Ueber die Büschel gleichseitiger Hyperbeln, den Feuerbach'schen Kreis und die Steiner'sche Hypcycloide

von

Prof. W. Fiedler.

In Gergonne's Annalen von 1821 behandelten die Geometer Brianchon und Poncelet zuerst die gleichseitige Hyperbel nach ihrer Construction aus vier Elementen und gaben dabei unter vielen anderen neuen Ergebnissen den Satz: Die gleichseitigen Hyperbeln, welche durch die Ecken E_1, E_2, E_3 eines Dreiecks gehen, haben den Kreis durch die Mitten M_1, M_2, M_3 der Seiten $E_2 E_3$, .. desselben zum Ort ihrer Mittelpunkte. Sie bemerkten auch, dass alle diese Hyperbeln durch den Schnittpunkt H der Höhenperpendikel $E_1 H_1$, $E_2 H_2$, $E_3 H_3$ des Dreiecks gehen, woraus sich sofort folgern lässt, dass jener Ortskreis die Mitten M_1^*, M_2^*, M_3^* der Strecken $E_1 H$, $E_2 H$, $E_3 H$ enthalten muss. Und da eine Seite des Dreiecks und das von der Gegenecke ausgehende Höhenperpendikel eine specielle dem System angehörige gleichseitige Hyperbel bilden, deren Mittelpunkt der bezügliche Höhenfusspunkt ist, so geht derselbe Kreis auch durch die Höhenfusspunkte H_1, H_2, H_3. Nach den neun Punkten, die man so von ihm kennt, hat man ihn später den Neunpunktekreis genannt. Es ist klar, dass mit seiner Hilfe die Construction der durch vier Punkte 1, 2, 3, 4 gehenden gleichseitigen Hyperbel geleistet werden kann, da man aus den Kreisen für die Dreiecke 123, 124 z. B. den

Mittelpunkt und durch ihn neue Punkte der Hyperbel findet; und dies ist die Art seiner Verwendung bei Brianchon-Poncelet. Ihre Abhandlung ist 1828 und 1843 durch Bobillier und resp. Seydewitz ergänzt und revidirt worden, ohne dass dabei die methodische Stellung des Satzes anders bestimmt worden wäre.

Unabhängig und fast gleichzeitig mit Brianchon-Poncelet bewies in seinem Buche vom geradlinigen Dreieck 1822 Feuerbach von demselben Kreise den merkwürdigen Satz, dass er die vier Kreise berührt, welche die drei Seiten des Dreiecks zu Tangenten haben, nämlich den eingeschriebenen umschliessend und die drei anderen ausschliessend; woraus in Verbindung mit dem vorigen sofort noch folgt, dass er auch die zwölf Kreise berührt, welche die Seiten der Dreiecke $E_1 E_2 H$, $E_2 E_3 H$, $E_3 E_1 H$ zu Tangenten haben.

J. Steiner, der sich auch schon vor 1828 mit diesem Kreise beschäftigte (vergl. Gergonne's Ann. Bd. 19), lehrte ihn als Specialform vom Mittelpunkt-Kegelschnitt der Kegelschnitte eines allgemeinen Büschels auffassen, und es ist in der That bemerkenswerth, wie vollständig er die Charaktere des allgemeinen Falles besitzt: Der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte, welche durch vier Punkte gehen, ist ein Kegelschnitt, welcher die Diagonalpunkte ihres Vierecks — im Specialfalle die Höhenfusspunkte H_1, H_2, H_3 des Dreiecks — und die Mitten ihrer sechs geraden Verbindungsstrecken, die M_i, M_i^* des Specialfalles, enthält. Jedes Paar seiner conjugirten Durchmesser ist den Asymptoten einer im Büschel enthaltenen Hyperbel parallel und seine Axen insbesondere haben die Richtungen der Asymptoten der einzigen gleichseitigen Hyperbel, die durch die vier Punkte geht. Im Specialfalle ist die Rechtwinkligkeit aller Paare conjugirter Durchmesser des Kreises der Ausdruck der besonderen Natur des Büschels von lauter rechtwinkligen oder gleichseitigen Hyperbeln. Selbst die Constructionsregel für den Mittelpunkt des Mittelpunkt-Kegelschnittes erscheint im Specialfall unverändert, wonach er der Durchschnittspunkt der drei geraden Linien ist, die die Mitten der drei Gegenseitenpaare des Vierecks verbinden. Und mit Wiederanknüpfung an den Ausgangspunkt bei Brianchon-Poncelet fügt Steiner 1856 in seiner Abhandlung über eine besondere Curve dritter Classe hinzu, dass die Enveloppe der Asymptoten der gleichseitigen Hyperbeln des Büschels eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung mit zahlreichen merkwürdigen Eigenschaften ist, die dreispitzige Hypocycloide, die Enveloppe der Fusspunktlinien des Dreiecks in seinem umgeschriebenen Kreis. Das ist die Geschichte des Problems.

