p^2 besteht, diese Ebene selbst entspricht. Das Erzeugniss ist alsdann eine F^4 mit doppeltem Kegelschnitt p^2, bei welcher jedoch die längs p^2 umschriebene Developpable in zwei Kegel 2. Klasse zerfällt. Die Fläche steht in der Mitte zwischen der allgemeinen mit Doppelkegelschnitt und derjenigen mit Cuspidalkegelschnitt. Von den 16 Geraden der Fläche berühren hier an p^2 8 den einen, 8 den anderen der genannten Kegel; die Spitze eines Kummer'schen Kegels liegt hier nothwendig in der Ebene von p^2. (Die von diesem Kegel herrührenden adjungirten Kegelschnittschaaren schneiden p^2 in Punkten einer Involution; die Pinchpunkte vereinigen sich paarweise in zwei Punkte, welche ein Paar jener Involution bilden; und umgekehrt.) — Fallen die beiden, F^4 an p^2 berührenden Kegel zusammen, so entsteht wieder eine F^4 mit Cuspidalkegelschnitt.

Ueber einige Expansions-Curven der gesättigten Dämpfe

von

Professor Albert Fliegner.

In einer Abhandlung »Zur Theorie der Dämpfe« im XX. Bande der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, hat Weyrauch eine für die Discussion des Verhaltens der gesättigten Dämpfe werthvolle Curve eingehender untersucht, welcher er den Namen der Nullcurve beigelegt hat. Dieselbe ist, kurz ausgedrückt, der geometrische Ort der Berührungspunkte je einer adiabatischen Curve mit je einer Curve constanter specifischer Dampfmenge. Erstere Curve liegt dabei immer ganz unterhalb der letzteren. Daraus folgt, dass in jenem Berührungspunkte, also auch in dem Schnittpunkte mit der Nullcurve, auf einer adiabatischen Curve die specifische Dampfmenge einen Maximalwerth erreicht, während auf einer Curve constanter specifischer Dampfmenge der Wärmeübergang sein Vorzeichen wechselt.

Diese Nullcurve findet sich übrigens, wenn auch ohne Einführung eines Namens für sie, anderweitig ebenfalls angedeutet, z. B. bei Grashof, Theoretische Maschinenlehre I, p. 165; Neumann, Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme, p. 134; Verdet-Rühlmann, Handbuch der mechanischen Wärmetheorie, p. 691.

Die Gleichung der Nullcurve lässt sich am einfachsten aus dem bekannten Ausdrucke für die zuzuführende Wärmemenge

$$dQ = (1-x)\,c\,dt + r\,dx + xh\,dt \tag{1}$$

herleiten, in welchem x die specifische Dampfmenge, c die specifische Wärme der Flüssigkeit, r die Verdampfungswärme, t die Temperatur nach Celsius, und h die specifische Wärme des Dampfes bei Expansion nach der Grenzcurve bedeutet. Dabei hat, wenn T die absolute Temperatur und λ die Gesammtwärme des Dampfes bezeichnet, h den Werth:

$$h = \frac{d\lambda}{dT} - \frac{r}{T}\;; \tag{2}$$

h ist also eine Function der Temperatur oder des Druckes.

Für die folgenden Untersuchungen ist es bequemer, Gleichung (1) durch Zusammenziehung der Glieder mit dt auf die Form

$$dQ = [c-(c-h)x]\,dt + r\,dx \tag{3}$$

zu bringen. Aus derselben erhält man die Gleichung der Nullcurve einfach dadurch, dass man die mit dt multiplicirte eckige Klammer gleich Null setzt. Daraus folgt für die Berechnung der Veränderlichkeit von x auf dieser Curve der Ausdruck

$$x = \frac{c}{c - h} \;. \tag{4}$$

Da c auch eine Function des Druckes oder der Temperatur ist, so kann hiernach leicht für jeden Druck der zugehörige Werth von x berechnet werden. Dann ergibt sich das specifische Volumen v aus

$$v = xu + \sigma \,. \tag{5}$$

Hierin bedeutet σ das constant angenommene specifische Volumen der Flüssigkeit und u die von der Temperatur oder dem Drucke abhängige Volumenzunahme beim Uebergange aus dem flüssigen Zustande in den trockenen gesättigten Dampfzustand.

