Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungs-Methoden.

Von **Wilh. Fiedler.**

(Nach zwei Vorträgen in der Gesellschaft im Februar und Juni 1882.)

Bei Gelegenheit der Entwickelung neuer Projectionsmethoden, welche ich in der IV. meiner «Geometr. Mittheilungen» vom Jahre 1879 (siehe diese «Vierteljahrschrift» Bd. XXIV. p. 205—226) vorlegte, habe ich die Bezeichnung «elementare Projectionsmethoden» dahin näher bestimmt (a. a. O. p. 220), dass sie denjenigen Abbildungsmethoden zukomme, welche sich an den natürlichen Vorgang beim Sehen anschliessen, natürlich, wie es bei geometrischen Abbildungsmethoden nicht anders möglich ist, in der Form mathematischer Abstraction. Ich werde die Gruppe dieser elementaren geometrischen Abbildungsmethoden im Folgenden mit besonderer Berücksichtigung ihrer ich will sagen inductiven Elemente und an Hand ihrer geschichtlichen Entwickelung besprechen.

Diese Entwickelungsgeschichte ist eng verbunden mit der Geschichte der Technik und der Kunst, weil ihr Ziel für den Fortschritt in den durch diese Worte kurz bezeichneten grossen Gebieten menschlicher schöpferischer Thätigkeit unentbehrlich war: Die Entdeckung und Begründung der Regeln, nach welchen räumliche Objecte, also Objecte der Natur, der Technik und der Kunst, der Form nach, verkleinert, jedoch unter vorzugsweiser Verminderung der Tiefendimension, so nachgebildet werden können, dass sie einem Beschauer den Anschein der richtigen Maassverhältnisse darbieten und eventuell zur Ermittelung dieser Maassverhältnisse dienen können. Wenn die Kunst ausschliesslich das Erste fordert, so legt die Technik naturgemäss das grössere Gewicht auf das Zweite; die angenehme Täuschung, welche jene anstrebt, hat mit exakten Maassbestimmungen nichts zu thun, indess die Technik von der geometrischen Abbildung ihrer Objecte in erster Linie die vollständige und genaue Ersetzung derselben hinsichtlich aller auf ihre Formen- und Grössen-Verhältnisse bezüglichen Fragen als ihre praktische Brauchbarkeit verlangt, ohne doch auf ein gewisses Element der Täuschung, ich will lieber sagen der Erinnerung aus der Anschauung, an Angeschautes und Anschaubares mittelst der Darstellung, ganz verzichten zu können. Wenn der Techniker Modelle verwendet, bei denen alle Dimensionen des Objects nach einem und demselben Verjüngungsverhältniss verkleinert erscheinen, so ist beiden Anforderungen Rechnung getragen; wenn er aber, wie diess der grösseren Einfachheit ihrer Herstellung wegen viel häufiger geschieht, nur Zeichnungen auf ebener Fläche statt der Modelle benutzt, so kann denselben offenbar nur dadurch jenes Element künstlerischer Täuschung erhalten bleiben, dass in dem Vorgange ihrer Ableitung aus dem dargestellten Object der Entstehungsweise seines Gesichtsbildes so viel als möglich nachgegangen wird; es geschieht am vollständigsten in der perspectivischen Darstellung, wo das Object nicht nur wie in der allgemeinen Centralprojection mittelst geradliniger Strahlen aus einem Centrum oder Auge abgebildet, sondern auch in solcher Lage zu diesem und der Bildebene vorausgesetzt wird, dass es sich ganz innerhalb des Sehkegels auf der Seite der Bildebene befindet. Die perspectivische Abbildung dient daher nicht nur dem Techniker, sondern auch dem zeichnenden Künstler, welcher sich ihrer jedoch mit Freiheit bedient, nämlich mit dem Vorbehalt, sich solche Abweichungen von ihren genauen Ergebnissen zu gestatten, welche — ohne als Fehler in der Zeichnung für den angenommenen und im Allgemeinen vortheilhaften Standpunkt bemerkt zu werden — Effecte hinzufügen, die eigentlich bei strenger Richtigkeit erst mit einem etwas abweichenden Standpunkte verbunden sein würden.

Wenn wir dagegen die orthogonale Parallelprojection auf eine horizontale zusammen mit der auf eine verticale Ebene anwenden (Grundriss und Aufriss), weil nach dem natürlichen Vorwalten von verticalen und horizontalen geraden Linien an den Objecten diese Darstellungen zur Abmessung der wahren Grössen besonders bequem sind, so verzichten wir zu Gunsten dieser bequemen technischen Brauchbarkeit auf das Element künstlerischer Täuschung ganz und selbst auf die bildliche Anschaulichkeit nahezu, insofern die dargebotenen Bilder nur von einem horizontal oder vertical unendlich weit entfernten Auge so gesehen werden könnten, wie wir sie zeichnen; ja wir eignen uns ihr zu Liebe mittelst einer geometrischen Durchbildung und Disciplinirung unserer raumanschauenden Phantasie die Fertigkeit an, aus zwei zusammen gehörigen Projectionen des Objects die Anschauung desselben zusammen zu setzen, von denen die eine uns die verticalen Abmessungen desselben gar nicht und die andere uns ein System horizontaler Maasse nicht zeigt, dafür aber alle horizontalen resp. verticalen in wahrer Grösse liefert. In den nicht seltenen Fällen aber, wo der Techniker für die Ausführung seiner Ideen der Zustimmung weiterer Kreise von Laien nicht entbehren kann, vermittelt er ihnen die Anschauung derselben durch orthogonalprojectivische Abbildung auf eine schiefe Ebene, durch Zeichnung aus der Vogelperspective, wie man etwa sagt, oder durch wirkliche perspectivische Zeichnung aus einem passend gewählten Gesichtspunkt; alles jedoch unter Festhaltung der strengen Richtigkeit, damit dieselben Zeichnungen auch für den technischen Hauptzweck dienen können, welcher ist: Ersetzung der Objecte hinsichtlich aller Fragen nach Form und Grösse.

Bei Constructionen, wo es auf Vermittelung mit den Laien nicht ankommt, wird er sich natürlich, wie auch der Mathematiker, welcher graphisch das Ergebniss irgend einer Operation im Raum verfolgen will, derjenigen Methode bedienen, die mit dem geringsten Aufwand von zeichnerischer Arbeit zum Ziele führt, der allgemeinen Centralprojection oder der Parallelprojection, die das Object durch die in einem einzigen Bilde enthaltenen Elemente bestimmt (a. a. O. p. 213 f.).

