# Ueber Masszeichen.

Von

**Fr. Graberg.**

---

Die gegenseitige Abhängigkeit zwischen Lagen- und Grössenverhältnissen der Elemente (Punkte, Linien, Flächen) von Raumgestalten wird durch Messung ermittelt. Unter dieser ist nicht nur das Anlegen eines Massstabes zu verstehen, sondern auch die Vergleichung durch das Augenmass, sowie die Ableitung logischer Schlüsse aus gegebenen Voraussetzungen, sofern diese Schätzungen und Schlüsse auf directe Messungen sich stützen. In dieser Abhängigkeit mögen desshalb Lagen- und Grössenverhältnisse von Raumgestalten als Massverhältnisse zusammengefasst werden.

Die Raumerkenntniss hat Raumgestaltung zum Zweck. Damit diese letztere stetig und sicher von statten gehen könne, müssen directe Messung, Schätzung durch Augenmass und logische Schlüsse sich gegenseitig unterstützen. Die Schätzung durch das Augenmass ist optischen Täuschungen unterworfen, welche directe Messung und logische Schlüsse berichtigen. Anderseits können diese jeweilen nur einzelne Massverhältnisse feststellen, während das Auge das Ineinandergreifen der Gebilde und den Zusammenhang der Massverhältnisse überschaut. Das messende Zeichnen setzt diese gegenseitige Unterstützung des Schätzens und Schliessens in Wirksamkeit, wenn man sich gewöhnt, Richtungen und Entfernungen zu schätzen, ehe man sie zeichnet und stets bedacht ist, den kürzesten Weg zum

Ziele zu finden. Dabei nehmen die Zeichnungen nach und nach typischen Charakter an, indem sie sich als Normen der Schätzung erweisen, Zeichen der Massverhältnisse werden. Solche nennen wir Masszeichen.

Die Theilstriche eines Massstabes oder Theilkreises bezeichnen die Grenzen gleicher Längenabschnitte oder Winkel.

Jede Linienverbindung in der Ebene stellt verschiedene Massverhältnisse dar, welche für alle gleichartigen Linienverbindungen gelten.

Die volle Bedeutung der Masszeichen wird aber erst erkannt, wenn man Linienverbindungen der Ebene als Symbole für Massverhältnisse räumlicher Gestalten auffasst. Von dieser Anschauungsweise möge das Folgende einige Beispiele zeigen.

---

## *I. Masszeichen 1. Grades.*

Wenn man eine gewöhnliche Zeichnung anschaut, so hält man die Augen in deutlicher Sehweite (ca. 20 cm) von der Bildfläche, uud verfolgt mit den beiden Fixationspunkten derselben die Richtungen der Linien. Die Erhebungen oder Vertiefungen einzelner Punkte von der Zeichenebene stellt man sich dabei senkrecht zu dieser vor und schätzt deren Betrag theils durch directe Vergleichung, theils mittelst Gesammtvorstellungen der Linien, Flächen, Körper. Wird die letztere Bestimmungsweise vielfach angewendet, so tritt dadurch die Vorstellung der Bildebene in den Hintergrund, wir denken nur noch an die Raumgestalten. Diese Elimination der Bildebene wollen wir nun bewusst vollziehen. Dabei wird die Normale zur Zeichenebene Gestalten ersten Grades: Gerade und Ebene, in einem Punkte treffen, jeder Punkt der Zeichnung desshalb nur einen Punkt im Raume bedeuten. Ein solches Massnetz wird daher vom 1. Grade sein. Analog sind Massnetze von Flächen und Linien 2. Grades ebenfalls vom 2. Grade u. s. w.

Zur Einführung in diese Anschauungsweise mögen zunächst einige Masszeichen 1. Grades betrachtet werden.

Zeichen 1. Collineare Dreiecke. $(A)$ sei der Spurpunkt einer Geraden $|a|$, welche in der Lotebene durch $|a|$ beliebige Richtung hat. — $(B)$ sei der Schnitt der Spurlinien $|\beta_1, \beta_2|$ zweier Ebenen $[\beta_1, \beta_2]$, welche sich in $|b|$ schneiden, so dass $(B)$ zugleich Spur von $|b|$ in der Tafel ist. — Trifft $|a|$ die $[\beta_1]$, so ist der Schnittpunkt von $|a|$ in $[\beta_2]$ eindeutig bestimmt, denn jede Ebene $[\alpha_i]$ eines Büschels um $|a|$ wird $|b|$ in einem bestimmten Punkte $(b_i)$ kreuzen, durch welchen die Schnittlinie der Ebenen $[\alpha_i, \beta_2]$ geht, und jene Gerade bezeichnet auf $|a|$ den fraglichen $(a_2)$. Um zu kürzen, sollen in Zukunft die Schnittelemente zwischen die durch Klammern unterschiedenen schneidenden Elemente gestellt werden. Man entnimmt so dem Zeichen 1. die Formeln:

$$[a\alpha_1]\; a_1\, \beta_{11}\, b_1\; [\beta_1 b]; \quad [a\alpha_1]\; b_1\; |b|; \quad [a\alpha_1]\; \beta_{21}\, b_1\; [\beta_2 b]; \quad |\beta_{21} b_1|\; a_2\; |a|$$

welche man kürzer und übersichtlicher schreiben kann:

$$[\beta_1 b]\; a_1\, \beta_{11}\, b_1\; [a\alpha_1]\; \beta_{21}\, b_1\, a_2\; [\beta_2 b]$$

Fasst man das ganze Ebenenbüschel in's Auge, dessen Axe $|a|$, bezeichnet die Punkte der Lotebene durch diese Axe mit dem Index $o$, so wird die collineare Lage der Dreiecke in den Ebenen $[\alpha_i]$ durch die Massverhältnisse in folgender Form ausgedrückt:

$$A\; |B\, \beta_{10}\, \beta_{11}\, \beta_{12}|\; a_1\; |B\, b_0\, b_1\, b_2|\; a_2\; |B\, \beta_{20}\, \beta_{21}\, \beta_{22}|\; A$$

Zeichen 2. Reciproke Gerade und Ebene. Wir gehen wieder von $|a|$ und $[\beta_1 a_1, \beta_2 a_2]$ aus und erhalten zunächst $|Bb_1|$ als Schnitt der genannten Ebenen. Nun ist durch $[a_1 \beta_2, a_2 \beta_1]$ ein zweites Ebenenpaar bestimmt, welches $|Bb_2|$ zum Schnitte hat. Zieht man in $[a\alpha]$ die Diagonale $|b_1 b_2|$ des Vierecks $(a_1 a_2 b_1 b_2)$, so zeigt das harmonische Verhältniss $|\beta_1 \beta_2 A \gamma| = -1$, dass für alle Punktepare der Reihen $|a_1 a_3 a, a_2 a_4 A|$ die entsprechenden Schnitte $B|b_1 b_3 a_3, b_2 b_4 \gamma|$ Strahlen des Büschels $(B)$ in $({}^1\gamma)$ sind. Das reciproke Entsprechen zwischen den Punkten von $|a|$ und den Strahlen von $[\gamma]$, respective den Schnitten entsprechender Ebenen der Büschel um $|\beta_1, \beta_2|$ fassen wir in folgende Massverhältnisse zusammen:

$$|A a a_1 a_2| \, \beta_1 \, |\gamma a b_1 b_2| \, \beta_2 \, |A a a_2 a_1| = -1.$$