Gleichung (4) enthält keine willkürliche Constante; jeder Dampf hat also nur eine einzige derartige Nullcurve.

Weiterhin soll bei den nöthigen numerischen Rechnungen und bei der Discussion nur auf Wasserdampf Rücksicht genommen werden. Für diesen ist die Gesammtwärme $\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\, t$. Daher wird, nach Gleichung (3)

$$h = 0{,}305 - \frac{r}{T} \;. \tag{6}$$

Für Wasserdampf nimmt der Quotient r/T mit wachsendem Drucke ab, bleibt aber bei den praktisch anwendbaren Pressungen stets bedeutend grösser als 0,305. h ist daher auf diesem Gebiete negativ und nimmt dem absoluten Werthe nach mit wachsendem Drucke ebenfalls ab.

Wenn man die empirischen Formeln zur Berechnung von r auch ausserhalb der Grenzen der Versuche benutzen dürfte, so würde aus denselben folgen, dass h erst bei etwa 500° Celsius Null werden könnte. Diese Temperatur liegt aber weit über der kritischen, welche nur etwa 370° Celsius beträgt, so dass bei ihr gar kein gesättigter Dampf mehr bestehen kann.

Die specifische Wärme c des Wassers wächst mit zunehmender Temperatur, aber nur sehr langsam; h dagegen nimmt bedeutend rascher zu; x muss daher auch zunehmen. Es bleibt aber doch stets kleiner als die Einheit, denn $x = 1$ würde $h = 0$ erfordern. Die Nullcurve erreicht also die Grenzcurve nicht; sie wird in Folge Ueberschreitens der kritischen Temperatur schon vorher gegenstandslos.

Diese Nullcurve, welche weiterhin als Hauptnullcurve bezeichnet werden soll, gestattet eine Verallgemeinerung, und zwar dadurch, dass auf der rechten Seite der Gleichung (4) im Zähler eine willkürliche subtractive, oder auch additive, Constante k hinzugefügt wird. Eine solche allgemeine Nullcurve würde dann durch die Gleichung

$$x = \frac{c - k}{c - h} \tag{7}$$

dargestellt sein. Jedem Werthe von k entspricht nur eine einzige bestimmte derartige Curve.

Allerdings darf k nicht ganz beliebig gewählt werden, wenn die Nullcurve reell bleiben soll. Die specifische Dampfmenge x kann nämlich, ihrer Bedeutung nach, nicht kleiner als Null, aber auch nicht grösser als die

Einheit werden. k ist daher, wie aus Gleichung (7) folgt, an die Bedingung gebunden:

$$c > k > h \,. \tag{8}$$

Ausserhalb dieser Grenzen fällt die Nullcurve entweder ganz, oder, da c und h nicht constant sind, wenigstens theilweise, auf der einen Seite in das Gebiet reiner tropfbarer Flüssigkeit, auf der andern in dasjenige der überhitzten Dämpfe.

Die Gleichungen (7) und (5) gestatten leicht die Ermittlung des Verlaufes der allgemeinen Nullcurven. Ist k so klein, dass die Differenz $c-k$ jedenfalls positiv bleibt, so hängt der Verlauf von x namentlich von h ab, da sich c nur sehr langsam ändert. h nimmt aber mit abnehmendem Drucke ebenfalls ab; dasselbe muss also auch mit x der Fall sein. Die Abnahme erfolgt jedoch ziemlich langsam, während gleichzeitig u rascher wächst. Daher muss das Volumen mit abnehmendem Drucke zunehmen. Im Allgemeinen wird also in diesen Fällen bei Expansion nach einer Nullcurve eine Condensation eintreten, und umgekehrt. Ist der Werth von k hinreichend klein, so wird bei Compression die Grenzcurve noch unterhalb der kritischen Temperatur erreicht; im Schnittpunkte verliert die Nullcurve ihre Bedeutung.