Ich habe bei anderer Gelegenheit gezeigt, wie alle diese Beziehungen durch den Grundgedanken meiner «Cyklographie», also auf einem Wege elementarer Construction, zusammengefasst werden können.

Ich will heute zeigen, dass ihre systematische Stellung in der projectivischen Theorie der Kegelschnitte sich ebenfalls leicht aus der Construction ableiten lässt und dass von da aus noch einige neue Ergebnisse erhalten werden.

Besonders veranlasst mich dazu der Hinblick auf die entsprechende Behandlung der Sache in Schröter's, auf Grund der Steiner'schen Vorlesungen und Manuscripte veröffentlichtem Werke «Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften», 2. Aufl., p. 233. Dort wird der Satz Brianchon-Poncelet's von 1820 mit Hilfe eines zuerst 1860 von Faure ausgesprochenen und von G. Salmon sofort invarianten-theoretisch d. h. algebraisch-projectivisch begründeten Satzes bewiesen, der so lautet: Der Ortskreis der Scheitel der einem Kegelschnitt umgeschriebenen rechten Winkel wird von allen denjenigen Kreisen rechtwinklig geschnitten, welche Tripel harmonischer Pole des Kegelschnittes enthalten. Für die Kegelschnitte eines Büschels sind daher die sämmtlichen Ortskreise orthogonal zu dem Kreise, welcher ihrem gemeinsamen Tripel harmonischer Pole, dem Diagonaldreieck des Vierecks der Grundpunkte umgeschrieben ist. Für die gleichseitige Hyperbel reducirt sich dieser Ortskreis offenbar auf den Mittelpunkt, und der um das gemeinsame Tripel harmonischer Pole des Büschels von lauter gleichseitigen Hyperbeln oder das Diagonaldreieck $H_1 H_2 H_3$ von $E_1 E_2 E_3 H$ beschriebene Kreis muss, als zu allen diesen unendlich klein gewordenen Kreisen rechtwinklig, durch die Mittelpunkte sämmtlicher Hyperbeln hindurchgehen. Aber einerseits knüpft sich jener Kreis der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangenten nicht an die Erzeugung des Kegelschnittes durch seine Punkte, sondern vielmehr an die Construction desselben durch seine Tangenten an; und anderseits involvirt der auf ihn gestützte Schluss keine Ausdehnung von der gleichseitigen Hyperbel auf beliebige Kegelschnitte eines Büschels, weil er für solche eben nicht der Mittelpunkt, sondern ein wirklicher Kreis ist. Und was die neun Punkte betrifft, so ergeben sich auf diesem Wege weder die Seitenmitten M_1, M_2, M_3, noch die Mitten der Höhenabschnitte M_1^*, . . als dem Mittelpunktsorte angehörig.

Die Methode der projectivischen Construction liefert aber einen völlig directen sehr einfachen Beweis.