Zeichen 3. Schneidende durch einen Punkt und 2 windschiefe Gerade. $(A_1, A_2)$ sind die Spuren der windschiefen $|a_1, a_2|$, welche von $|b|$ in $(b_1)$ über, in $(b_2)$ unter der Bildebene getroffen werden, sich gegenseitig aber nicht schneiden. Durch $(C)$ in beliebiger Höhe über derselben zieht man $|Cb_1, Cb_2|$. Trifft $|Cb_1|$ die Tafel in $(c_1)$, so liegt der Spurpunkt $(c_2)$ von $|Cb_2|$ in der Spur $|Bc_1|$ von $[bC]$. Die Spuren $|c_1 A_1, c_2 A_2|$ von $[Ca_1, Ca_2]$ schneiden sich in $(D)$, welcher Spur des Schnittes von $[Ca_1, Ca_2]$ ist und die Richtung der $|a_1, a_2|$ Schneidenden bestimmt. Dieser Vorgang lässt sich in der Formel zusammenfassen:

$$[Cb] \, Cb_1 \, [a_1 C] \, CD d_1 d_2 \, [a_2 C] \, Cb_2 \, [Cb].$$

Ein Ebenenbüschel, dessen Axe $|a_1|$, schneidet $[Ca_2, Cb]$ in den Büscheln $(d_1, b_1)$, welche $|Cb_2|$ zum perspectivischen Schnitte haben.

Zeichen 4. Windschiefes Vierseit. $|a_1, a_2|$ sind ein Par windschiefe Gerade, welche von einem zweiten solchen Pare $|b_1, b_2|$ in $(c_1 c_2, d_1 d_2)$ getroffen werden. Die Spuren der Ebenen $[a_1 b_1, a_2 b_2]$ schneiden sich in der Spur $(D)$ ihres Schnittes $|d_1 d_2|$; zugleich ergibt sich $[a_1 b_2] c_1 C c_2 [a_2 b_1]$. Durchläuft $(D)$ den Schnitt $|d_1 d_2|$, so bewegt sich dieser in seiner Lotebene, mithin beschreiben $|a_1 a_2|$ Strahlbüschel $(A_1, A_2)$ in ihren Lotebenen, desgleichen bewegen sich $|b_1, b_2|$ und mit ihnen $|c_1 c_2|$, in deren Richtung stets $(C)$ verbleibt. Eine allgemeinere Richtungsänderung der Seiten $|a_1 a_2 b_1 b_2|$ des windschiefen Vierseits wird erzielt durch Annahme eines beliebigen Projectionscentrums $(E)$, das sich überdiess in einer Ebene des Büschels $|CD|$ verändern kann, während die 6 Spurpunkte $(A_1 A_2, B_1 B_2, CD)$ fest bleiben und das Zeichen vom ersten Grade ist, indem jedem Punkt der Bildebene je nur ein bestimmter Punkt seines Lotes entspricht. Treffen $|Ec_1, Ed_1|$ die Tafel in $(e_2, e_3)$, so sind $|Ce_2, De_3|$ die Spuren von $[Ec, Ed]$, ihr Schnitt $(F)$ die Spur von $|Ec_3 d_3|$. So lange sich $(E)$ auf $|EF|$ bewegt, beschreiben die Spuren von $[Ea_1, Ea_2, Eb_1, Eb_2]$ Strahlbüschel zwischen den unveränderlichen Spuren von $[Ec, Ed]$, in welchen überdiess einem der Strahlbüschel ($C$ oder $D$) eine willkürliche Drehung zugeschrieben werden kann. Verändert $(E)$ seine Lage auf einem Strahle $|Ee_s|$ des Büschels $(E)$ in $[ECD]$, so verschieben sich $(e_3, e_2)$ auf den Spuren $|e_s e_2, e_s e_3|$ von $[e_1 b_2, e_1 b_3]$ und die Spurlinien $|Ce_3, De_2|$ von $[E'c, E'd]$ beschreiben projectivische Büschel, deren Schnitt bestimmt ist durch: $(B_1 C, e_s e_2; B_1 D, e_s e_3)$

Zeichen 5a. Parallelepiped aus 3 windschiefen Geraden. Die windschiefen Geraden $|a_1, a_2, a_3|$ werden von $|b|$ in $(b_1, b_2, b_3)$ getroffen. Die Parallelen $|a_1', a_2'|$ durch $(b_2)$ bestimmen mit $|a_2|$ die Parallelebenen $[a_2'' a_1, a_2'' a_3]$, unter sich $[a_1' a_3'] \parallel |a_1 a_3|$. Dann ergibt das Zeichen zunächst:

$$[a''_1 a_2]\,1\,[a''_1 a_2];\ [a''_3 a_2]\,3\,[a''_3 a_1];\ [a''_2 a_3]\,2\,[a''_2 a_1]$$

Da $[2\,a_3, a_1\,3] \parallel |a_3|$, so ist Schnitt $|a_{12}| \parallel |a_3|$ und analog erhält man weitere 5 Kanten, welche mit $|a_1, a_2 a_3\;1\,2\,3$ das Parallepiped bestimmen. Die Parallelogramme $|A_3 A_3'' a_{12}\, a_{26}, A_1' A_1''\, a_{32}\, a_{23}|$ ergeben im Durchschnitt ihrer Diagonalen den Mittelpunkt $(M)$.

Verschiebt sich die Spur $(B)$ in der Richtung $|b|$, so drehen sich $|a_1, a_2, a_3|$ in ihren Lotebenen. Da nun in diesem Falle die Spuren $|A_1 B, A_3 B|$ von $[a_1 b, a_3 b]$ perspectivische Strahlbüschel beschreiben, und $|b, a_1'', a_3''|$ in $(b_2)$ zusammentreffen, so schliessen wir nach Netz 1, dass $|a_1'' a_3''|$ durch einen festen Punkt auf $|A_1 A_2|$ geht.