Einen ganz anderen Charakter nehmen die Curven an, wenn der Werth von k sehr nahe an c liegt. Ist dann bei sehr hohen Pressungen c doch hinreichend gross gegenüber k, so ist der Verlauf zwar noch wesentlich der vorige. Wenn dagegen c, mit sinkendem Drucke abgenommen hat, so kann weiterhin die Abnahme der Differenz $c-k$ und daher auch diejenige der specifischen Dampfmenge x verhältnissmässig so rasch erfolgen, dass trotz der gleichzeitigen Zunahme von $u\ v$ doch wieder abnimmt. Wenn schliesslich $c = k$ wird, verschwindet x, und die Nullcurve verliert ihre Bedeutung an der Grenze zwischen dem gesättigten Dampfzustande und dem tropfbar flüssigen Zustande.

Bei Wasserdampf erhält man z. B. mit $k = 1$ folgende Werthe für x und v in Function des Druckes p, diesen in metrischen Atmosphären (zu 10000 Kg./qm.) verstanden:

$p =$	15	12	8	4	1	0,5	0,1	0,00625
$x =$	0,0248	0,0221	0,0178	0,0124	0,0059	0,0040	0,0015	0
$v =$	0,0044	0,0047	0,0054	0,0069	0,0115	0,0153	0,0240	0,001 $(=\sigma)$

Der Druck von 0,00625 Atmosphäre entspricht der Temperatur von 0° Celsius.

Setzt man den Werth für x Gleichung (7) in (3) ein, so erhält man für die Wärmemittheilung bei der Zustandsänderung nach einer allgemeinen Nullcurve:

$$dQ = k\,dt + r\,dx. \tag{9}$$

Hierin könnte noch dx nach Gleichung (7) durch die Temperaturfunctionen für c und h ersetzt werden. Integrabel wäre der Ausdruck aber nicht, da t in den betreffenden empirischen Formeln zu complicirt auftritt. Doch kann auch aus der Differentialgleichung entschieden werden, ob eine Wärmemittheilung oder -Entziehung nöthig ist. Dabei ist es aber besser, von der Druckänderung auszugehen, nicht wie sonst gewöhnlich von der Aenderung des Volumens, weil sich letzteres für gewisse Werthe von k nicht continuirlich im gleichen Sinne ändert, sondern ein Maximum besitzt.

Aus den vorigen Untersuchungen folgt, dass mit abnehmendem Drucke auch x abnimmt; es ist also dabei $dt < 0$, und auch $dx < 0$. Für positive Werthe von k wird daher jedenfalls $dQ < 0$, d. h. es ist eine Wärmeentziehung nöthig. Auch bei negativem, aber dem absoluten Werthe nach noch kleinen k wird dQ zunächst negativ bleiben. Erst bei weiterer Abnahme von k könnte $kdt > rdx$ und damit $dQ > 0$ werden. Da aber nach Gleichung (8) $k > h$ bleiben muss, so ist noch zu untersuchen, ob solchen Werthen von k überhaupt reelle Nullcurven entsprechen.