Die Benutzung von Grundriss und Aufriss ist ohne Zweifel so alt, wie die Baukunst, ein Erfinder derselben kann nicht nachgewiesen werden; aber auch die Perspective war in wesentlichen Hauptstücken den Griechen zur Zeit des Aeschylus bekannt, so dass sie im Dienste der Kunst, namentlich bei der scenischen Darstellung, Verwendung fand. Beide stammen aus der Praxis, die hier wie in so vielen Fällen der Theorie vorausgegangen ist; sie hat schon in jener Zeit zu der Einsicht geführt, dass die perspectivischen Bilder paralleler Geraden einen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt besitzen, den man ihren Fluchtpunkt nennt; indess die logisch-mathematischen

Consequenzen davon, die wir heute unter der Bezeichnung der perspectivischen Raumanschauung etwa zusammenfassen, erst um die Mitte des XVII. Jahrhunderts von dem französischen Geometer Desargues klar und bestimmt ausgesprochen worden zu sein scheinen, und die Erkenntniss der hohen Bedeutung der Perspective für die Geometrie sogar unserm Jahrhundert angehört (Poncelet 1822). Nur eine Methode der Abbildung in der Ebene haben die Alten wissenschaftlich entdeckt, nämlich im Dienste der so früh tüchtig entwickelten Sternkunde zum Zwecke der Darstellung der Himmelskugel mit ihrer Eintheilung die stereographische Projection, die Abbildung der Fläche der einen Halbkugel auf die sie begrenzende Ebene aus dem Mittelpunkte der Fläche der andern als Centrum, z. B. der südlichen Halbkugel auf die Ebene des Aequators so wie sie vom Nordpol aus gesehen erscheint. Ich werde zeigen, wie und warum auch diese zu der Gruppe der elementaren geometrischen Abbildungsmethoden gehört.

Der Modelle bedient sich der Techniker, wie schon gesagt, nur selten für seine Zwecke und er benutzt überdiess gewöhnlich nur die ähnlich verjüngten, die alle am Object vorkommenden Winkel unverändert und alle Längenabmessungen nach einerlei Verhältniss verjüngt zeigen. Wiederum aber hat die bildende Kunst von alter Zeit her einerseits in der Plastik oder Bildhauerei anderseits in der Decoration der Schaubühne sich Aufgaben zu stellen gehabt, welche die Benutzung allgemeinerer Principien fordern, die offenbar dem Vorgange des Sehens entnommen werden müssen. Ich will die Lösung dieser Aufgaben zusammenfassend kurz als die Kunst der Reliefbildnerei bezeichnen — denn zur Wissenschaft, zur regelrechten Kenntniss, ist sie erst sehr spät geworden, wir werden sehen wie — obwohl die Art der Ausführung natürlich wesentlich verschieden ist im Falle der für die Dauer berechneten Bildhauer-Arbeiten und der wechselnden und so vergänglichen Bühnendecorationen. Ich erinnere an einige allgemein bekannte Meisterwerke jener Kunst. Am dorischen Tempelbau des Parthenon in der Akropolis von Athen zeigte sich innen die Colossalstatue der Pallas-Athene mit der geflügelten Siegesgöttin auf der ausgestreckten Rechten; in den Giebelgruppen sah man ebenfalls vollrunde Statuen; sodann auf den Metopen, den nahezu quadratischen Marmortafeln zwischen den Balkenköpfen, im vollen Tageslicht hocherhabene Reliefs; endlich unter der Säulenhalle ringsum Flachreliefs, als ein circa 500 Fuss langes Bilderband, wirklich auch mit Farben belebt, den Festzug der Athener darstellend. In analoger Weise sehen wir die vollrunde mit der Reliefbildnerei in modernen Werken verbunden, von denen ich nur erinnern will das herrliche Denkmal Friedrichs des Grossen in Berlin von Chr. Rauch; das Colossal-Reiterbild des Königs, umgeben von vier lebensgrossen Reiterstatuen und zwanzig andern lebensgrossen Figuren, das Postament in den Hauptflächen bedeckt mit Reliefdarstellungen zur politischen und Culturgeschichte seiner Zeit.

Aus der Renaissance-Zeit genügt es die bronzenen Thüren des Lorenzo Ghiberti an der Taufkapelle S. Giovanni in Florenz zu nennen, von denen Michel Angelo bekanntlich gesagt hat, sie seien würdig die Pforten des Paradieses zu werden; eine Heilsgeschichte in Bronze, die Arbeit eines Künstlerlebens (1424—1447), Reliefs mit weiten Perspectiven und reicher Handlung, in denen der Bildhauer so zu sagen mit dem Maler concurrirt.

Und ich nenne endlich aus unserm Jahrhundert Thorwaldsen, den die Römer nach der Ausführung seines Relief-Frieses für den päbstlichen Palast Monte Cavallo im Quirinal bei Anlass der Aufnahme Napoleons 1811 den Patriarchen des Reliefs nannten — jenes Frieses, der in antiker Schönheit den Einzug Alexanders des Grossen in Babylon darstellt, in 60 Fuss Länge bei nur 4 Fuss Höhe sich in einer Reihe von Gruppen entwickelnd; derselbe hat auch später in dem Einzuge Christi in Jerusalem und seinem Leidensgang nach Golgatha in der Frauenkirche zu Kopenhagen (zusammen 120 Fuss Länge) solche grosse Relief-Friese ausgeführt und überhaupt in der ungemeinen Menge seiner Schöpfungen eine der des Ghiberti wesentlich entgegenstehende Art der Reliefbildnerkunst ausgeprägt und für das Kunstbewusstsein der Gegenwart zur dominirenden gemacht. Wenn man aber die Formen Thorwaldsens als Aufrisse gegenüber denen Ghiberti's als Perspectiven bezeichnen kann, so liegt die Rechtfertigung beider Methoden in der Form und dem Umfange der Aufgaben, die sie sich stellten: Die langen und schmalen Friese setzen den vorüberwandelnden nie das Ganze zugleich umfassenden Beschauer voraus, die Thüren des Ghiberti hingegen den stillstehenden oder herantretenden, der sie überblickt; mit der relativen Unbeweglichkeit des Auges ist die Modellirung nach Gesetzen der Perspective geboten.

Die genannten Meisterwerke der Kunst sind wohl alle ohne directe Anwendung mathematischer Constructionsregeln entstanden; aber doch entspringen dem Künstler die Regeln seines Schaffens in ihren wesentlichen Factoren aus einer mit der unseren gleichartigen, wenn auch höher entwickelten physisch-psychischen Organisation seines Sehvermögens und der raumanschauenden Phantasie; jene

Regeln sind also ohne Zweifel nicht Ausgeburten genialer Willkür, sondern fest und dauernd für höchste Leistungen, und da sie sich auf räumliche Formen beziehen, so werden sie ohne Zweifel auch geometrisch fassbar sein, wie die der Centralprojection und Perspective.