Zeichen 5b. L o t e b e n e d e r M i t t e l p u n k t e. Netz 5a zeigt $(M)$ als Mittel der Diagonale $|A_3' A_3''|$. Wenn bei der Verschiebung der Spur $(B)$ in Richtung $|b|$, die Ecke $(A_3'')$ eine Gerade durchläuft, so wird $(M)$ in einer zu dieser Parallelen fortschreiten. $(A_3'')$ ist der Schnitt von $|1, 3|$, welche nach dem Obigen bestimmt werden nach den Formeln:

$$[a''_1 a_2]\,1\,[a''_1 a_3];\;\; [a_3 \parallel a_2]\,3\,[a_3 \parallel a_1]$$

Die Spuren $|A_3\,1, A_1\,3|$ gehen somit durch den unendlich fernen Punkt, die Flucht, von $|a_1' a_2'|$; ebenso gehen $|1, 3|$ entsprechend durch die Flucht von $|a_1, a_3|$. Ersetzen wir die Fluchtlinie der Zeichenebene durch eine Transversale $|F_1 F_2|$, so ergibt sich mit einigen Aenderungen, die sofort erklärt werden sollen, Zeichen 5b. $|a_1, a_3|$ sind ausser ihren Fluchten $(F_1, F_2)$ für die Betrachtung ohne Belang, sie fehlen aus diesem Grunde; dafür entsprechen $|b_3 F_1, b_3 F_2|$ den $|a_1', a_3'|$. $(A)$ ist der Schnitt $(A_1 A_2, a_1' a_2')$, Mittelpunkt eines Strahlbüschels, wenn $(B_1)$ die Reihe $|b|$ durchläuft. Nun ergibt das Zeichen die Massverhältnisse:

$$\frac{|F f_0 f_1 f_2|\; A\; |a_1^* a_1 a_{11} a_{13}|\; A_3\; |F a_1 c_1 c_3|\; A_1\; |F f_0 f_1 f_2| \qquad |F f_0 f_1 f_2|\; A\; |a_2^* a_2 a_{22} a_{24}|\; A_3\; |F a_2 c_2 c_4|\; A_2\; |F f_0 f_1 f_2|}{A_1\; |F a_1 c_1 c_3|\; F_2\; |X B_1 x_1 x_2|\; F_1\; |F a_2 c_2 c_4|\; A_2}$$

$|Fa_1 c_1 c_3, Fa_2 c_2 c_3|$ sind allerdings Curven 2. Grades, da sich indessen zeigt, dass auch $(A_1 F_1, A_2 F_2)$ auf denselben liegen, so sind die Strahlbüschel mit ihnen in perspectivischer Lage und die Punktreihen dürfen daher gleich Geraden behandelt werden.

Vorstehende Betrachtung zeigt uns die Büschel $(F_1, F_2)$ in perspectivischer Lage; in solcher bleiben dieselben auch, wenn sie auf der Fluchtlinie der Zeichenebene liegen. Daraus folgt, dass in Zeichen 5a sowohl $(A_3'')$ als der Mittelpunkt des Parallelepipeds in der Zeichnung gerade Linien beschreiben, welche wir als Lotebenen aufzufassen haben, wenn über die Höhenverhältnisse keine weiteren Bestimmungen festgesetzt sind.

---

## *II. Masszeichen 2. Grades.*

Die Masszeichen 2. Grades entstehen im Allgemeinen dadurch, dass 2 in derselben Lotebene liegende Elemente sich decken und desshalb die Punkte der Zeichenfläche in zweifachem Sinne gedeutet werden können. Der Gang der Betrachtung entscheidet alsdann darüber, welcher von den beiden übereinander liegenden Punkten im einzelnen Falle gelten soll.

### A. Kernfläche.

Als einfaches Beispiel dieser Art möge das Masszeichen zweier projectivischer Regelscharen dienen. Schneidet nämlich eine Ebene $[a_1 x]$ des Büschels $|a_1|$ zwei Gerade $|a_2, a_3|$, welche zu $|a_1|$ wie auch unter sich windschiefe Lage haben, in $(a_{2x}, a_{3x})$, so wird $|a_{2x} a_{3x}|$ auch $|a_1|$ in $(a_{1x})$ treffen. Die Punktreihen $|a_{2x}, a_{3x}|$ liegen im gleichen Ebenenbüschel $|a_1|$, sind desshalb projectivisch.

Durch jeden $(a_{2x})$ geht nur 1 Strahl, welcher $|a_1, a_3|$ zugleich schneidet; ein Ebenenbüschel $|a_1|$ perspectivisch zur Reihe $|a_{3x}|$ ergibt daher dieselben Strahlen $|a_{3x} a_{1x}|$ wie das vorige Ebenenbüschel $|a_1|$. Die Geraden $|a_{2x} a_{3x}|$ bilden eine Schar windschiefer Strahlen $|b|$, welche zu Axen von projectivischen Ebenenbüscheln gewählt, die Schar windschiefer Strahlen $|a|$ erzeugen. Diese Strahlen $|a, b|$, welche sich parweise schneiden, bilden den Kern des Massnetzes; sie mögen desshalb, zur Unterscheidung von den übrigen Geraden des Raumes, Kernstrahlen heissen.

Bestimmen wir zunächst in den Zeichen 6 und 7 die Lage der Kernstrahlen.

Im Zeichen 6 sind 3 der windschiefen Strahlen $a$ gegeben nach den Richtungen ihrer Lotebenen, ihren Spuren $(A_1, A_2, A_3)$ in der Zeichenebene entsprechend, seien sie unterschieden als $|a_1, a_2, a_3|$. Gibt man dazu einen Strahl der Schar $b$ durch Richtung und Spur $(B)$, so ist das Netz eindeutig bestimmt, indem durch Feststellung der Höhe eines Punktes der gegebenen Geraden die Lage dieser und zugleich der 3 übrigen gegeben wäre. — Man findet nun weitere Kernstrahlen der Schar $b$ nach der Formel:

$$[a_2 b]\, b_1 b_4\, [a_1 x y]\, b_1 b_5\, [a_3 b]$$

Die Spur $(B_{45})$ liegt im Schnitte $|b_4 b_5|$ mit der Spur $|A_1 x y|$. Im vorliegenden Zeichen ist auch der Kernstrahl $|A_3 b_6|$ eingetragen, welcher durch $[a_1 A_3]$ bestimmt wird und mit $|a_3|$ die Spur gemein hat. Offenbar bestimmt alsdann $|b_3 b_6| s_3 |B A_2|$ die Spur $|A_3 s_3|$ der Ebene aus den Kernstrahlen $|a_3, b_3^*|$; der Kernebene $[\alpha_3]$.

Man macht sich von der anfänglichen, willkürlichen Bildebene ganz unabhängig, wenn man eine Kernebene $[a_1 b_1]$ zum Zeichenfelde wählt, welche beliebige Lage zur Bildebene haben kann, da vermöge der Affinität der Parallelprojection die Massverhältnisse ähnlich bleiben. Wie das Zeichen 7 zeigt, findet man bei dieser Annahme die Spuren der Kernstrahlen $|a|$ sämtlich auf $|b_1|$ und ebenso die Spuren der Kernstrahlen $|b|$ auf $|a_1|$. Dann muss aber die Lage von $|a_2, a_3|$ durch $|b_4|$ bestimmt werden, welche als $|a_4|$ aufgefasst, zugleich über die Lage von $|b_2, b_3|$ verfügt.

Die Bestimmung der übrigen Kernstrahlen geschieht unter diesen Umständen am besten nach der Formel:

$$[a_3 B_5]\, b_6 B_5 b_5\, [a_2 B_5] \text{ oder } [b_3 A_5]\, b_6 A_5 a_5\, [b_2 A_5]$$

d. h. $$[a_3 B_5]\, b_3 x b_6\, [a_2 b_4],\ [a_2 B_5]\, b_2 y b_5\, [a_2 b_4].$$

Die Schnitte der Kernstrahlen sind Kernpunkte.

Im Zeichen 8 bilden die Kernstrahlen $|a_1 a_2 a_3 a_4|$ ein windschiefes Vierseit, indem die Strahlen $|a_1, a_3|$ im Schnitte $(A_{14}, A_{12}; A_{32}, A_{34})$ mit $|a_2, a_3|$ die Kernebenen $[a_1 a_2, a_1 a_4, a_3 a_2, a_3 a_4]$ bestimmen.