Diese Frage lässt sich leicht wenigstens angenähert beantworten. Damit nämlich bei Druckabnahme Wärmemittheilung eintritt, muss dQ das entgegengesetzte Vorzeichen von dt und dx erhalten, also $kdt + rdx < 0$, oder

$$k < -r\frac{dx}{dt} \tag{10}$$

sein. Ein unmittelbares Einsetzen von x aus Gleichung (7) würde unübersichtliche Formeln ergeben; es sollen daher vorerst die nöthigen Annäherungen eingeführt werden. Nach Clausius*) kann man setzen:

$$r = 607 - 0{,}708\,t = 800{,}3 - 0{,}708\,T, \tag{11}$$

$$h = 1{,}013 - \frac{800{,}3}{T}, \tag{12}$$

$$c = 1{,}013 = \text{Const.} \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt sofort:

$$c - h = \frac{800{,}3}{T} \tag{14}$$

und mit dieser Annäherung nach (7)

$$x = \frac{c-k}{800{,}3}\,T, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dT} = \frac{c-k}{800{,}3}. \tag{15}$$

*) Clausius, die mechanische Wärmetheorie, I. Bd., p. 137 und 280.

Wird dieser Werth in Gleichung (10) eingesetzt, ebenso r aus Gleichung (11) und c aus (13), so ergibt sich als Bedingung für k, damit auf der zugehörigen Nullcurve bei Druckabnahme eine Wärmemittheilung nöthig werde:

$$k < 1{,}013 - \frac{1145}{T}. \qquad (16)$$

Dieser Grenzwerth für k ist wegen des grösseren Zahlenfactors im zweiten, subtractiven Gliede stets kleiner als der für dieselbe Temperatur geltende Werth von h aus Gleichung (12). k muss aber grösser bleiben, als der letztere, wenn der zugehörige Punkt der Nullcurve nicht in den Raum für die überhitzten Dämpfe fallen soll. Die Bedingung (10) kann also durch wirklich gültige Curven nie erfüllt werden. Bei einer Zustandsänderung nach einer Nullcurve muss also stets mit einer Druckabnahme eine Wärmeentziehung verbunden sein.

Die vorstehend untersuchten Nullcurven gestatten einen bequemen Einblick in das Verhalten der gesättigten Dämpfe, wenn dieselben ihren Zustand bei constanter specifischer Wärme ändern, also nach dem Gesetze

$$dQ = k\,dT, \qquad (17)$$

wobei k irgend eine, hier ganz beliebige Constante bezeichnet. Diese Zustandsänderung findet sich zwar schon z. B. bei Herrmann, Compendium der mechanischen Wärmetheorie, p. 154, und Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 2. Auflage, p. 357, behandelt, aber ohne genauere Untersuchung des Verlaufes der specifischen Dampfmenge.

Der Vollständigkeit wegen möge die Gleichung der Curve hier auch noch entwickelt werden. Sie lässt sich am einfachsten aus der Fundamentalgleichung für gesättigte Dämpfe

$$dQ = T\left[\frac{dq}{T} + d\left(\frac{xr}{T}\right)\right] \tag{18}$$

herleiten und ergibt sich durch Verbindung derselben mit der Bedingungsgleichung (17), da noch $dq = c dT$ ist, zu

$$\frac{c-k}{T}\,dT + d\left(\frac{xr}{T}\right) = 0\,. \tag{19}$$

Setzt man, wie üblich,

$$\int_0^t \frac{c\,dT}{T} = \tau\,, \tag{20}$$

so erhält man durch Integration von (19) als genaue Gleichung der fraglichen Curve:

$$\tau - k \lg n\, T + \frac{xr}{T} = \text{Const.} \tag{21}$$

Nimmt man dagegen im Mittel, nach Gleichung (13), c constant an, so wird die angenäherte Gleichung

$$(c-k) \lg n\, T + \frac{xr}{T} = \text{Const.} \tag{22}$$

Ist k sehr nahe gleich c, so ist die letztere Form allerdings vielleicht zu wenig zuverlässig.

Beide Gleichungen gehen, wie leicht ersichtlich, aufzufassen als Erweiterungen der Gleichung der adiabatischen Curve, für welche $k = 0$ zu setzen wäre. Sie lassen sich aber, ebenso wie diese, nur bequem verwerthen, wenn der Druck als Urvariabele gegeben ist.