Gerade hier aber erhebt sich Zweifel und Angriff von jeher und wiederum neuerdings; ob die Centralprojection die zuständige Grundlage der zeichnenden Kunst und die ihr entsprechende geometrische Theorie der Reliefperspective diejenige der Reliefbildnerkunst und der scenischen Decoration sei und ob die Kenntniss ihrer Regeln daher dem Künstler nützen könne, falls er sie hat, oder ob sie ihn nicht vielmehr sogar irreleite und störe. In der Beweglichkeit unseres Blickes, der den Gegenstand übersieht und umfasst, im Vergleich mit der Inactivität des mathematischen Punktes, den wir als Centrum der Projection denken, hat man ja einen allgemein verständlichen Grund für solche Bekämpfung. Wie wird — so hat vor ein paar Jahren ein geistreicher Schinkelfestredner in Berlin geradezu gefragt, wenn auch um eine mildernde Antwort zu geben — sich die Mathematik gegen den Vorwurf vertheidigen, den ihr die zürnende Kunst in's Antlitz schleudert: «Belogen und betrogen hat mich dein falscher Mund!»? Ich will bei dieser Gelegenheit die Antwort dahin geben, dass die Geschichte diese Vertheidigung längst erledigt hat, und dass die Beschuldigung historisch unwahr ist, ebensowohl wenn sie an die Mathematik, wie wenn sie an die Mathematiker gerichtet gedacht wird. Es ist wahr, dass die Künstler der Renaissance in Italien ihre Werke durch Zirkel und Lineal proportionirten, um sie zu vervollkommenen, wie es ein mit ihnen befreundeter geistlich-mathematischer Zeitgenosse berichtet; auch hat Leonardo da Vinci Vieles zur zeichnenden Kunst in Beziehung stehende auf geometrische Regeln zurückgeführt und Albrecht Dürer hat die geometrische Perspective sorgfältig benutzt, über sie selbst geschrieben und auch andere veranlasst sie zu studieren; kurz diese grossen Künstler sind aus eigenem Antriebe Geometer geworden und haben sich für ihre künstlerischen Zwecke nicht belogen und betrogen gefunden. Aber ich halte mich dabei nicht auf, sondern berichte lieber von einer weniger bekannten Thatsache, welche die Geschichte der Entdeckung der Construction der Reliefs betrifft und die das ganze Gebiet des Streites vortrefflich beleuchtet. Sie liegt in einem jetzt ziemlich seltenen Buche vor, mit dem Titel: «Versuch einer Erläuterung der Reliefperspective zugleich für Maler eingerichtet von J. A. Breysig, Professor der schönen Künste und erstem Lehrer an der k. Kunstschule zu Magdeburg. 1798», (XVI) und 134 S. 8⁰ mit 11 Tafeln, in welchem Buche ein verständiger denkender Künstler und Kunstforscher 24 Jahre vor dem Mathematiker Poncelet die Constructionsregeln der Reliefperspective empirisch gefunden hat, die jener rein geometrisch ohne alle Beziehung auf künstlerische Verwendung entwickelte. Und dieser Künstler ist es gewesen, der die Künstler zur Nachachtung der Regeln aufforderte, indem er geltend machte, dass ein richtig construirtes Relief flacher gehalten sein dürfe als ein unrichtiges, um noch eben so erhaben zu erscheinen wie jenes, während es dadurch weniger der Zerstörung ausgesetzt sein werde; dass eine richtig gearbeitete Reliefgruppe ausser dem ihr zugehörenden Gesichtspunkt noch immer die gleich gute Wirkung thut, wie eine fehlerhafte in jedem Punkte, und dass ein Bildner, der sich die Regeln zu eigen gemacht habe, jederzeit — auch wenn er nur nach dem Augenmaass arbeitet — bessere Werke liefern werde, als ein Anderer, der die Regeln nicht versteht, weil der Erste durch die Anwendung der Regeln sein Augenmaass gestärkt hat. Es ist klar, dass Poncelet und die Geometer sich eine solche Mahnung an die Künstler nicht zur Aufgabe machen konnten; als Geometer und im Geiste Poncelet's hätte Breysig die zweite seiner Empfehlungen dahin formulirt, dass die Originale, welche einem richtig construirten Relief bei Festhaltung seiner Collineationsebene (siehe unten) aber für verschiedene Centra oder Augenpunkte entsprechen, selbst unter einander centrisch collinear sind und innerhalb gewisser durch die vorkommenden Formen bestimmten Grenzen als einander vertretend gelten können. Dass die Regeln von Breysig mit denen der centrischen Collineation oder Homologie der Räume übereinstimmen, hat Poncelet nach Jacobi's Anwesenheit in Paris (1829) in seiner Abhandlung über die Theorie der Transversalen im 8. Bd. des Crelle'schen Journals (1832) selbst anerkannt, und es ändert an der Wahrheit nichts, dass er diese Anerkennung 1843 in der Pariser Academie unter Berufung auf eine unter Bardin's Aufsicht von dem damals als Maler in Paris weilenden nachmaligen Professor der Berliner Bau-Academie Pohlke angefertigte Uebersetzung des Breysig'schen Textes zurückgenommen hat; Breysig's Schrift giebt Constructionsregeln, welche mit den Poncelet'schen dem Wesen nach übereinstimmen, wenn auch in einer wenig mathematischen Form.

Wichtiger aber als diess ist die Art, wie Breysig nach seinem eigenen Bericht zu seinen Regeln gekommen ist. Es geschah durch das Studium, die Ausmessung und Nachzeichnung, sowie durch Versuche der Nachconstruction nach ihm passend erscheinenden Regeln bei gelungenen Reliefs mit architektonischen scharf bestimmbaren Formen, welche er gesehen; er berichtet z. B. von einem Bildwerk auf einem Hofe in Venedig, welches vom richtigen Standpunkte aus betrachtet viermal so tief schien als es wirklich war; er schildert den hinter einer Statue als Hintergrund flach dargestellten Triumphbogen in der Vorhalle der Peterskirche zu Rom und seine vollrunde Wirkung aus dem nach seiner Meinung richtigen Gesichtspunkt, «so dass zuverlässig Wenige vorbei gehen, welche diesen Bogen für flache Arbeit ansehen.» Durch aufmerksames Sehen, Prüfen und Nachdenken fand er seine Regeln, die mit den ihm wohlbekannten Regeln der gewöhnlichen perspectivischen Abbildung nahe verwandt sind. Und wenn nun die nämlichen Regeln sich ohne allen Bezug auf künstlerische Anwendungen bei Poncelet 1822 als die nothwendigen Relationen zweier Räume ergeben, die wir als Bild und Original-Raum unterscheiden wollen, wenn jedem Punkt und jeder geraden Linie des einen ein Punkt und eine gerade Linie des anderen in solcher Lage entsprechen sollen, dass alle entsprechenden Punktepaare in geradlinigen Strahlen aus einem festen Centrum enthalten sind, so hat man damit, wie mir scheint, ein merkwürdiges historisches Zeugniss für jene Zusammenstimmung unseres Denkens mit unserer Sinnes-Organisation und mit der Welt der Erscheinungen ausser uns, welche man als die ideelle Voraussetzung aller exakten Wissenschaften immer deutlicher erkennen lernt.