Es gehören somit die Strahlen mit geraden Indices der einen Schar an, die mit ungeraden der anderen.

Sei $(B)$ ein Kernpunkt, so werden die Kernstrahlen, welche durch denselben gehen, in den Ebenen $[a_3 B, a_4 B]$ liegen, die sich nach $|BA_{34}| = |b|$ schneiden. Darnach ergibt sich:

$$[a_3 B] \text{ d. h. } |A_{23} b|\, A_{16}\, |a_1|;\ [a_4 B] \text{ d. h. } |A_{14} b|\, A_{25}\, |a_2|$$
$$[a_1 B] \text{ d. h. } |B A_{16}|\, A_{36}\, |a_3|;\ [a_2 B] \text{ d. h. } |B A_{25}|\, A_{45}\, |a_4|$$

Folglich sind $|B A_{36} A_{16}, B A_{45} A_{25}|$ die gesuchten Kernstrahlen.

Das Zeichen 8 zeigt weiter, wenn $|a_5, a_6|$ die letztgewonnenen Strahlen bedeuten:

$$[a_1 a_4]\, A_{16} A_{45}\, [a_5 a_6]\, A_{25} A_{36}\, [a_2 a_3]\, A_{12} A_{34}\, [a_{14}] : [a_5 a_6]\, O\, |A_{12} A_{34}|$$

Daraus ergibt sich die Collineation der Dreiecke:

$$[A_{36} A_{34} A_{45}]\, A_{23} A_{14}\, x\, [A_{25} A_{12} A_{16}];$$

ferner zeigen die Strahlen

$x\,|A_{23}\,A_{14}, A_{25}\,A_{16}, A_{45}\,A_{36}|$, dass $[A_{23}A_{25}A_{45}]\,A_{12}\,B\,y\,[A_{14}A_{16}A_{36}]$
$y\,|A_{12}\,B,\ A_{23}\,A_{45},\ A_{14}\,A_{36}|$, $=$ $[A_{23}\,A_{14}\,B]\,x\,z_1\,z_2\,[A_{45}A_{36}A_{12}]$

Uebereinstimmend zeigt das Zeichen 7:

$x\,|A_3\,B_5, b_3\,b_6, A_2\,B_4|$ folglich $[A_3\,b_3\,A_2]\,b_5\,B_1\,y\,[B_5\,b_6\,B_4]$
$y\,|B_1 b_5,\ A_2\,b_3,\ b_6\,B_4|$ $=$ $[B_1\,A_2\,b_6]\,z_1\,z_2\,b_2\,[b_5\,b_3\,B_4]$

5 Gerade bezeichnen somit stets ein Par projectivischer Regelscharen. Fasst man 4 der gegebenen Geraden $|a_{1..4}|$ als windschiefes Vierseit auf, so liegen die übrigen Kernstrahlen in einem Ebenenbüschel $|a_5|$ und werden mittelst zweier perspectivischer Strahlbüschel:

$$[A_{25}]\,A_{12}\,A_{34}\,[A_{45}]$$

bestimmt.

Von besonderer Bedeutung sind die Kernpunkte, in welchen sich Strahlen derselben Lotebene treffen; bestimmen wir dieselben.

Im Zeichen 6 hat $(A_1')$ doppelte Bedeutung: er kann nämlich gelten als $|a_2$ oder $a_3|$ zugehörig. Weist man ihn zu $|a_3|$, so ist er zugleich ein Punkt von $|b_2'|$, welche, in der Lotebene $|a_2|$ gelegen, nach der Formel

$$[a_1\,A'_{13}] \text{ d. h. } [a_1\,b'_2]\,b_1\,x_t\,t_2\,[a_2\,b]$$

in $(t_2)$ den gesuchten Kernpunkt anzeigt. Ebenso findet man im Zeichen 8 die Kernpunkte der Lotebenen $[a_1, a_3]$, wenn man den Deckpunkt $(A_{18})$ das eine Mal $|a_3|$, das andere Mal $|a_1|$ zuweist, im Uebrigen nach der obigen dem Zeichen 8 entnommenen Formel zur Ermittelung der in besagten Lotebenen befindlichen Kernstrahlen $|a_8, a_{10}|$. Im Zeichen 7 werden die Kernpunkte der Lotebenen $[a_{1..4}]$ gleichfalls mit Hülfe der Deckpunkte $(B_2, B_3, A_2, A_3)$ ermittelt nach den Formeln:

$$[a_3\,B_2]\,b_3\,t_2\,[a_2\,b_4];\ [a_2\,t_4]\,b_2\,B_3\,[a_3\,b_4]$$

Bedenkt man die oben bei Erklärung des Zeichens 7 erwähnte Gleichwerthigkeit von $|a_1, b_1|$, so ergibt sich für $(t_1)$ sofort die analoge Formel wie für $(t_4)$.

Die Verbindung $|t_2\, t_3|$ kann auch gelten als Schnitt $[a_2\, b_3, a_3\, b_2]$, welche $[a_1\, b_1]$ nach $|A_2\, B_3, A_3\, B_2|$ schneiden, daher muss $|t_2\, t_3|$ durch die Kreuzung $(s)$ dieser Spuren gehen. Anderseits ist $|t_4\, t_1|$ Spur von $[b_7\, a_7]$ in $[a_1\, b_1]$, die Verbindungen $|(a_2\, b_7, a_7\, b_3), (b_2\, a_7, a_3\, b_7)|$ haben desshalb ihre Spur auf $|t_4\, t_1|$, und da diese Verbindungen Schnitte von $[b_7\, a_7]$ mit $[a_2\, b_3, a_3\, b_2]$ sind, muss $(s)$ die gemeinsame Spur derselben sein. Indem also $|t_2\, t_3, t_4\, t_1|$ sich in $(s)$ kreuzen, liegen je 4 Punkte $t$ in einer Ebene, somit trifft diess bei allen zu. Welche Lage die Kernebene $[a_1\, b_1]$ immer zur Zeichenebene haben mag, stets liegen die Kernpunkte aller Kernebenen, die durch parallele Strahlen gelegt sind, in derselben Ebene $[\tau]$.

Zu den Kernebenen, welche durch parallele Strahlen gelegt sind, gehören auch die parallelen Kernebenen. Die Verbindungen der Kernpunkte solcher Ebenen gehen, wie das Zeichen 5 gezeigt hat, sämtlich durch den Mittelpunkt der Parallepipede, welche jene Ebenen bilden. Folglich bilden die Ebenen $\tau$ ein Büschel, dessen Mittelpunkt $(M)$ der Mittelpunkt der Regelscharen ist.

