Bemerkungen zur nautischen Astronomie.

Von **Dr. A. Beck.**

Die Methode, aus Beobachtungen eines Gestirns in correspondirenden Höhen die Zeit (Länge) zu bestimmen, erfordert gewöhnlich die Berechnung gewisser Correctionsgrössen. Der allgemeinste Fall findet statt, wenn von der ersten zur zweiten Beobachtung die Coordinaten des Gestirns und des Beobachtungsortes sowie die Zenithdistanz sich um kleine Grössen ändern. Seien α, δ, φ, λ, z Rectascension, Declination, Breite, westliche Länge und Zenithdistanz entsprechend der ersten Beobachtung, so ist zu bestimmen, um welche Grösse die erste Uhrablesung u_1 sich ändern würde, wenn obige Grössen die Werthe $\alpha + \Delta\alpha$, $\delta + \Delta\delta$, ... entsprechend der zweiten Beobachtung annehmen würden.

Die der Aenderung $\Delta\lambda$ entsprechende Aenderung von u_1 ist offenbar $\Delta\lambda$ selbst. Ist das Gestirn die Sonne, so wird der Aenderung von α dadurch Rechnung getragen, dass man eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr benützt. Will man auch die Aenderung der Zeitgleichung berücksichtigen, so ist u_1 um die Zunahme der Zeitgleichung zu vermehren.

Der Einfluss der 3 übrigen Aenderungen ergibt sich durch Differentiation der Formel

1) $$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \,.\, \cos s$$

Man findet für die Aenderung des Stundenwinkels s, welche die gesuchte Aenderung von u_1 ist, die beiden Ausdrücke:

$$2)\quad \varDelta s = \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin s} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} s}\right)\varDelta\delta + \left(\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin s} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg} s}\right)\varDelta\varphi + \frac{\sin z}{\cos\varphi\cos\delta\sin s}\varDelta z$$

$$3)\quad \varDelta s = \frac{\operatorname{cotg} q}{\cos\delta}\varDelta\delta - \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos\varphi}\varDelta\varphi + \frac{\sin z}{\cos\varphi\cos\delta\sin s}\varDelta z$$

wo a das Azimuth, q den parallactischen Winkel bezeichnet.

So einfach sich die Rechnung nach 2) in der Praxis gestaltet, so möchte es doch für manche Fälle von Interesse sein, auf andere Formeln hinzuweisen, welche für denselben Zweck gebraucht werden können.

Statt der Formel 1) kann man nämlich die bekannten Umformungen derselben anwenden:

$$4)\quad \sin^2\tfrac{1}{2}s = \frac{\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)}{\cos\delta\cos\varphi}$$

$$5)\quad \cos^2\tfrac{1}{2}s = \frac{\cos\frac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)\cos\frac{1}{2}(z+\varphi+\delta)}{\cos\delta\cos\varphi}$$

$$6)\quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}s = \frac{\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)\cos\frac{1}{2}(z+\varphi+\delta)}$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man aus denselben:

$$\begin{aligned} 7^{a})\quad \operatorname{cotg}\frac{s}{2}\,.\,\varDelta s = {} & \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(\varDelta z-\varDelta\varphi-\varDelta\delta) \\ & + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(\varDelta z+\varDelta\varphi+\varDelta\delta) \\ & + \operatorname{tg}\delta\,.\,\varDelta\delta \\ & + \operatorname{tg}\varphi\,.\,\varDelta\varphi \end{aligned}$$

$$7^b)\quad \operatorname{cotg}\frac{s}{2}\,.\,\Delta s = \left(-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)+2\operatorname{tg}\delta\right)\frac{\Delta\delta}{2}$$
$$+\left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)+2\operatorname{tg}\varphi\right)\frac{\Delta\varphi}{2}$$
$$+\left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\right)\frac{\Delta z}{2}$$

$$8^a)\quad \operatorname{tg}\frac{s}{2}\,.\,\Delta s = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(-\Delta z+\Delta\varphi+\Delta\delta)$$
$$+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(\Delta z+\Delta\varphi+\Delta\delta)$$
$$-\operatorname{tg}\delta\,.\,\Delta\delta$$
$$-\operatorname{tg}\varphi\,.\,\Delta\varphi$$

$$8^b)\quad = \left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)-2\operatorname{tg}\delta\right)\frac{\Delta\delta}{2}$$
$$+\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)-2\operatorname{tg}\varphi\right)\frac{\Delta\varphi}{2}$$
$$+\left(-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\right)\frac{\Delta z}{2}$$

$$9^a)\quad \frac{2}{\sin s}\,.\,\Delta s = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(\Delta z+\Delta\varphi-\Delta\delta)$$
$$+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(\Delta z-\Delta\varphi+\Delta\delta)$$
$$+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(-\Delta z+\Delta\varphi+\Delta\delta)$$
$$+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\,.\,\tfrac{1}{2}(\Delta z+\Delta\varphi+\Delta\delta)$$