Sorgfältig ausgeführte Reliefs, wie sie seinerzeit mein Assistent in Prag, Herr Raf. Morstadt und neuerdings Herr Prof. Burmester in Dresden, hier mein Assistent Herr Dr. J. Keller ausgeführt haben, bestätigen in der

That die Breysig'schen Erwartungen. Und wenn Breysig in seinem Vorwort sogleich bemerkt, «dass ein Relief in Hinsicht der unnatürlichen Schlagschatten und des Mangels an eigenthümlichen Schatten der Unvollkommenheit unterzogen ist und auch wohl immer bleiben wird», wie diess auch sonst immer wiederholt worden ist, so gilt diess freilich für die meisten ausgeführten Reliefs, die Demonstrationsmodelle eingeschlossen, und ist insbesondere bei der gewöhnlichen Verwendung des Reliefs in der Bildhauerei nicht wohl zu vermeiden; aber es ist keineswegs unumgänglich, da man die natürliche Beleuchtung durch Sonnenlicht, die man bei der künstlerischen Nachahmung voraussetzt, nur durch eine künstliche zu ersetzen hat, um die zur allgemeinen Täuschung stimmenden und mitwirkenden Schatten im Modell hervorzubringen. Denn man construirt ein Relief mittelst eines Centralpunktes C und zweier verticalen parallelen festen Ebenen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Q}_1$ auf der nämlichen Seite desselben; zu einer Geraden g des gedachten Objects erhält man die entsprechende Gerade g_1 des Reliefmodells, indem man ihren Durchschnittspunkt S mit der Ebene $\mathbf{S}$ mit demjenigen Punkte Q_1 verbindet, in welchem die zu ihr parallele Gerade durch C die Ebene $\mathbf{Q}_1$ trifft; für Objecte, die innerhalb des Sehkegels liegen, der einem in C befindlichen seine Sehaxe normal zur Ebene $\mathbf{S}$ richtenden Beschauer zukommt, entstehen so für diesen Standpunkt täuschend wirkende Modelle. Die Ebene $\mathbf{S}$, die man die Collineationsebene nennt, enthält die mit ihren Bildern zusammenfallenden Punkte, sie ist bei der scenischen Dekoration, wo C etwas unter der Mitte der Mittelloge des ersten Ranges liegt, die Ebene des Vorhangs, welche die Region der Wirklichkeit von der des künstlerisch schönen

Scheins trennt; die Ebene $\mathbf{Q}_1$ enthält die Bilder der unendlich weit vom Centrum entfernten Objectpunkte, sie fällt etwa mit der äussersten Hinterwand des Bühnenraums zusammen, über welche keine Darstellung auf der Bühne hinausgreifen kann. Denkt man nun das Object durch Sonnenlicht beleuchtet und ist Q_1^1 der Fusspunkt des durch das Centrum gehenden Sonnenstrahles in der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$, so hat man das richtig construirte Modell durch Lichtstrahlen aus dem Punte Q_1^1 zu beleuchten, um es mit natürlichen Schatten ausgestattet zu sehen. Das erwähnte von Herrn Dr. J. Keller ausgeführte Modell erlaubt diesen Effect zur vollen Anschauung zu bringen. Es ist jedoch klar, dass die Bildhauerei von dieser Einsicht kaum wird Gebrauch machen können und dass selbst bei der Dekoration der Schaubühne diess nur in den seltenen Fällen möglich sein wird, wo die Beleuchtung von hinten aus der Natur der Scene folgt und diese nicht Architekturformen u. dgl. enthält, für die die blos gemalten Coulissen an der Stelle der Reliefmodelle, die sie vertreten sollen, natürlich auch dann nicht die richtigen und natürlichen Schatten geben können. Nur, dass die Schwierigkeit theoretisch nicht vorhanden ist, musste hier hervorgehoben werden.

Wenn ich noch erinnere, dass aus der erwähnten Construction sich die der Centralprojection ergiebt als dem Grenzfalle entsprechend, wo die Ebenen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Q}_1$ in eine einzige zusammen fallen und somit der Punkt Q_1 zum Fluchtpunkt der geraden Linie g wird, sowie dass unter derselben Voraussetzung und für ein unendlich fernes C die Parallelprojection entspringt, so darf ich für Weiteres auf die im Eingang angeführte Mittheilung IV verweisen und wende mich noch kurz zurück zu jenem aus der Beweglichkeit des Auges und der Netzhaut hergenommenen plausibeln Grunde der Bestreitung der Brauchbarkeit der mathematischen Regeln für die Kunst, der oben schon angedeutet worden ist; denn auch er hat mehr nur scheinbare als wirkliche Bedeutung. Von ihm aus hat man im vorigen Jahrhundert eine in der Literatur umfangreich ausgeprägte Discussion über die Behauptung geführt, dass eine Kugel in perspectivischer Darstellung stets mit kreisförmigem Umriss auf die Tafel gezeichnet werden müsse, während diess unter den Voraussetzungen der geometrischen Perspective doch nur dann stattfindet, wenn der Mittelpunkt der Kugel in der vom Auge oder Centrum zur Tafel gefällten Normale liegt; in der That ist für eine Kugel von verhältnissmässig kleinem Durchmesser, die innerhalb des Sehkegels und auf der dem Auge entgegengesetzten Seite der Tafel liegt, die Abweichung der elliptischen Umrissfigur vom Kreise überhaupt nicht empfindlich und wenn wir den Blick direct auf die Originalkugel gerichtet denken, was bei seiner Beweglichkeit im Anschauen eines grösseren Ganzen, in dem sie ein untergeordneter Theil ist, leicht geschehen kann, so erscheint sie wirklich mit kreisförmigem Umriss.