Derselbe knüpft sich an die Construction des Kegelschnitte aus fünf Punkten und den an zweien von ihnen durch die übrigen bestimmten projectivischen Strahlenbüscheln. (Vergl. meine «Darstell. Geometrie», 3. Aufl., Bd. I, § 27.) Denn für T, T' als jene zwei und A, B, C als die drei übrigen Punkte, sowie a, b, c als die von T und a', b', c' als die von T' nach ihnen resp. gehenden Strahlen liefern die geraden Verbindungslinien der Punktepaare ab', $a'b$; bc', $b'c$; ca', $c'a$ einen Punkt, nach welchem auch die Tangenten des durch die fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes in T, T' laufen. Insbesondere für T, T' als die unendlich fernen Punkte oder die Asymptotenrichtungen der Hyperbel ist er der Schnittpunkt ihrer Asymptoten oder ihr Mittelpunkt. Und wenn die Hyperbel durch die Punkte A, B, C rechtwinklig sein soll, so dass nur die eine ihrer Asymptotenrichtungen willkürlich gewählt werden kann, weil die andere damit bestimmt ist, so spricht sich diese Construction auch so aus: Man bildet mit A, B; B, C; C, A als Gegenecken drei Recktecke von den bestimmten Seitenrichtungen T, T'; die Verbindungsgeraden der drei neuen Eckenpaare derselben schneiden sich im Mittelpunkt M der gleichseitigen Hyperbel $ABCTT'$. Es ist klar, dass diese drei Geraden sich mit der Veränderung der Richtung T und also T' um die Mitten C_1, A_1, B_1 der Strecken AB, BC, CA resp. drehen; zugleich aber fällt in die Augen, dass die neuen Eckenpaare dieser Rechtecke die über den Strecken AB, BC, CA als Durchmessern beschriebenen Kreise K_C, K_A, K_B durchlaufen. Und wenn wir noch die Relation von Peripherie- und Centri-Winkel über demselben Bogen eines Kreises in der Form aussprechen: Die Sehne eines Kreises dreht sich um ihren einen Endpunkt mit der Hälfte der Geschwindigkeit, welche der Radius ihres andern Endpunktes um den Mittelpunkt hat — so erkennen wir, dass die

Strahlenbüschel um C_1, A_1, B_1, welche durch den Schnitt ihrer entsprechenden Strahlen den Ort der Mittelpunkte M hervorbringen, gleiche entsprechende Winkel von einerlei Drehungssinn haben und dass somit dieser Ort der durch die Seitenmitten gehende Kreis ist.

Dass der Mittelpunktsort eines Kegelschnittbüschels überhaupt ein Kegelschnitt ist, der die Mitten der zwischen den Grundpunkten gelegenen Strecken enthält, kann man übrigens auf analoge Art direct aus der Construction mit Hilfe der durch das Viereck bestimmten Involution auf der unendlich fernen Geraden erweisen.

Dass unser Kreis auch durch die Höhenfusspunkte des Dreiecks geht, folgt nicht nur aus der schon angeführten Bemerkung, dass Seiten und Höhen die drei degenerirten Hyperbeln des Systems bilden, sondern auch direct daraus, dass die Höhenfusspunkte die zweiten Schnittpunkte der respectiven Kreispaare K_B, K_C; K_C, K_A; K_A, K_B sind. Die letzten drei Punkte liefert dann die Einsicht, dass alle dem Dreieck umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln auch durch seinen Höhenschnittpunkt gehen — wovon nachher.

Unsere Entwickelung liefert zugleich die einem bestimmten Punkte M des gefundenen Ortskreises entsprechenden Asymptoten. Man zieht die von M ausgehenden Durchmesser der Kreise K_C, K_A, K_B und erhält in den Seiten der von ihren Endpunkten mit A, B; B, C; C, A resp. bestimmten Rechtecke Parallelen der fraglichen Asymptoten; natürlich genügt die Benutzung eines dieser Kreise. Augenscheinlich erhält man für die Seitenmitten als Mittelpunkte der Systemshyperbeln die Asymptoten resp. parallel den Halbirungslinien der Winkel an den entsprechenden Gegenecken des Dreiecks.

Weiteres erhält man nun aus einer ebenso einfachen neuen Construction der gleichseitigen Hyperbel durch vier beliebige Punkte A, B, C, D. (Vergl. «Darstell. Geom.», 3. Aufl., Bd. I, § 29,8.) Seien A, D die Scheitel der projectivischen Strahlenbüschel, welche dieselbe erzeugen, so sind diese Büschel durch die beiden Strahlenpaare AB, DB; AC, DC und durch die Forderung bestimmt, dass ihre Doppelstrahlen bei sich selbst paralleler Zusammenschiebung an ein Centrum zu einander rechtwinklig sein sollen. Denken wir das zweite Büschel parallel sich selbst nach A verschoben, so erhalten wir z. B. im Kreise K_c durch AB, AC die Punkte B', C' und durch die Parallelen aus A zu DB, DC die Punkte B'', C'' und der Schnittpunkt der Geraden $B'C''$, $B''C'$ ist nothwendig ein Punkt P der Geraden, welche aus K_c die Punkte ausschneidet, nach denen die Doppelstrahlen gehen; so dass, wenn diese zu einander rechtwinklig sein sollen, jene Gerade nur der durch den Punkt P gehende Durchmesser PC von K_c sein kann. In unserem Falle ist sein zweiter Schnittpunkt mit dem Ortskreise des Dreiecks ABC, welcher ja als ersten Schnittpunkt C_1 enthält, schon der Mittelpunkt der gewünschten Hyperbel und man erhält nach dem Vorigen zugleich ihre Asymptoten parallel den Doppelstrahlen.