Man hat es hier übrigens wieder mit Schaaren von Curven zu thun, da ausser k noch eine willkürliche Constante in der Gleichung enthalten ist, die sich durch beliebige Wahl eines Punktes der Curve bestimmt.

Aus der allgemeinen Gleichung für die Wärmezuführung

$$dQ = dq + d\,(x\varrho) + A\,d\,L \tag{23}$$

folgt dann mit (17) das Differential der äusseren Arbeit zu

$$A\,d\,L = -(c - k)\,dT - d(x\varrho)\,. \tag{24}$$

Die Integration dieses Ausdruckes ist einfach.

Zur Untersuchung der Aenderung der specifischen Dampfmenge und des damit zusammenhängenden ganzen Verlaufes der Curven muss Gleichung (3) für dQ benutzt werden. In Verbindung mit (17) ergibt dieselbe zur Beurtheilung von dx die Beziehung:

$$r\,dx = -[c - k - (c - h)\,x]\,dT\,. \tag{25}$$

Leitet man die Zustandsänderung im Sinne abnehmender Temperatur, also auch abnehmenden Druckes, so ist $-dT > 0$. dx hat daher das gleiche Vorzeichen, wie die eckige Klammer. Diese gleich Null gesetzt, ergibt aber nach (7) die Gleichung derjenigen allgemeinen Nullcurve, welche zu dem in (17) enthaltenen Werthe von k gehört; wobei es zunächst gleichgültig bleibt, ob letztere reell ausfällt, oder nicht. Ist für einen betrachteten Punkt der Curve constanter specifischer Wärme x kleiner, als bei gleichem Drucke auf der zugehörigen Nullcurve, so ist auch das Volumen kleiner und der Punkt liegt innerhalb der Nullcurve, d. h. auf der Seite des Coordinaten-Anfangspunktes. Umgekehrt liegt er bei grösserem x ausserhalb.

Es ist daher nach Gleichung (25)

$$\left.\begin{array}{c}
a) \text{ innerhalb der Nullcurve:} \\
x < \frac{c-k}{c-h},\ [c-k-(c-h)\,x] > 0\,,\ \text{also}\ \frac{dx}{dT}\ \text{und}\ \frac{dx}{dp} < 0\,, \\
b) \text{ auf der Nullcurve:} \\
x = \frac{c-k}{c-h},\ [c-k-(c-h)\,x] = 0\,,\ \text{also}\ \frac{dx}{dT}\ \text{und}\ \frac{dx}{dp} = 0\,, \\
c) \text{ ausserhalb der Nullcurve:} \\
x > \frac{c-k}{c-h},\ [c-k-(c-h)\,x] < 0\,,\ \text{also}\ \frac{dx}{dT}\ \text{und}\ \frac{dx}{dp} > 0\,.
\end{array}\right\}(26)$$

Hieraus folgt, dass sich Curven gleicher constanter specifischer Wärme gegenüber ihrer Nullcurve ebenso verhalten, wie die adiabatischen Curven gegenüber der Hauptnullcurve. Innerhalb beginnend tritt bei Annäherung an die Nullcurve eine Verdampfung auf, im Schnittpunkte mit der Nullcurve erreicht die specifische Dampfmenge ein Maximum, ausserhalb der Nullcurve findet wieder Condensation statt. Bei zunehmendem Drucke verläuft die Aenderung von x umgekehrt. Allgemein lässt sich also sagen, dass auf einer Curve constanter specifischer Wärme bei Annäherung an die zugehörige Nullcurve Verdampfung, bei Entfernung von derselben Condensation eintritt. Im Schnittpunkte mit der Nullcurve findet, weil dort $dx = 0$, Berührung mit einer Curve constanter specifischer Dampfmenge statt; die Annäherung an die letztere erfolgt von ihrer inneren Seite her, weil dem Werthe $dx = 0$ ein Maximum von x entspricht. Eine allgemeine Nullcurve liesse sich daher auch definiren als der geometrische Ort der Berührungspunkte der Curven constanter specifischer Dampfmengen mit den Curven derjenigen constanten Wärme k, welche in der Gleichung der Nullcurve auftritt.