Von eben da aus will man neuerdings Compromisse geschlossen wissen zwischen dem Collinearitätsprincip, d. h. den strengen Regeln, die aus der Centralprojection aus dem festen Centrum auf eine feste Ebene entspringen, und dem Conformitätsprincip, wonach die Längen im Bilde den Gesichtswinkeln proportional sein sollten, unter welchen die Originale gesehen werden, oder den Bogenlängen ihrer Netzhautbilder. Aber die strenge Erfüllung beider Anforderungen durch ein ebenes Bild ist nur für einen Punkt herstellbar und wenn wir denselben nicht als den sogenannten Hauptpunkt in der alten Perspective schon ausgezeichnet hätten, so müssten wir ihn hiernach als solchen einführen und seiner Bedeutung gerecht werden, oder das Endergebniss der Bestreitung und der kritischen Untersuchung ist die Erkenntniss von der Richtigkeit des Althergebrachten; diess kennzeichnet zugleich den Werth, den eine solche Untersuchung hat, wenn sie mit wissenschaftlicher Sorgfalt ausgeführt wird, wie diess neuerdings durch Herrn Prof. Dr. Hauck geschehen ist. (Siehe «Zeitschr. f. Math. u. Phys.» XXVI, 273 f.) Aber will sich damit die geometrische Regel dem Künstler aufdrängen oder glauben wir, die aus der Beweglichkeit von Blick und Netzhautmitte auch im ruhigen Kopfe entspringenden Bedenken durch eine solche Untersuchung abweisen zu können? Ich denke nicht.

Die geometrische Construction dient dem zeichnenden Künstler, wenn er sie kennt, so wie sie dem Bühnendekorateur dienen kann, um die beste Aufstellung seiner Coulissen und deren Zeichnung zu bestimmen, und sie wird keinen von beiden hindern, mit Bewusstsein von ihren Ergebnissen abzuweichen; auch würde keiner von beiden ihr ganz folgen können, selbst wenn er wollte. Und wenn dem wissenschaftlichen Techniker und dem exakten Forscher die mathematische Durchbildung unentbehrlich ist, so kann sie dem Künstler durch seine spezifische Begabung für seine Zwecke wohl ersetzt werden, weil er nicht die Wahrheit und strenge Richtigkeit, sondern den schönen Schein und das Kunst-Ideal anzustreben hat; doch hat unter den Mathematikern vorzüglich der Geometer mit ihm darin ein Gemeinsames, dass auch er der besondern Anlage oder der sorgfältigen Ausbildung und Entwickelung der raumanschauenden Phantasie bedarf, so dass sich beide nur in der Art und Richtung ihrer Anwendung von einander unterscheiden. Diesem Unterschiede muss aber insbesondere der darstellende Geometer noch näher treten, dem die Frage nach der Anwendbarkeit mancher von seinen Constructionen für die künstlerische Verwendung von Interesse ist; und er wird diess von der inductiven oder experimentellen Seite her am besten und natürlichsten thun: Die physiologisch-psychologische Entwicklung der Raumanschauung und die physiologische Optik, die das Hauptinstrument derselben betrifft, gehen gewiss denjenigen an, der durch die Methoden der geometrischen Construction nicht nur die Formen-Vorstellung des Lernenden entwickeln und die des Sachverständigen leiten will — das ist ihr unbestreitbares Gebiet — sondern der es für möglich hält, dass dieselben Methoden in den Künsten eine Rolle spielen können, die aus der formanschauenden Phantasie des Künstlers heraus Werke schaffen, welche direct und ohne alle gelehrte Vermittelung und darum um so mächtiger durch das Auge des Betrachtenden auf seine Phantasie einwirken. In diesem Sinne habe ich selbst im Anfange meiner Thätigkeit als Lehrer der darstellenden Geometrie mit stereoskopischen Zeichnungen — meine Dissertation enthält zuerst die Regeln für ihre Construktion — mit improvisirten Telestereoskopen (nach der Idee von Helmholtz) und anderen Mitteln experimentirt und bin dadurch zu Ansichten über diesen Punkt gelangt, die ich in Kürze hier wiedergeben will, indem ich speciell das wichtige Gebiet ganz unberührt lasse, das auf die Erziehung zum Sehen und zur Raumauffassung durch das Sehen Rücksicht nimmt. Wenn ich ein Object in's Auge fasse, so umspiele ich es zunächst mit dem Blicke; ich ändere meinen Standpunkt, um mich interessirende Theile besser zu sehen, die ich dazu fixire; ich finde dadurch einen relativ besten Standpunkt und gebe mich der ruhigen Beschauung hin, womit schon gesagt ist, dass derselbe dem Gesetz vom Sehkegel genügt. Aber obwohl auch der ruhige Blick nun bei unveränderter Lage des Kopfes das Object umfasst, so richtet sich derselbe doch durch Drehungsbewegungen des Auges im Kopfe bald nach diesem bald nach jenem Theil des Ganzen speziell hin, im natürlichen Contact mit Gedanken über Zweck und Sinn des Gesehenen und den Bezug seiner einzelnen Theile auf diese. Ich empfange also auf der Netzhaut nacheinander abwechselnd und in Wiederholung eine ganze Reihe von Bildern des Objects und kann nicht vergessen, dass das Wesentlichste des Sehactes ein psychischer Prozess ist, dass psychisch eine Resultantenbildung aus allen diesen in der sozusagen unbewussten Aufnahmethätigkeit einander folgenden Bildern stattfindet, von welchen einige wesentliche Regulative sich in bewusste Regeln fassen lassen. Ich nenne nur die eingreifendsten von Allen: Ich sehe gerade Linien am Object im Allgemeinen auch als gerade Linien, weil ich sie so sehen will — da ja kein Zweifel ist, dass sie auf der sphärisch gekrümmten Netzhautfläche nicht als solche zu Stande kommen können; und ich sehe mit zwei Augen im Allgemeinen einfach, weil ich so will und aus praktischen Gründen so wollen muss; ich sehe selbst einfach aus solchen Ursachen, wenn den Augen Bilder dargeboten werden, die nicht ganz die zur Combination in Eins nöthige Lage besitzen. Mein Auge ist eben durch Erfahrung oder Erziehung in einer Thätigkeit geübt und eingeschult, welche man als ein Harmonisiren seiner Eindrücke unter einander und mit der Welt der noch durch Tastsinn und Muskel-Bewegungen einerseits und durch das Schlussvermögen und die Anforderungen des Denkens anderseits untersuchten Körper- und Raumformen bezeichnen darf. Und nun hat jene Resultantenbildung zu ihrem Hauptfactor offenbar das Gesammtbild des Objects bei ruhendem Auge in der gefundenen vortheilhaftesten Stellung, wo die Augenaxe sich auf den wichtigsten oder Haupttheil des Objects richten wird; diese Lage wird von dem beweglichen Auge umspielt und das Gesammtbild damit bereichert und belebt, weil die Phantasie die so erhaltenen Ergebnisse festhält. Die Wirkung der malerischen Kunstwerke beruht auf diesem Vorgange, der in der Erfahrung eines Jeden liegt, wenn er auch gewöhnlich nicht zum Gegenstand des Nachdenkens gemacht wird; sie können uns ja auch in jedem Falle nur ein festes Bild darbieten; aber dasselbe regt uns durch Schatten und Licht, durch verschiedene Oberflächenbehandlung, durch alle Abstufungen der Farbe, etc. zur Belebung durch unsere Phantasie an; wir umspielen und umfassen mit dem Blicke die Gestalten, nicht blos ihre Bilder, wir sehen in ihren Zügen die Affekte des Vorangegangenen und des Nächstkommenden lebendig zusammentreten u. s. w. Seine Grundlage, die Umrisse des Bildes liefert naturgemäss jenes Augenblicksbild des ruhenden auf die Hauptstelle gerichteten aber zur Auffassung des Ganzen geeigneten Blickes; das mathematische Centrum, die geraden projicirenden Linien aus ihm nach den Punkten des Objects in ihren Schnitten mit der Bildtafel — kurz, das Verfahren der Centralprojection, eine Abstraction nach dem Hauptcharacter des physischen Vorganges beim Sehen, entspricht jenem Hauptfactor. Das Uebrige thut die ästhetisch angeregte Phantasie des Beschauers und darum geht die Kunst des Malers, welche jene kräftig zu beflügeln versteht, über die correkte Zeichnung nach geometrischen Regeln weit hinaus. Sie hat weder gegründete Ursache, die Richtigkeit und Zuständigkeit dieser Regeln zu bezweifeln, noch sie als unnütz zu verachten; sie bedient sich ihrer für die Verfolgung eines ästhetischen Ideals mit Freiheit. Eine Weiterführung der Theorie in diess Gebiet, *eine allgemeine theoretische Entwickelung von Ausgleichversuchen* zwischen den widerstrebenden Bedingungen, welche die Abbildung erfüllen sollte, *halte ich nicht für möglich*; die Modifikationen des strengen perspectivischen Bildes oder des richtigen centrisch collinearen Reliefmodells haben der Idee des Kunstwerks zu dienen und müssen ihm eigenthümlich angepasst sein; mathematische Formulirung hört hier naturgemäss auf, ihre Kenntniss würde nur auf dem Wege der genauen Messung an ausgewählten Werken der Kunst zu einer Sammlung von lehrreichen Beispielen für das Verfahren der Künstler führen können, deren Werth immerhin hoch zu schätzen wäre.