Wenn der vierte Punkt D aber mit dem Höhenschnittpunkt H des Dreiecks der drei übrigen zusammenfällt, was zur Folge hat, dass jeder der vier Punkte der Höhenschnitt des Dreiecks der drei andern ist, so sind AB und die Parallele durch A zu HC und wiederum AC und die Parallele durch A zu BH rechtwinklig zu einander, die zugehörigen Sehnen im Hilfskreis K_c sind zwei Durchmesser desselben, ihr Schnittpunkt P ist also sein Mittelpunkt C_1 selbst, und jede durch ihn gehende Gerade ist ein Durchmesser und liefert zwei zu einander rechtwinklige Doppelstrahlen; oder die Asymptoten aller durch A, B, C, H gehenden Hyperbeln sind rechtwinklig zu einander. In Folge dessen gehört auch der Ortskreis ihrer Centra in gleicher Weise zu den Dreiecken ABC, BCH, CAH, ABH.

Wählt man aber den vierten eigentlich fünften Punkt speciell in einem der Mittelpunkte der das Dreiseit ABC berührenden Kreise, so wird der zugehörige Hyperbelmittelpunkt im Ortskreis zugleich der Berührungspunkt derselben mit dem entsprechenden berührenden Kreise des Dreiseits ABC. Immer ist der zum rechten Winkel der Asymptoten gehörige Durchmesser im Ortskreis parallel dem Durchmesser der zugehörigen Punkte im umgeschriebenen Kreis, d. h. derjenigen, welche die Asymptoten zu Fusspunktlinien haben.

Damit ist der ganze Bereich des Satzes wieder durch projectivische Constructionen umschrieben.

Zu der neuen Construction der Hypocycloide mit drei Spitzen aus den Paaren ihrer rechtwinkligen Tangenten durch die Punkte des Hauptkreises mag noch bemerkt werden, dass dafür der Kreis K_c nicht eigentlich gebraucht wird. Die Hypocycloide ist bestimmt durch ihren Hauptkreis, einen Punkt C_1 seiner Peripherie und eine durch diesen gehende Gerade g; für jeden Punkt M des Hauptkreises als Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel sind die Asymptoten parallel den Halbirungslinien der von der Geraden MC_1 mit g gebildeten Winkel und für gegebene Asymptotenrichtungen liefert der durch C_1 gehende zweite Schenkel des Winkels mit g, der sie zu Halbirungsrichtungen hat, den Mittelpunkt M auf den Hauptkreis. Man sieht daraus, dass für die drei Punkte des Hauptkreises, welche die Bögen zwischen dem zweiten Endpunkt des Durchmessers von C_1 und dem zweiten Schnitt mit g dreitheilen, die Hyperbelasymptoten je zum Durchmesser und zur Tangente des Kreises werden; erstere offenbar die Tangenten in den drei stationären Punkten der Enveloppe und die Normalen in ihren Berührungspunkten mit dem Kreise oder ihren Scheiteln. Das Gesetz der Berührungspunkte der Hyperbel-Asymptoten mit ihrer Enveloppe ergibt sich dahin, dass der zweite Schnittpunkt jeder Tangente eines Paares mit dem Hauptkreis die Mitte zwischen ihrem Berührungspunkt und dem Schnittpunkt des Paares ist; so dass die Rückkehrpunkte der Curve auf dem concentrischen Kreis vom dreifachem Radius liegen. Denn von jenen Scheiteldurchmessern aus können die Asymptoten für jeden Mittelpunkt auch nach dem Gesetze bestimmt werden, dass ihre Endpunkte im Hauptkreise sich mit Geschwindigkeiten im Verhältniss 1:2 nach entgegengesetzten Seiten um den Mittelpunkt desselben drehen. Für jeden der imaginären Kreispunkte im Unendlichen ergibt sich die unendlich ferne Gerade, so dass diese in beiden Kreispunkten die Curven berührt. Die Ecken A, B des Dreiecks ABC in g sind zur Bestimmung der Hypocycloide nicht erforderlich; wählt man sie in gleichen Abständen von C_1 so, dass der eine im Innern des Hauptkreises liegt, so ist die dritte Ecke C des Dreiecks reell und zweideutig bestimmt, weil auf der im zweiten Schnittpunkt von AB mit dem Hauptkreis aufstehenden Höhe so gelegen, dass ihre Verbindungsgerade mit B in jenem halbiert wird. Man hat A^*, B^* als Schnitte des Hauptkreises mit K_c und erhält H und C in AA^* und AB^* auf der Senkrechten zu AB in C_1. Jeder der zwei so erhaltenen