Wenn k ausserhalb der Grenzen der Bedingung (8) liegt, so wird die zugehörige Nullcurve imaginär. Dann besitzen die Curven $dQ = kdT$ auch kein Maximum der specifischen Dampfmenge; die letztere ändert sich vielmehr auf der ganzen, überhaupt nur Geltung besitzenden Länge der Curve im gleichen Sinne. Ist $k > c$, also auch positiv, so ist die imaginäre Nullcurve auf der Seite des flüssigen Zustandes zu suchen. Es liegt dann Fall c) der vorigen Zusammenstellung vor, so dass also für abnehmenden Druck eine ununterbrochene Condensation eintreten muss. Wenn dagegen $k < h$, also auch negativ wird, so rückt die imaginäre Nullcurve über die Grenzcurve hinaus in den Raum für überhitzte Dämpfe. Man hat es dann mit Fall a) zu thun; bei abnehmendem Drucke wächst x, bis die Curve constanter specifischer Wärme schliesslich im Schnittpunkte mit der Grenzcurve ihre Bedeutung verliert.

Die Gleichung der hier untersuchten Curven lässt sich zwar nicht in der gewöhnlichen Form $f(p, v) = 0$ aufstellen, doch kann der allgemeine Verlauf der Curven immerhin angegeben werden. So lange nämlich $k < 0$ genommen wird, wenn also für Abnahme der Temperatur und des Druckes eine Wärmemittheilung erforderlich ist, muss die Curve in allen ihren Punkten flacher verlaufen, als die durch die letzteren gehenden adiabatischen Curven. Dann ist mit abnehmendem Drucke eine ununterbrochene Volumenzunahme verbunden. Ist k zwar positiv, aber numerisch noch hinreichend klein, so wird dasselbe der Fall sein. Erst wenn k grössere positive Werthe angenommen hat, wenn also eine bedeutende Wärmeentziehung vorliegt, könnte sich vielleicht das Volumen im gleichen Sinne ändern, wie der Druck.

Die Grenze für k, bei welcher ein solcher Verlauf der Curve eintreten würde, lässt sich leicht bestimmen; man muss zu diesem Zwecke die Zustandsänderung nach dem Gesetze $dQ = kdT$ mit einer solchen bei constantem Volumen vergleichen. Die letztere erfordert bei zunehmender Temperatur eine Wärmemittheilung, welche nach Gleichung (23), da dann $dL = 0$ ist, den Werth

$$dQ_v = dq + d(x\varrho) \tag{27}$$

annimmt. Dabei bleibt nach Gleichung (5) wegen $v = \text{Const.}$ auch $xu = \text{Const.}$ Das letzte Glied in Gleichung (27) lässt sich daher schreiben:

$$d(x\varrho) = d\left(\frac{\text{Const.}}{u}\varrho\right) = \text{Const.}\ d\left(\frac{\varrho}{u}\right),$$

oder auch, mit Rücksicht auf die folgende Umformung, da ϱ/u eine Function von T ist,

$$d(x\varrho) = xu\frac{d}{dT}\left(\frac{\varrho}{u}\right)dT. \tag{28}$$

Ersetzt man ausserdem in 27 dq durch cdT, so nimmt der Ausdruck für dQ_v die Gestalt an:

$$dQ_v = \left[c + xu\frac{d}{dT}\left(\frac{\varrho}{u}\right)\right]dT. \tag{29}$$