$9^b)$

$$\left(-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\right)\frac{\Delta\delta}{2}$$
$$+\left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\right)\frac{\Delta\varphi}{2}$$
$$+\left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta)+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(z-\varphi+\delta)-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\right)\frac{\Delta z}{2}$$

Diese Formeln empfehlen sich zunächst in theoretischer Hinsicht durch die einfache Gesetzmässigkeit ihres Baues. Aber auch für die praktische Anwendung mögen sie Vortheile gewähren, am meisten in dem allgemeinsten Fall, wo keine der 3 Grössen $\Delta\delta$, $\Delta\varphi$, Δz verschwindet. In diesem letztern Fall wird man eine der Formeln a) benützen und wird die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen aufschlagen. Benützt man dagegen die Formeln in der Gestalt b), so werden solche Tafeln, welche die natürlichen Werthe der trigonometrischen Funktionen geben, von Vortheil sein, wie z. B. die Tafeln von F. G. Gauss.

Am einfachsten gestaltet sich aber die Rechnung unter Anwendung der logarithmischen Differenzen. Die Coefficienten in den Formeln 7)—9) sind Differentialquotienten von Logarithmen und können daher für praktische Zwecke durch die zu ihnen proportionalen logarithmischen Differenzen ersetzt werden.

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Log. Diff.	von	proportional zu
Δ_1	$\sin\frac{1}{2}[z+(\varphi-\delta)]$	$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}[z+(\varphi-\delta)]$
Δ_2	$\sin\frac{1}{2}[z-(\varphi-\delta)]$	$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}[z-(\varphi-\delta)]$
Δ_3	$\cos\frac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)$	$-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(-z+\varphi+\delta)$
Δ_4	$\cos\frac{1}{2}(z+\varphi+\delta)$	$-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z+\varphi+\delta)$
D_1	$\cos\delta$	$-\operatorname{tg}\delta$
D_2	$\cos\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$
Δ'	$\sin\frac{1}{2}s$	$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}s$
Δ''	$\cos\frac{1}{2}s$	$-\operatorname{tg}\frac{1}{2}s$
Δ_0	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}s$	$\frac{2}{\sin s}$

Dann ist z. B.

$$\lg \sin \tfrac{1}{2}(z + \varDelta z + \varphi + \varDelta\varphi - \delta - \varDelta\delta) = \lg \sin \tfrac{1}{2}(z + \varphi - \delta) + k \,.\, \varDelta_1 \,.\, (\varDelta z + \varDelta\varphi - \varDelta\delta)$$

wo k constant ist, so lange das Winkelintervall, zu welchem $\varDelta_1$ gehört, die Stellenzahl der Logarithmen und die Einheit von $\varDelta z, \ldots$ unverändert bleiben.

Auf diese Weise erhalten wir folgende Formeln:

$$\begin{array}{llll}
 & & \text{a)} & \text{b)} \\
10) & \varDelta' . \varDelta s = & \varDelta_1 . \tfrac{1}{2}(\varDelta z + \varDelta\varphi - \varDelta\delta) = & \tfrac{1}{2}(-\varDelta_1 + \varDelta_2 - 2D_1)\varDelta\delta \\
 & & + \varDelta_2 . \tfrac{1}{2}(\varDelta z - \varDelta\varphi + \varDelta\delta) & + \tfrac{1}{2}(\varDelta_1 - \varDelta_2 - 2D_2)\varDelta\varphi \\
 & & - D_1 . \varDelta\delta & + \tfrac{1}{2}(\varDelta_1 + \varDelta_2)\varDelta z \\
 & & - D_2 . \varDelta\varphi &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
11) & \varDelta'' . \varDelta s = & \varDelta_3 . \tfrac{1}{2}(-z + \varphi + \delta) = & \tfrac{1}{2}(\varDelta_3 + \varDelta_4 - 2D_1) . \varDelta\delta \\
 & & + \varDelta_4 . \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta) & + \tfrac{1}{2}(\varDelta_3 + \varDelta_4 - 2D_2) . \varDelta\varphi \\
 & & - D_1 . \varDelta\delta & + \tfrac{1}{2}(-\varDelta_3 + \varDelta_4) . \varDelta z \\
 & & - D_2 . \varDelta\varphi &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
12) & \varDelta_0 . \varDelta s = & \varDelta_1 . \tfrac{1}{2}(\varDelta z + \varDelta\varphi - \varDelta\delta) = & \tfrac{1}{2}(-\varDelta_1 + \varDelta_2 - \varDelta_3 - \varDelta_4) . \varDelta\delta \\
 & & + \varDelta_2 . \tfrac{1}{2}(\varDelta z - \varDelta\varphi + \varDelta\delta) & + \tfrac{1}{2}(\varDelta_1 - \varDelta_2 - \varDelta_3 - \varDelta_4) . \varDelta\varphi \\
 & & - \varDelta_3 . \tfrac{1}{2}(-\varDelta z + \varDelta\varphi + \varDelta\delta) & + \tfrac{1}{2}(\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 - \varDelta_4) . \varDelta z \\
 & & - \varDelta_4 . \tfrac{1}{2}(\varDelta z + \varDelta\varphi + \varDelta\delta) &
\end{array}$$

Bei Anwendung dieser Formeln sind die logarithmischen Differenzen natürlich algebraisch zu nehmen, so dass z. B. die Differenz für cos δ negativ oder positiv ist, je nachdem δ positiv und negativ ist. Ferner ist zu beachten, dass $\varDelta s$ die Zunahme des a b s o l u t e n Werthes des Stundenwinkels ist. In Folge dessen ist für einen östlich vom Meridian stehenden Stern Δs von der Uhrablesung algebraisch zu subtrahiren.

Wendet man fünfstellige Logarithmentafeln an, die von Minute zu Minute fortschreiten, so haben die logarithmischen Differenzen für alle Winkel zwischen 7° und 83° höchstens zwei Stellen. Wollte man eine grössere Genauigkeit haben, so müsste man die Differenzen für ein grösseres Winkelintervall nehmen. Für die Praxis werden Differenzen mit 2—3 Stellen eine genügende Genauigkeit gewähren und dann wird es sich empfehlen, die Bildung der Produkte und Quotienten ohne Logarithmen z. B. unter Anwendung der Crelle'schen Rechentafeln auszuführen.

Obige Formeln haben in dem Fall, dass aus Beobachtungen der Sonne in correspondirenden Höhen die Länge allein bestimmt werden soll, den Nachtheil, dass sie die Kenntniss der wahren Zenithdistanz erfordern, wobei übrigens keine grosse Genauigkeit verlangt würde. Dieser Nachtheil fällt fort, sobald die wahre Zenithdistanz ohnehin bekannt sein muss, wie es bei der Bestimmung von Breite und Länge aus zwei Beobachtungen der Fall ist. Am günstigsten endlich gestaltet sich die Anwendung obiger Formeln, wenn aus der gemessenen Höhe der Stundenwinkel unter Anwendung einer der Formeln 4)—6) berechnet werden muss, wo dann dieselben Winkel ohnehin aufgeschlagen werden müssen, für welche die logarithmischen Differenzen verlangt werden.

Sei z. B. aus zwei nahezu gleichen Sonnenhöhen Breite und Länge zu bestimmen unter der Voraussetzung, dass das Schiff in der Zwischenzeit seinen Ort um $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ verändert habe und dass die zweite Zenithdistanz um Δz grösser sei als die erste.

Man berechne nach Formel 4) unter Annahme eines Näherungswerthes φ_1 den Stundenwinkel s_1 für die erste Beobachtung und schreibe hiebei gleichzeitig die logarithmischen Differenzen heraus, welche erforderlich sind, um nach Formel 10) die zweite Uhrablesung u_2 auf den Schiffsort, die Sonnendeclination, die Zeitgleichung und die Zenithdistanz bei der ersten Beobachtung zu reduciren (u_2'). Dann ist

$$s = \frac{u_2' - u_1}{2}$$

der wirkliche Stundenwinkel bei der ersten Beobachtung, wodurch die Länge bei der ersten Beobachtung bestimmt ist.