Punkte C, H ist der Höhenschnitt des Dreiecks der drei andern, H von ABC und C von ABH. Wird aber B ausserhalb des Hauptkreises gewählt, so werden C und H nicht reell, ohne dass die Construction irgend welche Beschränkung erlitte. Wir wollen von diesem zweiten Hauptfalle sogleich noch eingehender sprechen, nachdem der Grenzfall erwähnt ist, in welchem das B auf der Peripherie des Hauptkreises liegt und somit das Dreieck ABC bei B rechtwinklig ist. Dann fallen die Fusspunkte der Höhen aus C und A und daher auch der Höhenschnitt H nach B und weil die Verbindungslinie von B mit H die zu AB gehörige Höhe ist, so hat man einerseits den Satz, dass die einem rechtwinkligen Dreieck umgeschriebene gleichseitige Hyperbel immer die zur Hypothenuse gehörige Höhe zur Tangente in der Ecke des rechten Winkels hat; und man erhält ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch A, B, C die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit fester Tangente in der Ecke des rechten Winkels; die zu dieser Ecke als Punkt des Hauptkreises gehörige Hyperbel ist das Paar der Katheten und repräsentirt zwei der degenerirten Hyperbeln im Büschel. Man sieht aber sofort, dass durch zwei beliebige Punkte A, B und die Tangente t des einen B — in der dann C dem B unendlich nahe ist, auch ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln bestimmt sein muss; der vierte ihnen gemeinsame Punkt ist der Höhenschnitt des Dreiecks ABC, also der Schnittpunkt des von A auf t gefällten und des in B auf AB errichteten Perpendikels und der Poncelet-Feuerbach'sche Hauptkreis wird noch immer durch fünf verschiedene Punkte bestimmt. Mittelpunkt und Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel durch zwei Punkte mit gegebenen Tangenten bestimmen sich darnach sehr einfach. Weiteres für diesen Grenzfall zu wiederholen ist unnöthig.

Wenn aber die beiden Grundpunkte C und H des Büschels der gleichseitigen Hyperbeln conjugirt imaginär sind, so liegen sie auf einer rellen zu AB rechtwinkligen Geraden und werden durch eine elliptische Involution bestimmt, die wir durch ihren Mittelpunkt und ihr symmetrisches Paar gegeben denken. (Das letztere oder die Potenz der Involution ist, wie leicht ersichtlich, nicht willkürlich; aber da nur der Mittelpunkt, der jene in der That bestimmt, gebraucht wird, so haben wir nicht dabei zu verweilen.) Verbinden wir diesen Mittelpunkt mit der Mitte der Strecke AB durch eine Gerade, so ist diese und die so in ihr bezeichnete Strecke ein Durchmesser des Hauptkreises, der überdiess durch den Schnittpunkt C_1 von AB mit CH gehen muss. Man sieht, dass unsere Constructionen auch dadurch in keiner Weise alterirt werden; der Hauptkreis ist der Mittelpunktsort; für jeden Mittelpunkt werden die Asymptoten wie vorher erhalten und mit diesen genügt schon ein Punkt A oder B der gleichseitigen Hyperbel zu ihrer Construction.

Man darf nun aber nicht schliessen, dass auch A und B conjugirt imaginär sein könnten, weil von zwei zu einander rechtwinkligen Geraden wenigsten die eine von jeder in ihren Ebenen gelegenen gleichseitigen Hyperbel in zwei reellen Punkten geschnitten werden muss. Aus demselben Grunde müssen sich auch zwei gleichseitige Hyperbeln in der nämlichen Ebene mindestens in zwei reellen Punkten schneiden. Es gibt also keine Büschel gleichseitiger Hyperbeln mit vier nicht reellen Grundpunkten, sondern nur solche Büschel mit vier resp. zwei reellen

Grundpunkten. (Den allgemeinen Satz, dass der Mittelpunkt-Kegelschnitt eines Büschels mit nicht reellen Grundpunkten stets eine Hyperbel ist, brauchen wir nicht heran zu ziehen.)