Ich wende mich nun zur Erläuterung der *Consequenzen meiner Auffassung nach der darstellend geometrischen* (von der Beziehung zur künstlerischen Verwendung absehenden) *und rein geometrischen Seite der Sache*. Die allgemeine *Construction centrisch collinearer Modelle* zu Objecten von drei Dimensionen sahen wir bei unendlicher Annäherung der Collineationsebene mit der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ in die Construction der *Centralprojection* oder des perspectivischen Bildes desselben auf dieser Ebene übergehen; es sind die allgemeinen Typen für alle dem physischen Vorgange des Sehens nachgebildeten und daher den Gesichtseindrücken verwandte oder bildliche Darstellungen liefernde Abbildungsmethoden. Rücken wir das Centrum in irgend einer geraden Linie in unendliche Entfernung hinaus, so entsteht die Parallelprojection aus der centralen und die Construction affiner Modelle aus den Regeln der centrischen Collineation; dass jene aus Gründen praktischer Zweckmässigkeit gewöhnlich verwendet wird in der Form der Combination von zwei orthogonalen Projectionen auf Ebenen, die zu einander rechtwinklig stehen und durch Umklappung in der Zeichnungsebene vereinigt werden, ist schon angeführt. Insofern aber die ausgezeichnete Verwendbarkeit der Centralprojection auch für technisch constructive und rein geometrische Zwecke wesentlich auf der Bestimmbarkeit der Raumformen aus einem Bilde beruht, ist man zu der Frage geführt, ob nicht dieselben Vortheile auch mit der Parallel- resp. der Orthogonal-Projection zu verbinden seien; ich habe in der IV. meiner «Geometr. Mittheilungen» (s. diese Vierteljahrschr. Bd. XXIV, p. 205 f.) diese Frage bejahend beantwortet, indem ich die vollständigen Elemente einer Orthogonalprojection mit nur einer Projectionsebene entwickelte (a. a. O. spec. p. 213 f.), deren Einfachheit ihr wohl eine zukünftige praktische Verwendung verheisst. So gewährt der natürliche Standpunkt einerseits die volle Einsicht in die Gründe, aus denen die besondere praktische Brauchbarkeit der Orthogonalprojection entspringt, und zeigt anderseits den Weg zu ihrer verbesserten Verwendung für Zwecke bequemer Construction. Wenn man wie üblich die Perspective mit Schattenconstruktion, Gnomonik u. s. w. zu Anwendungen der «Géométrie descriptive», d. i. der Benutzung von zwei Orthogonalprojectionen macht, so entbehrt man in Folge der beliebten Verkehrung der natürlichen Verhältnisse jener