Die Bedeutung der Masszeichen 2. Grades wird noch vollständiger erkannt, wenn man die Mittelebene $\tau$ mit 6 Lotkernebenen verbunden auffasst, wie Zeichen 9 zeigt. Bezeichnet man z. B. den Punkt $B_2$, sofern er als Schnitt $|b_4, a_2|$ gilt, durch $B_2'$, so liegen die Dreiecke $B_2 A_6' 35'$, $B_2' A_6 35$ perspectivisch zur Flucht der Normalen zur Bildebene, dem Zenit; daher müssen die Schnitte

$$(s_1;\, s_2;\, s_3) = (t_1\, t_2, t_4\, t_6;\; t_4\, t_5, t_2\, t_3;\; t_3\, t_6, t_5\, t_1)$$

auf der Spur $[B_2 A_6' 35', B_2' A_6 35]\, s_1 s_2 s_3\, [\tau]$ sich befinden.

Die Pascal'sche Linie erscheint somit hier, wie im Zeichen 8 der Punkt von Brianchon, rein als Folge räumlicher Lagenverhältnisse.

Ferner stellt $x_1 x_2 x_3$ die Ebene $\tau$ dar und wir können schreiben:

$$[b_1 a_6]\, A_3 x_1\, 56\, [a_3 b_5]\, 23\, x_2\, B_5\, [b_2 a_4]\, 26\, x_3\, A_4\, [a_6 b_1]$$
$$([b_1 a_6, a_3 b_5, b_2 a_4]) = (X)$$
$$[a_1 b_6]\, A'_3\, x_1\, 56'\, [b_3 a_5]\, 23'\, x_2\, B'_5\, [a_2 b_4]\, 26'\, x_3\, A'_4\, [b_6 a_1]$$
$$([a_1 b_6, b_3 a_5, a_2 b_4]) = (X')$$

Es erscheint ferner:

$$[XYZU] = [a_4 b_2]\, t_2 t_4\, [b_4 a_2] = [X'Y'Z'U']$$
$$|XZ', X'Z|\, x_1 [\tau] x_1\, |YU', Y'U|$$

Die Kernstrahlen umhüllen eine Curve, deren Punkte in der Ebene $\tau$ liegen und welche Umriss heissen mag. Der Umriss ist vom 2. Grade, weil die 2 Kernstrahlen jeder Kernebene $[\tau]$ im Allgemeinen in 2 verschiedenen Punkten treffen. Der Umriss ist zugleich von der 2. Classe, weil durch jeden Kernpunkt 2 Kernstrahlen gehen, welche im Allgemeinen in verschiedenen Lotebenen liegen.

Die Gestalt des Umrisses lässt sich mit Leichtigkeit erkennen, wenn 5 Kernstrahlen ein convexes Fünfseit bilden, er ist dann immer eine Ellipse; diese Annahme ist bei unseren Zeichnungen vorzugsweise gewählt, weil dadurch die Zeichen sehr übersichtlich werden.

Andernfalls kann folgende Prüfung über die Gestalt des Umrisses entscheiden. Sind im Zeichen 7 $|a_1 a_2 a_3 b_1|$ 4 gegebene Kernstrahlen, so geht, wie gezeigt worden, die Verbindung $|t_2 t_3|$ stets durch $|A_2 B_3| s |A_3 B_2|; |B_3 b_2| s_1 |B_2 b_3|$. Hat der Umriss eine unendlich ferne Tangente, so ist er eine Parabel; in diesem Falle werden $|B_3 s_p, B_2 s_p| \parallel |a_2, a_3|$. Sind $(t_{2p}, t_{3p})$ die Kernpunkte eines parabolischen Umrisses, so ist es, dem vorhergehenden Verfahren entsprechend, leicht, weitere Kernstrahlen zu finden. Dieselben bezeichnen auf jedem Par Leitstrahlen projectivisch ähnliche Punktreihen, ein Massverhältniss, welches sich auf die Raumgeraden überträgt und zeigt, dass dann die Kernfläche ein Paraboloid wird.

Verschiebt sich z. B. im Zeichen 10 $(t_2)$ von $(t_{2p})$ an gegen $(A_1')$ hin, so zeigt das Strahlbüschel $(s)$ auf $|b_3 s_1|$ (oder auch $|b_2 s_1|$) an, dass der Berührungspunkt des Umrisses ($t_2$ oder $t_3$) zwischen den Schnitten paralleler Tangenten liegt, folglich ist der Umriss eine Ellipse. Dieser Zustand dauert solange $(t_2)$ zwischen den Grenzen $(t_{2p}, A_1')$ bleibt, geht derselbe nach der einen oder anderen Seite hin über die bezeichneten Grenzen hinaus, so zeigt das Strahlbüschel $(s)$ wie vorhin auf $|b_2 s_1|$ an, dass die Berührung des Umrisses ausser den Schnitten paralleler Tangenten stattfindet, daher der Umriss zur Hyperbel wird. Endlich erkennt man leicht $(b_2, A_3')$ als weitere Grenzen zwischen jenen beiden hyperbolischen und einem elliptischen Gebiete.

Fasst man nun das Zeichen 6 in's Auge und fragt: wie darf die Spur $(B)$ angenommen werden, damit der Umriss eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel sei, so führen die oben genannten Grenzen in Verbindung mit früher besprochenen Zeichenverfahren zu neuen Grenzen auf $|b|$.

Die Formel zur Bestimmung von $(t_2)$ zeigt nämlich (vgl. pag. 170), dass den Grenzen $(t_{2p}, A'_1, A'_3, b_2)$ auf $|b|$ die Grenzen $(B_p, |A_2 A_3| \, z_1 \, |b| \, z_3 \, |A_2 A_1|, |A_1 A_3| \, z_2 \, |b|)$ entsprechen.

Einen allgemeineren Charakter nimmt die Grenzbetrachtung an, wenn man gestützt auf das Zeichen 8 fragt: Welche Umrisse ergeben sich nach und nach, wenn der Kernpunkt $(B)$ sich im Strahl $|A_{34} \, b|$ verschiebt? Man geht auch in diesem Falle von den Grenzen eines der gegebenen Kernstrahlen $|a_4|$ aus, welche wie oben durch das Strahlbüschel $(s)$ bezeichnet werden. Dann ergibt die Betrachtung des Zeichens 11, gestützt auf die Ergebnisse des Zeichens 10:

$$|t_p A_{25} A_{34} A_{14}| A_{1x} |o_p o_{25} A_{34} A_{12}| A_{25} |a_{3p} a_{35} A_{34} A_{23}| A_{1x} |b_p b_{25} A_{34} b|$$

Darnach kann unmittelbar aufgeschrieben werden:

$$|A_{34} A_{14} A_{25} t_p| \; Y \; |A_{34} b b_{25} b_p$$

Einem Strahlbüschel der Lotebene $|b|$ entspricht ein Kegelschnitt $[A_{14} A_{25} y_1 y_2]^2$, welcher $|A_{14} A_{23}, A_{25} A_{16}|$ zu Tangenten hat; dem Strahlenbündel entspricht somit ein Kegelschnittbüschel, dessen 4 Mittelpunkte in $(A_{14}, A_{25})^2$ parweise zusammenfallen.

Auf jedem Strahle $|b|$ durch die Ecke $(A_{34})$ eines windschiefen Vierseits begrenzen die Spuren der Kernebenen $[a_{1x} a_{23}, a_{1x} a_{25}]$ nebst dem Parabelpunkt $(b_p)$ und der Ecke $(A_{34})$ selbst 4 Strecken, welche abwechselnd Kernpunkte von Regelscharen mit elliptischen und hyperbolischen Umrissen enthalten.