Sei nun für die wahre Breite φ und den Stundenwinkel s bei der ersten Beobachtung

$$\varphi = \varphi_1 + \varDelta\varphi_1, \qquad s = s_1 + \varDelta s_1$$

so liefert dieselbe Formel 10), indem man $\varDelta\delta = \varDelta z = o$ setzt:

$$\varDelta\varphi_1 = \frac{2 \,.\, \varDelta'}{\varDelta_1 - \varDelta_2 - 2\,D_2} \,.\, \varDelta s_1$$

wodurch die Breite in einfachster Weise bestimmt ist.

Dieses letztere Verfahren in Verbindung mit der Anwendung logarithmischer Differenzen bietet auch in der allgemeinen Aufgabe, aus zwei Höhen und den Greenwicher Zeiten Breite und Länge zu bestimmen, beachtenswerthe Vortheile dar. Es wird dabei in einfachster Weise auf dem genaueren Weg der Rechnung dasselbe ausgeführt, was die Sumner'sche Methode der Positionslinien auf graphischem Wege ausführt.

Lässt man in der Formel 4) φ variiren, so variirt auch s und damit die (westliche) Länge λ, und die zusammengehörigen Werthe φ, λ müssen den Punkten eines Positionskreises entsprechen. Zwei benachbarte Punkte φ, λ; $\varphi + \Delta\varphi$, $\lambda + \Delta\lambda$ geben also eine Tangente des Positionskreises.

Sei a' das Azimuth dieser Tangente (von Süd über West), so ergibt sich aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda \,.\, \cos\varphi$:

13) $$-\operatorname{tg} a' = \frac{\Delta\lambda \,.\, \cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

Andererseits erhält man aus 3), indem man $\Delta\delta = \Delta z = o$ setzt:

14) $$\Delta s = -\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos\varphi} \,.\, \Delta\varphi$$

Da $\Delta s = -\Delta\lambda$, so folgt hieraus:

15) $$\operatorname{cotg} a = \frac{\Delta\lambda \,.\, \cos\varphi}{\Delta\varphi} = -\operatorname{tg} a'$$

Hiedurch ist der evidente Satz ausgedrückt, dass die Positionslinie zur Peilung des Gestirns senkrecht steht.

Seien nun z. B. zwei Sonnenhöhen gemessen und seien u_1 und u_2 die aus den Uhrablesungen abgeleiteten wahren Greenwicher Zeiten. Nun berechne man nach 4) für einen möglichst angenäherten Werth φ der Breite aus den beiden Declinationen und Höhen der Sonne die zugehörigen Stundenwinkel s_1 und s_2 und gleichzeitig unter Anwendung der logarithmischen Differenzen den Coefficienten:

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2 - 2\,D_2}{2\,\Delta'}$$

für jede der beiden Beobachtungen (F_1, F_2).

Dann hat man für die Verbesserungen der berechneten Stundenwinkel und der angenommenen Breite:

$$\varDelta s_1 = F_1 \,.\, \varDelta \varphi\,, \qquad \varDelta s_2 = F_2 \,.\, \varDelta \varphi$$

$$s_2 + \varDelta s_2 - (s_1 + \varDelta s_1) = u_2 - u_1\,,$$

woraus

$$\varDelta \varphi = \frac{u_2 - u_1 - (s_2 - s_1)}{F_2 - F_1}$$

$$\lambda = u_1 - s_1 - F_1 \,.\, \varDelta \varphi\,.$$

Bei einer etwaigen Aenderung des Standpunktes würde zur Reduction der ersten Beobachtung auf den Standpunkt der zweiten an die erste Uhrablesung eine Correction anzubringen sein, die sich zusammensetzt aus der Versegelung in Länge und der mit F_1 multiplicirten Versegelung in Breite.

Bei Anwendung der graphischen Methode Sumners müssen für einen Werth von φ die beiden Stundenwinkel jedenfalls auch berechnet werden. Nach obiger Methode ergeben sich die Verbesserungen von Breite und Länge durch eine Nebenrechnung, die sich bei Anwendung eines praktischen Schemas überaus einfach gestaltet und bei welcher die trigonometrischen Tafeln nicht weiter gebraucht werden. Auch ist, da das Azimuth nicht vorkommt, weder eine Peilung noch die Anwendung von Azimuthtafeln erforderlich.

Riga, Januar 1883.