Möglichkeiten. Und zugleich beschränkt man auf das Empfindlichste die rein geometrische Ausbeute des Darstellungsprozesses, die ja doch mit seinem praktischen Zwecke untrennbar zusammenhängt. Es ist wahr, dass die classisch einfache Entwickelung der Grundsätze der Darstellung durch zwei Orthogonalprojectionen in Monge's «Géométrie descriptive» (1798) und in seinen Vorträgen ganz eminent auf die Wiederbelebung geometrischer Studien und damit auf die Fortentwickelung der reinen Geometrie eingewirkt hat; aber sie hat diess am fruchtbarsten gethan durch die Ausbildung der geometrischen Centralprojection, oder durch die geometrische Benutzung der allgemeinen Perspective, wie sie von Taylor und J. H. Lambert bereits früher entwickelt worden war: In Poncelet's klassischem Werke von 1822 über die projectivischen Eigenschaften der Figuren, der ebenen, wie der drei-dimensionalen, denen in diesem Werke ein Anhang gewidmet ist, der eben die Construction der Reliefs in rein geometrischer Form lieferte. Die Geometrie hat ja immer die Figuren durch Vergleichung mit einander, oder mittelst ihrer geometrischen Verwandtschaft studirt und untersucht, so wie es die Aufgabe der darstellenden Geometrie mit sich bringt, aus den Eigenschaften der Bildfigur die des entsprechenden Originals zu entnehmen; in dieser Hinsicht führt nun die Methode der Parallelprojection und die entsprechende der Modellirung für ein unendlich fernes Centrum nur zu den Verwandtschaften der Congruenz, der Flächen- resp. Volumen-Gleichheit und der Affinität, von denen jene den ältesten Bestand der geometrischen Kenntnisse ziemlich decken, diese letzte aber einen wesentlich weiter führenden, jedoch analytisch fundirten Beitrag des grossen Mathematikers Euler zur Entwickelung der Geometrie bildet. Die noch zum alten Bestand gehörige Verwandtschaft der Aehnlichkeit bereits entspricht der Centralprojection aus einem Centrum im endlichen Raum zwischen parallelen Ebenen und für die drei-dimensionalen Formen der centrisch collinearen Modellirung für eine unendlich ferne liegende Collineationsebene; in gewissen speciellen Fällen führt die Projection resp. Modellirung aus einem unendlich fernen Centrum zur Verwandtschaft der Symmetrie in Beziehung auf eine Axe zwischen ebenen Figuren, auf eine Ebene zwischen den räumlichen; ebenso aber die Projection und Modellirung aus endlichem Centrum zwischen parallelen Ebenen, respective mit unendlich ferner Collineationsebene zur Verwandtschaft der Symmetrie ebener wie dreidimensionaler Figuren für ein Centrum. Die Symmetrie der Räume mit zwei windschiefen Axen, deren eine unendlich fern ist, ward bis in die neueste Zeit ganz übersehen (vergl. meinen Beitrag zur «Vierteljahrschrift» Bd. XXI, p. 50 f. «Ueber die Symmetrie»), und ist doch von grosser Wichtigkeit für das Verständniss wesentlicher allgemeiner Raumrelationen. Und die grossen Fortschritte der reinen Geometrie in neuerer Zeit, die zu einer organischen Gestaltung gerade ihrer höheren und neueren Parthien sofort geführt haben, knüpfen sich historisch wie sachlich an das Studium der aus der allgemeinen Centralprojection und der centrischen Collineation entspringenden geometrischen Verwandtschaften der Collineation und Involution, an den der darstellenden Geometrie entnommenen Aufbau aus den Elementargebilden der geraden Punktreihe, des Ebenenbüschels und des ebenen Strahlenbüschels und an die Aufsuchung ihrer projectivischen d. h. durch Centralprojection unzerstörbaren Eigenschaften. (Möbius, Steiner, Chasles.) Die Herstellung des natürlichen Sachverhalts zwischen den Projectionsmethoden, d. h. die unabhängige Ausbildung der Centralprojection und die Einordnung der Parallelprojection als Specialfall, hat also neben ihren Vortheilen für die technisch constructiven Zwecke vor Allem den grössten Vortheil für die Entwickelung der vollständigen Kenntniss der Geometrie, welche sich je länger desto mehr als eine Nothwendigkeit für den wissenschaftlich gebildeten Techniker herausgestellt hat, vor Allem durch die entsprechende neuere Entwickelung der Statik und Mechanik; er entnimmt ihr für seine Praxis die Lehre von den strengen Constructionen, die Zurückführung aller Probleme zweiten Grades auf Lineal- und Zirkel-Constructionen. Ich habe von langer Zeit her die Reform der darstellenden Geometrie in dieser Richtung, die Klarlegung und pädagogische Verwerthung ihrer natürlichen Verbindung mit der reinen Geometrie mir zur Aufgabe gemacht, und die Entwickelung hat sich für beide Seiten der Sache als vortheilhaft erwiesen; ich habe auch früh die entsprechende Theorie der allgemeinen Coordinatenbestimmung entwickelt, welche in streng constructivem Zusammenhange die homogenen Coordinaten der Raumelemente und die Fundamente der analytischen Geometrie liefert. (S. Bd. XV. p. 152—82 dieser «Vierteljahrsschrift» und «Die darstellende Geometrie in organ. Verbind. m. d. Geometrie der Lage» 1871. Dritter Theil. 2. Aufl. 1875; dazu «Geom. Mittheilungen» I. Bd. XXIV, p. 145 f. wie schon Bd. XVI die allgemeine Transformation der Coordinaten betreffend), in der Art, dass die Systeme der Cartesischen Punkt-Coordinaten und der Plücker-'

schen Linien- und Ebenen-Coordinaten überall als specielle Fälle hervorgehen.

Aber eine der elementaren Verwandtschaften von grosser und vielseitiger Brauchbarkeit, die man als die Lehre von den reciproken Radien zu bezeichnen pflegt, und das grosse von ihr vorzugsweise beherrschte Gebiet der Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme schien in diesem Zusammenhange die richtige ihrer systematischen Bedeutung entsprechende Stelle nicht zu finden; die Theorie der reciproken Radien erschien systematisch erst als eine Specialisirung der rückwärts und vorwärts quadratischen birationalen Raumtransformation, während sie ihrer fundamentalen Bedeutung für das bezeichnete elementare Gebiet zufolge einen Platz in den Elementen zu beanspruchen hatte; und dieses Gebiet, das in Folge der grossen und interessanten Bereicherungen, die es nacheinander von Gaultier, Poncelet, Plücker und Steiner erfuhr, so allgemeines Interesse erweckt hatte, erwies sich in den üblichen Behandlungsweisen als zu umfangreich und zu penibel, als dass mehr als die einfachsten Elemente davon hätten zur Entwickelung und Verwerthung gelangen können. Am sichersten schien, dass es der darstellenden Geometrie unzugänglich sei, und nicht wie doch die moderne reine Geometrie von ihr aus und nach ihren Methoden eine leichte und sichere Entwicklung gestatte; selbst an der Lösung der Probleme über die Geometrie der Kugeln schien die darstellende Geometrie nur mit der Pflicht der schliesslichen Ausführung der Constructionen betheiligt zu sein, während deren Quelle mit ihr ausser allem Zusammenhang blieb.