## B. Gliederung der freien Raumelemente.

Nachdem die Massverhältnisse der Kernfläche projectivischer Regelscharen aus der hinreichenden Anzahl gezeichneter Elemente erkannt sind, sehen wir zu, wie sich die freien, d. h. nicht zur Kernfläche gehörigen Raumelemente dieser gegenüber verhalten und suchen dieselben dem entsprechend zu gliedern.

Eine beliebige Ebene wird von jeder Kernebene nach einer Geraden geschnitten, welche durch die Spuren ihrer zwei Kernstrahlen bestimmt ist. In jedem Strahle des Büschels $(A)$, welches die Kernebenen der gemeinsamen

Axe $|a|$ in der Schnittebene $[\gamma]$ bezeichnen, liegen somit zwei Kernpunkte $(A, B)$; daher ist die Linie, welche die Kernfläche auf der Schnittebene bezeichnet, vom 2. Grade. Durch jede der Spuren $(A_1, B_2)$ der Kernstrahlen $|a_1, b_2|$ in der Schnittebene $[\gamma]$ geht ein zweiter Kernstrahl $|b_1, a_2|$; sind $|c_1, c_2|$ die Spuren der Kernebenen $[a_1 b_1, a_2 b_2]$, so wird deren Kreuzung $(D)$ die Spur des Schnittes $[a_1 b_1] D A_3 B_3 [a_2 b_2]$, indem $|a_1, a_2| A_3, B_3 |b_2, b_1|$ die Kernpunkte von $[a_1 b_2, a_2 b_1]$ sind. Da nun durch $(A_3, B_3)$ keine anderen Kernstrahlen gehen als $|a_1 b_2, a_2 b_1|$, entsprechen auch $(D)$ in der Schnittebene nur die Spuren $|A_1 D, B_2 D|$ der Kernebenen $[A_3 A_1 B_3, A_3 B_2 B_3]$, welche die Spur der Kernfläche berühren. Diese gehört daher der 2. Classe an.

Zunächst gilt im Zeichen 12 die Tafel als Schnittebene und ist übereinstimmend mit Zeichen 6 die Regelfläche $\|a_1 a_2 a_3 b\|$ gezeichnet. Weil es nun darauf ankommt, die Spuren der Kernstrahlen zu kennen, bestimmen wir dieselben nach der Formel:

$$[a_2 a_{1i}] b_i a_{1i} [a_3 a_{1i}]$$

d. h. $|A_1 b_1 a_{13} a_{1i} |b_2| A_1 B x_2 x_i |A_2| A_1 B B_3 B_i |A_4| A_1 B x_3 x_j |b_3| A_1 b_1 a_{13} a_{1i}|$

$(x_2)$ dient zur Grenzbestimmung, indem er zeigt, dass den Spuren $(B)$ innert $|b_1 b_3, z b_2|$ elliptische, zwischen $|b_3 z, b_2 \infty b_1|$ hyperbolische Spurlinien der Kernfläche entsprechen. Ist die Regelfläche durch die Elementengruppen:

1) $\|a_1, a_2, b_3; A_4, A_5\|$, 2) $\|a_1, a_2; A_3, A_4, A_5\|$, 3) $\|a_1, b_2; A_3, A_4, A_5, A_6\|$

gegeben, so hat man in allen 3 Fällen die Kernstrahlen aus der Spurlinie abzuleiten. Diess geschieht im ersten Fall einfach nach der Formel:

$[a_1 A_4] b_1 b_{24} x [a_2 b_3]$, indem $|A_1 A_4| x |A_2 B_3|$; $|a_1| b_1 |b_3|$ $|b_1 x| b_{24} |a_2|$, endlich $|A_4 b_{24}| b_{14} |a_1|$ ergibt.

Im zweiten Falle muss zur vollständigen Bezeichnung der windschiefen Kernstrahlen $|a_1, a_2|$ noch eine dieselben kreuzende $|b_3|$ gesucht werden (worüber b. Z. 13 das Nähere folgt), mit deren Hülfe dann durch $(A_3, A_4, A_5)$ auf die vorhin angegebene Weise die entsprechenden Strahlen der Schar $b$ zu ermitteln sind. Im dritten Falle wird auf der Spur von $[A_6 a_1$ od. $A_6 b_2]$ der Spurpunkt eines Kernstrahles der anderen Schar resp. $|b$ oder $a|$ aus $[A_1 B_2 A_3 A_4 A_5]^2$ abgeleitet, wodurch auch dieser Fall auf (1) zurückgeführt erscheint, da zwei Strahlen der einen und ein dieselben schneidender der andern Schar gegeben sind.

Die Elemente $\|A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\|$ zerfallen in 3 Gruppen: $[A_1, A_2, A_3]$ vertritt die Bildebene, $(A_4, A_5, A_6), |b_7|$. Um die Kernfläche zu zeichnen, welche durch diese Elemente bestimmt wird, sucht man zuerst die Berührungsebenen zweier Kegelflächen: $A_4 [A_1^2 A_2 A_3 A_4]^2 \overline{\wedge}\, b_7 [A_1 A_2 A_3 A_5]$; $A_4 [A_1^2 A_2 A_3 A_5]^2 \overline{\wedge}\, b_7 [A_1 A_2 A_3 A_5]$ deren vierter gemeinschaftlicher Kernstrahl $|A_4 B_x|$ der Bedingung entspricht: $A_4 B_x |A_1 A_2 A_3 A_4 A_5| b_7$; mithin ein Kernstrahl der gesuchten Regelfläche sein wird, von welcher wir nun auch die Spur $[A_1 A_2 A_3 B_7 \mathrm{B}_x]$ kennen; überdiess ergeben $[A_5 b_7, A_5 b_x; A_5 c_7, A_6 b_x]$ ein Strahlenpar der andern Schar. (Vgl. f. d. Nähere: Schröter, Theorie d. Obfl. II. O. p. 105 ff.)

Diese Beispiele lassen wünschbar erscheinen, auch die Veränderungen des Umrisses bei gegebener Spur zu verfolgen, wozu das Zeichen 13 anleitet.

Dieses weist vorerst auf den Zusammenhang zwischen den Schnitten der Spurtangenten $(p_1)$ und den Kernpunkten $(b_5, b_6)$ der Strahlenpare $|a_2 b'_2, a_3 b'_3|$, welche je $(A_2, A_3)$ gemeinsam zu Spuren haben; es ist nämlich $|p_1 b_5 b_6|$ der Schnitt der Ebene $[a_2 b'_2, a_3 b'_3]$. Man entnimmt dem Zeichen 13 ferner:

$$[a_3 b'_1]\, s_2 b_5 b_2\, [a_2 b'_2]\, s_2 b_6 c_1\, [b'_3 a_1]$$

und erkennt daraus in welcher Weise die Kernstrahlen $|b'_1, a_1|$ und damit die Lage der Kernebene $[A_1]$ durch den Schnittstrahl $|p_1 b_5 b_6|$ bedingt sind.