Wir können dies noch durch eine andere nützliche Constructionsbetrachtung erläutern. (Vergl. «Darstellende Geom.», 3. Aufl., Bd. I, § 33, 20.) Wenn man ein Büschel von Kreisen so projicirt, dass die Bilder aller Kreise gleichseitige Hyperbeln werden, so bilden diese ein Büschel mit zwei imaginären und zwei reellen Grundpunkten, wenn die Kreise zwei reelle Schnittpunkte hatten; sie würden ein Büschel von lauter imaginären Grundpunkten bilden für ein Büschel von Kreisen ohne reelle Schnittpunkte. Aber man sieht leicht, dass im letzteren Falle jene Abbildung nicht reell ausgeführt werden kann. Denn für das Büschel der Kreise als Original fordert dieselbe für eine Gerade als Gegenaxe r der centrischen Collineation die Bestimmung des Centrums $\mathfrak{C}$ in der Art, dass von ihm aus die Paare ihrer Schnittpunkte mit Kreisen des Büschels durch rechtwinklige Strahlenpaare projicirt werden, weil diese die Asymptotenrichtungen der aus den schneidenden Kreisen entstehenden Hyperbeln liefern. Solche Centra $\mathfrak{C}$, C^* besitzen aber nur die elliptischen Involutionen — nämlich in den Schnittpunkten der über den Sequenten und zweier beliebiger Paare als Durchmessern beschriebenen Kreise; da ein Kreisbüschel ohne reelle Grundpunkte von allen Geraden seiner Ebene und ein Kreisbüschel mit zwei reellen Grundpunkten von allen den Geraden seiner Ebene, die nicht zwischen den letzteren hindurchgehen, in hyperbolischen Involutionen geschnitten wird, so ist jene Abbildung bei Kreisbüscheln mit imaginären Grundpunkten nicht möglich und ergibt sich bei denen mit zwei reellen

Grundpunkten nur für diejenigen Gegenaxen r, die die Potenzlinie zwischen den Grundpunkten treffen. Lässt man in einer solchen Geraden beide Gegenaxen q', r zusammenfallen, so ist die bezügliche centrische Collineation vollkommen bestimmt (Charakteristik $\Delta = -1$); ihre Axe s geht für $\mathfrak{C}$ als Centrum durch $\mathfrak{C}^*$ und das Bild der Potenzlinie mit den Bildern $1'$, $2'$ der beiden reellen Grundpunkte 1, 2 des Kreisbüschels ist das auf ihr im Durchschnitt mit der Potenzlinie errichtete Perpendikel, weil $\mathfrak{C}$ in dem Perpendikel auf $q'r$ in ihrem Schnitt mit der Potenzlinie liegt. Die gerade Strecke zwischen diesem Punkte und dem Halbirungspunkte der Strecke $1'\,2'$ ist ein Durchmesser des Ortskreises der Mittelpunkte für das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welches das Kreisbüschel abbildet; natürlich bilden die Geraden q', r und $1'\,2'$ die einzige reelle degenerirte Hyperbel des Büschels. (Auf die weiteren nützlichen Verwendungen dieser Ableitung von Kegelschnittbüscheln aus Kreisbüscheln sei nur hingewiesen.)

Es ist oben in zwei Formen, nämlich für den Kreis als Ort und für die Hypocycloide mit drei Spitzen als Enveloppe die Erzeugung durch zwei Drehungen mit Winkelgeschwindigkeiten im Verhältniss 1 : 2 (für jenen bei gleichem, für diese bei entgegengesetztem Sinn) ausgesprochen worden. Und ich will zum Schluss bemerken, dass solche Drehungen mit proportionalen Winkelgeschwindigkeiten in mannichfacher Weise — in der Ebene z. B. mit Strahlenbüscheln, im Raum von drei Dimensionen mit Ebenenbüscheln zur Erzeugung von ebenen Curven (als Orten und Enveloppen), von Regelflächen und doppeltgekrümmten Curven verwendet werden können. Ich habe diese Erzeugungsweise schon 1878 näher untersucht und sie nicht uninteressant gefunden.