Ueber einige Flächen, auf denen Schaaren von Kegelschnitten liegen

von

Dr. A. Weiler.

Von diesen Flächen sind namentlich einige von der 4. und der 5. Ordnung näher untersucht, ihre Eigenschaften wurden zumeist durch Abbildung auf die Ebene gewonnen. Viele dieser Eigenschaften sind nun aber rein geometrisch sehr leicht herzuleiten, indem man von einer geometrischen Erzeugung der Flächen ausgeht. Diese Methode gestattet auch einen Einblick in die vorkommenden Specialfälle, von denen einige neben den allgemeinen erwähnenswerth erscheinen.

Schaaren von Kegelschnitten auf einer Fläche können dadurch entstehen, dass man den Flächen zweiten Grades eines einstufigen Systems die Ebenen einer Torse zuordnet und jedesmal die entsprechenden Flächen und Ebenen zum Schnitt bringt. Ich beschränke mich hier (in dieser vorläufigen Mittheilung) auf den Fall, dass die Flächen zweiten Grades eines Büschels den Ebenen einer Torse zweiter Klasse projectiv zugeordnet sind.

Im allgemeinen Fall entsteht alsdann die Fläche 5. Ordnung F^5, welche eine Doppelcurve 4. Ordnung, 1. Species (die Grundcurve des Flächenbüschels) hat. Diese Fläche ist bereits eingehend untersucht und es soll angenommen werden, es sei die Torse 2. Klasse ein doppelt projicirender Kegel K der Grundcurve c^4 des Flächenbüschels. Die Fläche F^5 hat in diesem Falle c^4 zur Rückkehrcurve. Die Torse der Tangentialebenen an F^5 längs c^4 ist von der 6. Klasse, sie besitzt eine Doppelcurve 3. Klasse in der Ebene S, welche der Kegelspitze S mit Bezug auf den Flächenbüschel conjugirt ist. Die Fläche F^5 entspricht sich selbst in einer involutorischen Centralcollineation mit dem Centrum S und der Ebene S. Dem Kegel K, als Fläche des Büschels betrachtet, entspricht eine seiner Tangentialebenen E. Der Querschnitt von F^5 mit E besteht aus der Berührungslinie von E mit K, dreifach zählend und einem Kegelschnitte f^2, welcher kein Kegelschnitt der Schaar ist. Er trifft c^4 in zwei Punkten und ist jener involutorischen Collineation ebenfalls unterworfen. Die Kegelschnittschaar lässt sich nun mit Hülfe von c^4 und f^2 als Leitcurven höchst einfach erzeugen: In jeder Ebene von K construirt man den Kegelschnitt, welcher c^4 doppelt berührt und f^2 (doppelt) schneidet. Der Kegelschnitt der Schaar wird hierbei viermal zu einem Geradenpaar und einmal zu einer Doppelgeraden.

Auf zwei Arten ist es möglich, dass von F^5 sich eine Ebene absondert. Entweder enthält der Flächenbüschel eine aus zwei Ebenen bestehende Fläche, welcher in der Torse die eine dieser Ebenen selbst entspricht. Die Flächen des Büschels gehen jetzt sämmtlich durch zwei Kegelschnitte p^2 in der Ebene P, q^2 in Q und es soll der zerfallenden Fläche PQ des Büschels die Ebene P entsprechen. Die entstehende Fläche F^4 hat q^2 zum Doppelkegelschnitt, währenddem ihr p^2 einfach aufgeschrieben ist. Jede Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt lässt sich in dieser Weise erzeugen; hieraus ergeben sich Sätze über die Kegelschnitte der Fläche, welche, auf die zerfallenen Kegelschnitte angewandt, Sätze über die Gruppirung der 16 Geraden der Fläche liefern. Weil die Ordnung der Fläche gleich ist 4, so hat jede Kegelschnittschaar eine adjungirte; beide entstehen aus zwei Flächenbüscheln (durch q^2), zusammen mit demselben Kegel. Aus den 16 Geraden der Fläche leitet man umgekehrt 10 Kegelschnittschaaren her, dazu gehörend 5 Kegel (doppelt berührender Ebenen). Diese (Kummer'schen) Kegel berühren F^4 nach Curven 4. Ordnung, 1. Species, und schneiden q^2 in den Pinchpunkten. — Geht der ursprüngliche Kegel durch den Doppelkegelschnitt q^2 (wozu erforderlich ist, dass p^2 und q^2 sich berühren), so entsteht die Fläche F^4 mit Rückkehrkegelschnitt, für welche man z. B. sofort findet, dass von den 5 Kegeln nur noch 3 eigentliche vorhanden sind, deren Spitzen in Gerader liegen; sie veranlassen 6 Kegelschnittschaaren. An Stelle der übrigen 4 Schaaren tritt hier eine »Involutionsschaar« von Kegelschnitten durch die Clospunkte. Die 3 eigentlichen Kegel gehen durch q^2 und berühren F^4 nach 3 Kegelschnitten der Involutionsschaar.

Wenn bei F^4 mit Doppelkegelschnitt die Spitze eines Kummer'schen Kegels in die Ebene der Doppelcurve fällt, so schneiden die Kegelschnitte der zugehörigen adjungirten Schaaren und namentlich auch die unter ihnen vorkommenden 8 Geradenpaare q^2 in Punktepaaren einer Involution, welcher die Pinchpunkte als zwei weitere Paare angehören. Diese Fläche entspricht sich selbst in einer involutorischen, centrischen Collineation, deren Centrum in die ausgezeichnete Kegelspitze fällt.

Von F^5 sondert sich eine Ebene auch dann ab, wenn die Flächen des Büschels sich längs eines Kegelschnittes p^2 berühren und der Fläche, welche aus der Ebene von

p^2 besteht, diese Ebene selbst entspricht. Das Erzeugniss ist alsdann eine F^4 mit doppeltem Kegelschnitt p^2, bei welcher jedoch die längs p^2 umschriebene Developpable in zwei Kegel 2. Klasse zerfällt. Die Fläche steht in der Mitte zwischen der allgemeinen mit Doppelkegelschnitt und derjenigen mit Cuspidalkegelschnitt. Von den 16 Geraden der Fläche berühren hier an p^2 8 den einen, 8 den anderen der genannten Kegel; die Spitze eines Kummer'schen Kegels liegt hier nothwendig in der Ebene von p^2. (Die von diesem Kegel herrührenden adjungirten Kegelschnittschaaren schneiden p^2 in Punkten einer Involution; die Pinchpunkte vereinigen sich paarweise in zwei Punkte, welche ein Paar jener Involution bilden; und umgekehrt.) — Fallen die beiden, F^4 an p^2 berührenden Kegel zusammen, so entsteht wieder eine F^4 mit Cuspidalkegelschnitt.

Ueber einige Expansions-Curven der gesättigten Dämpfe

von

Professor Albert Fliegner.

In einer Abhandlung »Zur Theorie der Dämpfe« im XX. Bande der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, hat Weyrauch eine für die Discussion des Verhaltens der gesättigten Dämpfe werthvolle Curve eingehender untersucht, welcher er den Namen der Nullcurve beigelegt hat. Dieselbe ist, kurz ausgedrückt, der geometrische Ort der Berührungspunkte je einer adiabatischen Curve mit je einer Curve constanter specifischer Dampf-