Sollen nun bei einer Zustandsänderung mit constanter specifischer Wärme dp und dv das gleiche Vorzeichen haben, so muss für eine bestimmte Temperaturerhöhung dT eine grössere Wärmemenge dQ zugeführt werden, als für eine gleich grosse Temperaturzunahme bei constantem Volumen erforderlich wäre. Die Bedingung dafür, dass bei $dQ = kdT$ $dp/dv > 0$ ausfällt, wird also sein:

$$dQ > dQ_v, \tag{30}$$

und hieraus folgt die gesuchte Grenzbedingung für k nach (29) zu

$$k > c + xu \frac{d}{dT}\left(\frac{\varrho}{u}\right). \tag{31}$$

Der Quotient ϱ/u nimmt, wie aus den Dampftabellen folgt, mit der Temperatur zu, und zwar verhältnissmässig immer rascher. Der Differentialquotient $d(\varrho/u)/dT$ ist daher positiv und wächst gleichfalls mit der Temperatur. Das letzte Glied in Gleichung (31) wird folglich auch positiv, so dass alle hier in Betracht kommenden Werthe von k ausserhalb der oberen Grenze der Bedingung (8) liegen. Daraus folgt aber weiter, dass die zu dieser Gruppe von Curven constanter specifischer Wärme gehörigen Nullcurven sämmtlich nach der Seite der tropfbaren Flüssigkeit hin imaginär sind. Man hat es daher mit Fall c) der Zusammenstellung (26) zu thun, bei welchem sich x und p auf der ganzen Länge der Curve im gleichen Sinne änderten.

Von den drei Factoren des letzten Gliedes in Gleichung (31) wachsen hiernach zwei mit der Temperatur, nämlich $d(\varrho/u)/dT$ und x, letzterer von $x = 0$ bis $x = 1$. u dagegen nimmt ab, bei kleinen Pressungen rasch, bei grossen jedoch nur langsam. Für diese wächst daher das ganze zweite Glied jedenfalls gleichzeitig mit der Temperatur, bei jenen am Anfang, d. h. von $x = 0$ an, ebenso. Es ist also wohl wahrscheinlich, dass dieses Wachsen überhaupt ein continuirliches ist, und dass nicht etwa dazwischen auf einem kürzeren Intervall die Abnahme von u überwiegt. Zur Entscheidung dieser Frage wäre es nöthig, einige Curven genauer numerisch nachzurechnen. Für den hier unmittelbar vorliegenden Zweck ist eine solche Rechnung aber entbehrlich.

Bezeichnet man die Werthe für $x=0$ mit dem Index 0, diejenigen für $x=1$ mit 1, und ist zunächst

$$c_0 < k < c_1 + u_1 \left[\frac{d}{dT}\left(\frac{\varrho}{u}\right)\right]_{T=T_1}, \tag{32}$$

so liegt für $x=0$ k über der Grenze aus (31). Für kleinere Pressungen wird daher zunächst v mit p wachsen. Ist aber bei einer Temperatur T', mit x', gerade

$$k = c' + x'u' \left[\frac{d}{dT}\left(\frac{\varrho}{u}\right)\right]_{T=T'} \tag{33}$$

geworden, so ist dort $dQ = dQ_v$, und die Curve constanter specifischer Wärme besitzt eine verticale Tangente. Bei höheren Pressungen ändern sich dann v und p im entgegengesetzten Sinne. Für den unwahrscheinlichen Fall, dass das zweite Glied in (31) während eines kurzen Temperaturintervalles mit wachsendem Drucke abnehmen würde, müssten drei Werthe von T' existiren, welche der Gleichung (33) genügen. Dann hätte die Curve $dQ = k\,dT$ auch drei verticale Tangenten, die erste und letzte einem Maximum, die mittlere einem relativen Minimum des Volumens entsprechend.

Wenn endlich k so gross angenommen wird, dass

$$k > c_1 + u_1 \left[\frac{d}{dT}\left(\frac{\varrho}{u}\right)\right]_{T=T_1} \tag{34}$$

ist, so wird die Bedingung (31) auf der ganzen Länge der Curve constanter specifischer Wärme, von $x=0$ bis $x=1$, erfüllt; es ändert sich also das Volumen auch ununterbrochen im gleichen Sinne, wie der Druck.