Nun ist durch $(A_1 A_2 A_3)$ und den Pol $(p_1)$ die Spur der Kernfläche gegeben, durch $|a_2, a_3|$ sind zwei windschiefe Kernstrahlen der Richtung ihrer Lotebenen nach bestimmt. Durchläuft der Schnitt $|b_5 b_6|$ das Strahlbüschel $(p_1)$, so werden nach vorstehender Formel sofort noch 4 Tangenten $|b'_2, b'_3, b'_1, a_1|$ des Umrisses gefunden. Ueber seine Gestalt entscheidet die Lage des Kernpunktes $(t_3)$ zu den Schnitten $(b_4\, b_7)$ der Parallelstrahlen $|a_2, b''_2|$, welche nach den Formeln:

$$[a_2 b_3]\, x_2 b_2 t_3\, [a_3 A_1];\quad [a_3 a_2 \infty]\, b''_2\, [a_2 x''_2]$$

zu ermitteln sind. — Ferner ergeben sich die Massverhältnisse:

$$|b_4 A_2 x'_2 b_2|\, x_2\, |b_4 B_3 A_3 t_3|$$
$$|b_4 x'_2 A_2 b_2|\, A_1\, |b_4 A_3 x_3 b_3|\, a_2 \infty\, |b_4 A_3 B_3 b_7|$$

Man ersieht daraus, dass die projectivischen Punktreihen $|t_3, b_7|$ scheinbar 3 zusammenfallende Punkte aufweisen; genauere Erwägung erweist aber den Deckpunkt $(b_4)$ als unbrauchbar, indem die Umrissebene zu einem Punkt zusammenschwindet, wenn $|A_1 b_2|$ der $|a_2|$ folgend nach $(b_4)$ gelangt und dabei $|a_3|$ in ihrer Lotebene drehend mit sich führt.

Als Grenzen zwischen elliptischen und hyperbolischen Strecken von $|a_3|$ bleiben somit nur die Spuren $(A_3, B_3)$. Durchläuft $|a_3|$ das Strahlbüschel $(A_3)$ und gelangt in die Lage $|A_3 B_2|$, so zeigt die Zeichnung stets $(t_3)$ senkrecht über $(B_2)$, übereinstimmend mit der Thatsache, dass dann der Kernstrahl $|b_2|$ senkrecht zur Lotebene stehen muss. Da übrigens $|a_2|\, t_2\, |b_2|$, $|a_3|\, t_3\, |b_3|$, fallen 2 Kernpunkte in das Lot $|b|$. Lassen wir nun $|b_5 b_6|$ das Strahlbüschel $(p_1)$ unter diesen Umständen durchlaufen, so decken sich $|b'_2 b'_3|$ stets über einem Spurpunkte, durch welchen auch $|b'_1|$ geht, indem das Strahlbüschel $(s_2)$ auf $|A_3 B_2, a_2|$ die Punktreihen zeigt, welche die entsprechenden Strahlen der Büschel $(A_2, A_1)$ zur Erzeugung der Spurcurve beschreiben. Damit sind die Ergebnisse der Zeichnung begründet; man hätte indessen von vornherein sagen können: weil ein Strahl $|b|$ lotrecht wird, muss jeweilen auch ein entsprechender Parallelstrahl $|a|$ vorkommen und es bedarf nur noch eines Hinweises auf das Höhenhyperboloid des Tetraeders, um an Bekanntes anzuschliessen.

Zur Vervollständigung des Ueberblickes möge noch erwähnt sein, dass sich in Bezug auf die Pole $(p_1)$ jede Tangente $|A_2 p_1|$ durch die Parabelpunkte $(P_1, P_2)$ in eine elliptische und eine hyperbolische Strecke gliedert, sofern die Strahlenbüschel der conjugirten Durchmesser zu $|A_3 A_2, A_3 A_1$ (bezw. $A_2 A_1)|$ auf dem Drehkreis eine schneidende Pascallinie zeigen.

Im Zeichen 14 ist die Kernfläche durch $|b_1 a_2 b_3 a_4 b_5\|$ gegeben und wird der Schnitt derselben mit $[C_1 C_2 C_3] = [\gamma]$ gesucht, wobei der Vereinfachung wegen $(C_2)$ nach $(B_5)$ verlegt ist. Man denkt zur Lösung der genannten Aufgabe vorerst an ein Ebenenbüschel $|b_5|$, dessen Ebenen sowohl die Kernfläche als $[\gamma]$ je in einem Strahle schneiden und durch deren Kreuzung einzelne Punkte des gesuchten Schnittes anzeigen. Uebersichtlicher gestaltet sich die Lösung mit Hülfe der Kernebenen $[a_2 C_2 b_5, b_1 C_1 a_6]$, deren Spuren in $[\gamma]$ Tangenten der Schnittlinie in $(C_2, C_1)$ sind und mit $(C_3)$ zusammengehalten leicht die Gestalt derselben erkennen lassen. Zur Bestimmung von $(p_1)$ entnimmt man dem Zeichen 14 folgendes Verfahren:

$$[b_1 a_6]\, A_4\, X\, [b_3 a_4]\, B_3\, X\, [a_2 b_5];\; [A_2 X C_3]\, C_3 \gamma_0 p_1 [\gamma]$$

Ausserdem lässt das Zeichen noch die Bestimmung von $(C_4, c_3, c_1)$ erkennen, wie folgt:

$(C_4)$: $[b_3 a_4]\, y_c\, C_3\, C_4\, [\gamma]$; $[b_3\, C_1]_{34} s\, [a_4\, C_2]$, $[C_1\, C_3\, S]\, s_1\, |C_2\, C_4|$

$(c_3)$: $[b_1 a_3]\, A_2\, t_3\, [b_3\, a_2]\, C_3\, C_2\, x_1\, [\gamma]\, C_1\, x_1\, c_3\, [b^1 a_3]$.

$(c_1)$: $[b_3 a_1]\, C_3\, \gamma_1\, c_1\, [\gamma]$

Bevor wir zur Grenzbestimmung übergehen, werfen wir einen Blick auf Zeichen 15, welches auf eine andere Erklärung der Schnittebene hinweist.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes $(P)$ geht ein einziger Strahl, welcher zwei windschiefe Kernstrahlen $|a_2, a_4|$ einer Regelfläche trifft, es ist der Schnitt der Ebenen $P\,[a_2, a_4] = |P A_2\, A_{34}|$. Derselbe kreuzt in den nämlichen Punkten zugleich ein zweites Par windschiefer Kernstrahlen dieser Regelfläche: $|b_1, b_3|$, welche mit $|a_2, a_4|$ ein windschiefes Vierseit bilden, indem $(A_4, B_3)$ die beiden übrigen Ecken sind. Jeder Strahl eines Büschels $(P)$ in einer Ebene $[a_2\, b_3]$ bestimmt mit seinen Schnitten auf diesen Geraden zwei Kernstrahlen $|b_5, a_6|$, welche sich in $(p'_1)$ kreuzen. Die Punkte $(p')$ liegen in einer Ebene $[B_3 A_4 P']$, in welcher Kernebene immer das Strahlbüschel $(P)$ liegen mag. Zur völligen Bestimmung der Regelfläche sei noch $|b_5|$ gegeben. Dann zeigt das Zeichen 15:

$$[a_4 b_5]\, A_{34}\, B_{25}\, [a_2 b_3]\, A_2\, A_{36}\, [b_1 a_6]; [a_4 b_5]\, A_4\, x\, c_1\, [b_1 a_6], [a_2 b_5]\, B_3\, y\, c_1\, [b_3 a_6]$$
$$A_4\, |A_2\, A_{34}\, P P'|\, B_3 = -1 = B_3\, |B^*_{25}\, A_{36}\, P P'_1|\, c_1$$

Der Strahl $|P A_{34}\, A_2|$ würde demnach auf $(A_4)$ geführt haben, wie $|P A_{36}\, B_{25}|$ auf $(p'_1)$ und da durch $(A_4, B_3, P')$ die Schnittebene bestimmt ist, in welcher auch die projectivischen Strahlbüschel $(A_4 x, B_3 y)$ liegen, folgt, dass der Ort von $(p')$ eine ebene Curve 2. Grades ist, welcher $|A_4 P', B_3 P'|$ zu Tangenten hat.

