P P') = \varDelta$ bildet, indem wir durch C eine beliebige Gerade h ziehen. Auf ihr zeichnen wir zwei Punkte $C_1 C_2$ so, dass $C C_1 : C C_2 = \varDelta$ ist. Ziehen wir sodann durch L_1 eine Gerade h^*, welche parallel zu h ist und schneide h^* die Verbindungslinie $C_1 P$ in P^*, so trifft $C_2 P^*$ die Gerade ϱ in P'. Indem wir annehmen, dass imaginäre Punkte, welche durch eine analoge Construction verbunden sind, ebenfalls ein Doppelverhältniss $\varDelta$ bilden, construiren wir $C_1 P_i$. Dies ist eine imaginäre Gerade erster Art. Sie wird durch die imaginären Geraden h^*, welche durch die Punkte L_i gehen und zu h

parallel sind, in p bestimmten imaginären Punkten geschnitten. Projiciren wir diese aus C_2 auf ϱ, so erhalten wir p imaginäre Punkte P'_i, welche dem imaginären Punkte P_i correspondiren.

Wir sehen aus dem Gesagten, dass unsere Collineation $(C\,L^n\,\Delta)$ auch dann einen bestimmten Sinn hat, wenn L^n eine durch reelle Elemente definirte imaginäre Fläche ist. Wir unterlassen es hier, in diesem Falle auf die allgemeine Correspondenz von Gebilden näher einzutreten.

Zur Geometrie des Imaginären.

Imaginär-Projectionen.

Mit Tafel — Fig. 1.

1.

Sei i eine imaginäre Gerade erster Art mit dem reellen Punkte S. Sie werde durch eine elliptische Strahleninvolution — J — und durch einen bestimmten Sinn gegeben.*) Wir machen i zur Axe einer centrischen Collineation erster Ordnung.**) B sei die Ebene, C das Centrum und Δ die Charakteristik dieser Collineation. Dem entsprechend bezeichnen wir sie mit dem Symbol $(C\,i\,\Delta)$.

Um die Construction entsprechender Elemente der Collineation $(C\,i\,\Delta)$ durchzuführen, senden wir für dieselbe eine räumliche Darstellung voraus. Wir betrachten C als Fusspunkt einer Normalen — c — zur Ebene B und be-

*) Vgl. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage. — Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie, mathematische Annalen, Bd. VIII, p. 145. — Fiedler, Darst. Geometrie, II. Aufl., p. 509 ff.

**) Vgl. meine Abhandlung über centrische und plane Collineation.