Die durch einen bestimmten, aber sonst beliebig wählbaren Punkt hindurchgehenden Curven constanter specifischer Wärme können hiernach folgende verschiedene Gestalten annehmen:

1. $k < h$: Mit sinkendem Drucke wachsen v und x, die Curve schneidet schliesslich die Grenzcurve zwischen dem gesättigten und überhitzten Dampfzustande.

2. $c > k > h$: v wächst mit abnehmendem Drucke auch ununterbrochen, x nimmt gleichzeitig anfangs zu, um nach dem Schnitte mit der zugehörigen Nullcurve wieder abzunehmen. Liegt bei den grösseren Werthen von k die Nullcurve innerhalb des Ausgangspunktes, so nimmt bei abnehmendem Drucke auch x ununterbrochen mit ab; die Erreichung des Maximums von x erfordert also eine Drucksteigerung. Die Grenzcurve wird von diesen Curven nicht getroffen.

3. $k > c$: x nimmt mit dem Drucke nach beiden Seiten hin ab oder zu. Das Volumen hat bei den kleineren Werthen von k ein Maximum, bei den grösseren dagegen ändert es sich auf der ganzen Länge der Curve im gleichen Sinne, wie der Druck.

In den vorstehenden Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass auf einer Curve constanter specifischer Wärme bei Annäherung an die zugehörige Nullcurve Verdampfung eintritt, umgekehrt bei Entfernung von derselben Condensation. Dieses Resultat lässt sich auch so ausdrücken, dass, wenn man sich auf einer Curve constanter specifischer Wärme ihrem Schnittpunkte mit der Nullcurve nähern will, man sich im Sinne der wachsenden Werthe von x fortbewegen muss. Ist die Nullcurve imaginär, und zwar zunächst dadurch, dass $k < h$ angenommen wurde, so ergab Gleichung (7) $x > 1$, und man musste die Nullcurve im überhitzten Raume voraussetzen, so dass sie also wirklich im Sinne der wachsenden Werthe von x imaginär geworden wäre. Wenn dagegen die Nullcurve dadurch ihre Reellität verloren hat, dass $k > c$ geworden ist, dass also auf ihr $x < 0$ wäre, so könnte es scheinen, dass, um auf einer Curve constanter specifischer Wärme zu ihr zu gelangen, eine Bewegung im Sinne der abnehmenden Werthe von x nöthig wäre.

Diesen scheinbaren Widerspruch kann man leicht beseitigen, wenn man k nicht von Null aus nach beiden Seiten hin dem absoluten Werthe nach zunehmen lässt, sondern voraussetzt, dasselbe gehe immer im gleichen Sinne durch negative Werthe über das Unendliche zu positiven Werthen über, um schliesslich wieder bis Null abzunehmen. x wird dabei zuerst positiv, dann durch unendlich grosse Werthe negativ, schliesslich aber wieder positiv, noch ehe k wieder den Werth Null angenommen hat. Die Nullcurven nähern sich gleichzeitig, von der Hauptnullcurve mit $k = 0$ ausgehend, anfangs der Grenzcurve, rücken dann über dieselbe, imaginär werdend, zunächst in den Raum für überhitzte Dämpfe, und gelangen weiterhin durch's Unendliche in den Raum für tropfbare Flüssigkeit, um endlich wieder innerhalb der Hauptnullcurve reell zu werden. Fasst man die Lage der imaginären Nullcurven in dieser Weise auf, so muss man sich, um auf einer Curve constanter specifischer Wärme zu ihnen zu gelangen, auch bei grossen Werthen von k über den überhitzten Raum durch das Unendliche in den flüssigen Raum bewegen, also wie es sein soll im Sinne der, allerdings durch das Unendliche, aber doch ununterbrochen, wachsenden Werthe von x. Damit fällt der scheinbare Widerspruch fort.

Zürich, November 1884.