Da in dem Vierseit $|A_4 P' B_3 p'_1|$ die Diagonalen $|xy|\, z\, |A_4 B_3|\, z'\, |P' p'_1|$, so geht die Tangente zu $(p'_1)$ durch $(z)$.

Irgend ein Strahl des Bündels $(P)$ kann im Allgemeinen die Regelfläche nur in 2 solchen Punkten treffen, welche die beiden von den erzeugenden Ebenenbüscheln $|a_2, a_4|$ auf jenem Strahle bestimmten Reihen gemeinsam haben. Ordnen sich demnach diese massgebenden Reihen derart, dass keine entsprechenden Punkte zusammenfallen, so geht der betreffende Strahl an der Regelfläche vorbei. Der Strahlenkegel, welcher durch die oben gefundene Schnittlinie $[p']^2$ und $(P)$ bestimmt ist, bezeichnet nun die Grenze zwischen den Strahlen des Bündels $(P)$, welche die Regelfläche treffen und solchen, die daran vorbeigehen.

In der That beweist ein Versuch, dass beliebige Strahlen z. B. der $[B_3 P p'_1]$, zwischen $|Pp'_1, PB_3|$ von den Ebenenbüscheln $|a_2, a_4|$ in gleichlaufende Punktreihen getheilt werden.

Auch die unendlich ferne Fluchtebene schneidet Regelflächen, das Paraboloid mit seinem einen unendlich fernen Kernpunkt ausgenommen, in Curven 2. Grades.

Wenn diese Strahlenflucht von der Flucht der Ebene geschnitten wird, so ist der Schnitt der Letztern mit der Regelfläche eine Hyperbel, indem alsdann auch zwei Strahlen des Polarkegels $(Pp_1)$ mit einem Par Kernstrahlen und gleichzeitig mit der Schnittebene $[\pi]$ gleichlaufen. Im Zeichen 16 sind die Kernstrahlen der Regelfläche zum Kernpunkt (34) zusammengeschoben, wodurch ein Kegel $(34\, [B_3 A_4 d_5]^2)$ entsteht, welcher mit jener die Flucht gemein hat; das gleiche wäre bei der Parallelebene $[\pi'']$ zu $[\pi']$ der Fall; wenn also die Fluchten des Kegels und der Ebene sich schneiden, so geschieht das auch mit diesen Gestalten sowohl als mit deren Spuren; über das letztere geben die erzeugenden Strahlbüschel $(B_3, A_4)$ der Kegelspur Aufschluss, indem sie auf $|\pi''|$ projectivische Punktreihen anzeigen. Ergeben sich die Doppelpunkte $(D_1, D_2)$, so bestimmen dieselben die Richtungen der Kernstrahlen, welche mit Strahlen des Polarkegels parallel sind, wie auch die Richtungen der Asymptoten des Schnittes in der Polarebene. Fallen $(D_1, D_2)$ zusammen, berührt demnach die Parallelebene den Parallelkegel, so hat der Schnitt $(\pi')$ nur einen Fluchtpunkt mit der Regelfläche gemein und ist demnach eine Parabel. Diese Grenzfälle, von welchen der eine im Zeichen 16 eingetragen ist, schliessen die Ebenen elliptischer Schnitte im Büschel $|A_4 B_3|$ ein. Die Pole $(P_{p1}, P_{p2})$ jener Parabelebenen begrenzen auf $|A_2\, 34|$ die Strecke, in welcher die Spitzen elliptischer Polarkegel liegen. Man findet diese Pole mit Hülfe des harmonischen Massverhältnisses $|p_a x d_{p1}\, d_{p2}| = -1$, (welches sich aus $(A_4\, B_3)\infty$ auf $|A_2 B_3|$ und von dort durch das Strahlbüschel (34) parallel auf $(B_3)$ überträgt).

Zum Schlusse zeigt das Zeichen 17 den Polarkegel, welcher den Mittelpunkt $(M)$ der Regelfläche zur Spitze hat und die Fluchtebene des Raums zu seiner Polarebene. Derselbe wird von den Kernebenen der Parallelstrahlen umhüllt, sein Schnitt mit einer Kernebene $[a_2\, b_1]$ ist eine Hyperbel, welche $|a_2, b_1|$ zu Asymptoten, $(A_2)$ zum Mittelpunkt hat und für welche die Spur $|t_2\, t_1|$ von $[\tau]$ Polare zu $(M)$ ist. Da die sämmtlichen Strahlen dieses Kegels mit den Kernstrahlen der Regelfläche parallel sind, so heisst er Asymptotenkegel. Jeder andere Polarkegel, welcher mit dem Asymptotenkegel 2 Berührungsebenen gemein hat, wird 2 Kernstrahlen enthalten, die mit solchen des Asymptotenkegels parallel sind. Das Gebiet der Kernebene $[a_2 b_1]$ zwischen den Aesten der Spurhyperbel, von dessen Punkten aus Tangenten an diese gelegt werden können, bezeichnet daher das Raumbereich der hyperbolischen Strahlen im Bündel $(M)$; alle Punkte dieses Bereiches sind Spitzen hyperbolischer Polarkegel zu der bezeichneten Regelfläche. Dieses Bereich wird also von den parabolischen Strahlen des Asymptotenkegels begrenzt, welche anderseits das Bereich elliptischer Strahlen umschliessen. So gliedert der Asymptotenkegel die Punkte des Raumes in Bezug auf eine gegebene Kernfläche. Die Aeste seiner Spur bezeichnen die Grenzen jener Raumbereiche in der betreffenden Kernebene.

Ein Rückblick auf die Tafel der Kernflächen zeigt in den Zeichen 6, 7 und 8 die einfachsten Weisen ihrer Bezeichnung, zu welchen die Zeichen 10 und 11 die Grenzbestimmungen andeuten. Im Ganzen aber mögen die vorstehenden Betrachtungen darthun, wie sich Masszeichen gleich anderen als erklärende, ordnende und kürzende Glieder dem sichtbaren Ausdruck räumlichen Denkens einfügen, ohne Gefährde für die Strenge abstracter Auffassung der Gestalten.

## Masszeichen 1 Grades.

## Masszeichen 2 Grades.

### Kernflaeche.

### Gliederung.