Notizen.

Ueber die Kummer'sche Darstellung der Strahlensysteme zweiter Ordnung. — In seiner Abhandlung über die algebraischen Strahlensysteme der ersten und zweiten Ordnung*) ertheilt Kummer der Raumgeraden die gemischten Coordinaten $t:x:y:z$, $\xi:\eta:\zeta$. Hierbei sind $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, bezogen auf ein orthogonales System, $\xi:\eta:\zeta$ sind zu betrachten als $x:y:z$ für den in der (unendlich fernen) Ebene $t=0$ gelegenen Punkt der Geraden, zugleich sind ξ, η, ζ proportional den Richtungscosinussen. Endlich sind $\frac{x+\varrho\xi}{t}$, $\frac{y+\varrho\eta}{t}$, $\frac{z+\varrho\zeta}{t}$, unter ϱ einen willkürlichen Parameter verstanden, stets die orthogonalen Coordinaten eines Punktes auf der Geraden.

Das Strahlensystem (zweiter Ordnung) wird durch zwei Gleichungen dargestellt. Die erste hat die Form $P\xi+Q\eta+R\zeta=0$, in welcher P, Q, R homogene Functionen in t, x, y, z sind; sie liefert für jeden Punkt $t:x:y:z$ des Raumes eine durch ihn gehende Ebene, liniengeometrisch also zu jedem Punkt einen Büschel, dessen Mittelpunkt jener Punkt ist. Bewegt sich der Punkt auf einem zugehörigen Büschelstrahl weiter, so dreht sich die Ebene des Büschels keineswegs um diesen Strahl, und es folgt, dass die ∞^3 Büschel, welche diese erste Gleichung für alle Punkte des Raumes liefert, alle ∞^4 Raumgeraden enthalten. Es ist somit die erste Gleichung des Systems nicht die Gleichung eines Complexes. Wenn man dagegen ∞^2 der genannten Büschel zusammenfasst, etwa dadurch, dass man den Punkt $t:x:y:z$ eine willkürliche Fläche durchlaufen lässt, so erhält man allemal einen Complex, in welchem das Strahlensystem enthalten ist; der Complex ist von der gewählten Fläche abhängig.

---

*) Abh. d. Berl. Akad. 1866.

Hiervon durchaus verschieden verhält es sich mit der zweiten (abgeleiteten) Gleichung des Systems. Dieselbe ändert sich nämlich nicht, wenn man an Stelle von t, x, y, z setzt t, $x+\varrho\xi$, $y+\varrho\eta$, $z+\varrho\zeta$; diese Gleichung stellt einen Strahlencomplex dar.

Die Aufgabe, beide Gleichungen des Systems durch die Gleichungen zweier Complexe zu ersetzen, welche das System enthalten, ist insofern eine unbestimmte, als die erste Gleichung auf unendlich viele solcher Complexe führt, je nach Wahl der Fläche, auf welcher alle Ausgangspunkte t, x, y, z der Strahlen liegen sollen. Als solche Fläche kann man z. B. eine Coordinatenebene, etwa $x=0$, annehmen. Alsdann erhält man aus beiden Gleichungen des Systems die Gleichungen zweier Complexe durch folgendes Verfahren. Man substituire in die Kummer'schen Gleichungen

$$t:x:y:z = p_{12}:o:p_{32}:p_{42}, \qquad \xi:\eta:\zeta = p_{12}:p_{13}:p_{14},$$
$$u:v:w = p_{34}:p_{42}:p_{23}$$

so gehen sie über in die zweier Complexe, welche das System im Allgemeinen als unvollständigen Schnitt enthalten.

Die Gerade $t:x:y:z$, $\xi:\eta:\zeta$ kann nämlich betrachtet werden als die Verbindungslinie der Punkte mit den Coordinaten

$$\begin{array}{llll} t, & x, & y, & z \\ t, & x+\varrho\xi, & y+\varrho\eta, & z+\varrho\zeta, \end{array}$$

hat also die sechs Coordinaten

$$(1)\quad \lambda p_{12} = t\varrho\xi, \quad \lambda p_{13} = t\varrho\eta, \quad \lambda p_{14} = t\varrho\zeta$$
$$(2)\quad \lambda p_{34} = \varrho(y\zeta - z\eta), \quad \lambda p_{42} = \varrho(z\xi - x\zeta), \quad \lambda p_{23} = \varrho(x\eta - y\xi),$$

unter λ einen Proportionalitätsfactor verstanden. — (1) zeigt, dass $\xi:\eta:\zeta = p_{12}:p_{13}:p_{14}$. Wählt man den Ausgangspunkt in $x=0$, so ergeben die Gleichungen (2)

$$\lambda p_{34} = y\varrho\zeta - z\varrho\eta, \qquad \lambda p_{42} = z\varrho\xi, \qquad \lambda p_{23} = -y\varrho\xi,$$

und hieraus folgt mit Hülfe von (1)

$$(3)\qquad tp_{34} = yp_{14} - zp_{13}, \quad tp_{42} = zp_{12}, \quad tp_{23} = -yp_{12}.$$

Aus (3) folgt für die metrischen Coordinaten des Anfangspunktes der Geraden: $\frac{y}{t} = -\frac{p_{23}}{p_{12}} = \frac{p_{32}}{p_{12}}$, $\frac{z}{t} = \frac{p_{42}}{p_{12}}$ und die erste Gleichung ergiebt die bekannte Identität, welche zwischen den sechs Coordinaten p_{ik} besteht.

Für die Strahlensysteme zweiter bis sechster Classe 1. Art geht nun die abgeleitete Gleichung über in die eines Reye'schen Complexes, dessen Ausnahmepunkte die Ecken des Coordinatentetraeders sind.*)

Das System zweiter Classe ergiebt sich als Schnitt des Reye'schen Complexes mit einem linearen.

Ebenso findet man, dass durch das System dritter Classe sich ein Büschel quadratischer Complexe legen lässt. Dieser Büschel enthält, wie bekannt, 10 Reye'sche Complexe und die Congruenz ist z. B. der Schnitt von zwei Reye'schen Complexen (mit unabhängigen absoluten Invarianten), welche einen Ausnahmepunkt und eine lineare Congruenz gemein haben. — Die Construction, welche Herr Stahl für das System dritter Ordnung zweiter Classe gegeben hat**), deckt sich denn auch mit der Construction des Schnittes zweier Reye'schen Complexe, welche eine Ausnahmeebene und eine lineare Congruenz gemein haben. Nach der Bezeichnung des Herrn Stahl ist (01) die Ausnahmeebene, die Directricen der gemeinsamen Congruenz sind $\overline{AB} = \overline{\alpha\beta}$ und $\overline{A_1B_1} = s_1$. Die Strahlen des einen Complexes gehen von den Punkten S_1 der Ebene (01) nach den Strahlen des Büschels $A\alpha$ (welche die entsprechenden Geraden l_0 schneiden); dieser Complex hat das Ausnahmetetraeder AA_1OP. Für den anderen Complex tritt gegenüber vorhin der Büschel $B\beta$ an Stelle von $A\alpha$, das Ausnahmetetraeder ist BB_1MN.

Auf die Kummer'sche Darstellung der übrigen Systeme trete ich hier nicht näher ein.

(Im Februar 1885.) Dr. A. Weiler.

---

*) Bezüglich dieser Complexe vgl. die Arbeit des Herrn Stahl, Crelle's Journal, Bd. 95, S. 287.

**) Crelle's Journal, Bd. 91, S. 1.