Und doch setzt eine einfache mir seit langer Zeit bekannte Idee das Alles mit der darstellenden Geometrie, wie ich sie auffasse, unter Beseitigung aller der angedeuteten Schwierigkeiten, in den engsten Zusammenhang; weil ich aber überzeugt war, dass J. Steiner's erste Epoche machenden Arbeiten aus dieser Idee geflossen seien und dass er ihr in dem 1826 als nahe druckfertig angekündigten Werke von 25 bis 30 Bogen «über das Schneiden der Kreise in der Ebene und auf der Kugelfläche und das Schneiden der Kugeln im Raume» eine vollständige Ausarbeitung gewidmet habe, so unterliess ich die Veröffentlichung meiner Untersuchungen, bis jetzt mit der Vollendung der Gesammt-Ausgabe der Steiner'schen Werke durch die Berliner Akademie unwiderleglich constatirt wurde, dass ein Manuscript-Nachlass aus jener Epoche oder im Anschluss an jene ersten Arbeiten überhaupt nicht vorhanden und dass keine directe Spur jener Idee aus Steiner's Vorlesungen oder seinem persönlichen Umgange erweisbar ist. Jetzt habe ich ihre Durchführung in dem elementaren Theile in einem Buche mit dem Titel «Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme» von 16½ Bogen und 16 Figurentafeln veröffentlicht und gebe hier davon kurzen Bericht, weil die vorher geschilderte Entwickelung und Auffassung in jener Idee ihre nothwendige Ergänzung und Vervollständigung erhält. Dieselbe entsprang mir aus demjenigen Passus meiner Dissertation, in welchem ich in Rücksicht auf die Construction stereskopischer Bilder von der Transformation des Centrums handelte, d. h. von der Art, wie aus der Centralprojection eines Objects für ein durch den Distanzkreis **D** gegebenes Auge C die Projection desselben Objects auf dieselbe Ebene für ein anderes Centrum C^* abgeleitet werden kann; da diess Centrum durch seinen Distanzkreis **D*** gegeben werden darf wie das erste, weil man denselben aus seiner centralprojectivischen Bestimmung durch sein Bild in einer durch Flucht- und Durchstoss-Punkt gegebenen Geraden sofort erhält («Darstellende Geometrie in organ. Verb. m. d. Geom. d. Lage» 2. Aufl. Art. 7, oder «Cyklographie» Art. 9) und da dasselbe in jedem beliebigem Punkte des Raumes (ausserhalb der Tafel) gewählt werden kann, so erhält man damit eine Bestimmung und Darstellung oder Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise einer Ebene im engsten Zusammenhang mit der Centralprojection. Durch diese wird nur einer unter den Bildkreisen der Raumpunkte ausgezeichnet als Bild des Auges, von welchem die Raumwelt betrachtet und für welches sie dargestellt wird («Cykl.» Art. 24); auf ihn sind alle Constructionen zurückführbar. Obschon diese Abbildung im analytischen Sinne weder eindeutig noch linear ist, so erweist sie sich in der in ihrem Ursprunge liegenden Verbindung mit der Centralprojection als vollkommen geeignet zur Beherrschung ihres Gebietes. Sowie die Entwickelung der Centralprojection mit den projicierenden Geraden und den projicierenden Ebenen beginnt, welche zur Bestimmung und Behandlung aller anderen Geraden und Ebenen als deren Parallelstrahlen und Parallelebenen durch das Centrum benutzt werden, so auch hier; man erkennt den Durchstosspunkt des Strahls als den gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt aller der Kreise, welche die Bildkreise seiner Punkte sind und zwar als äusseren Aehnlichkeitspunkt für die von je zwei Punkten auf derselben Seite und als inneren Aehnlichkeitspunkt für die von je zwei Punkten auf entgegengesetzten Seiten der Tafel oder das einfach unendliche System von Kreisen mit einerlei Centrale und einem gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt ist das Abbild einer geraden Linie. («Cykl.» Art. 16 f.) Ebenso ist das zweifach unendliche System von Kreisen mit einerlei Aehnlichkeitsaxe das Abbild einer Ebene, für welche diese Aehnlichkeitsaxe die Spur ist (Art. 25 f.); und es ergibt sich sofort, dass der Neigungswinkel α der Ebene gegen die Tafel mit dem für alle Bildkreise ihrer Punkte gleichen Winkel σ, unter welchem sie diese ihre Spur schneiden, durch die Relation $cotan\ \alpha = cos\ \sigma$ verbunden ist. Parallele Verschiebung der Tafel unter Festhaltung der Geraden, respective der Ebene im Raum oder umgekehrt ändert unter Verschiebung des Aehnlichkeitspunktes, resp. der Aehnlichkeitsaxe und äquivalenter Veränderung der Radien aller Bildkreise doch diese Relationen nicht. Für die geraden Linien und Ebenen, welche unter 45° zur Tafel geneigt sind, gehen diese Relationen über in Berührung aller Kreise der linearen Reihe in einem Punkte und in Berührung aller Kreise des planaren Systems mit einer und derselben Geraden; aus der ersten Bemerkung zieht man die weiterführende, dass die sämmtlichen Punkte eines Rotations-Kegelmantels mit zur Tafel normaler Axe und mit 45° als halbem Winkel an der Spitze durch Kreise repräsentirt werden, welche den Spurkreis des Kegels in der Tafel berühren, nämlich insbesondere die Punkte auf der der Spitze entgegengesetzten Seite der Tafel ausschliessend und die Punkte auf derselben Seite einschliessend, wobei die Bildkreise der Punkte zwischen Spitze und Tafel vom Spurkreis umschlossen werden, während die der jenseits der Spitze liegenden ihn umschliessen; und speciell die, dass alle Kreise der Tafel durch einen Punkt einen zur Tafel orthogonalsymmetrischen Kegel dieser Art repräsentiren. Man erkennt dann sofort (Art. 58 f.), dass die durch zwei feste Punkte der Tafel gehenden Kreise den im endlichen Raum erscheinenden Theil der Durchdringung von zwei solchen Kegeln abbilden, welcher eine zur Tafel orthogonalsymmetrische gleichseitige Hyperbel (mit der Nebenaxe in der Tafel) ist, deren Eigenschaften aus dieser Entstehung sich ergeben; betrachtet man ihre Umlegung in die Tafel sodann auch als durch Umlegung mit der durch ihre Hauptaxe gehenden Normalebene zur Tafel entstanden, so dass statt der der Hauptaxe der Hyperbel parallelen Ordinaten die zur Nebenaxe parallelen die Radien der Bildkreise liefern, so erhält man das dem Büschel mit reellen Grundpunkten von vorher conjugirte oder orthogonale Büschel mit reellen Grenzpunkten (Art. 68). Die Rotation der wieder aufgerichteten Hyperbeln um ihre gemeinsame zur Tafel normale Axe, die für die erste Lage die Hauptaxe und für die zweite die Nebenaxe ist, erzeugt die beiden gleichseitigen zur Tafel symmetrischen Rotationshyperboloide (Art. 85) von derselben Rotationsaxe und gleichen Längen der schneidenden Axen und liefert die Einsicht, dass die Bildkreise der Punkte des einen die zweifach unendliche Gesammtheit der Kreise der Tafel bilden, welche denselben Kreis in je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten schneiden, und resp. die zweifach unendliche Gesammtheit derjenigen, welche denselben Kreis orthogonal durchschneiden, d. h. das Netz von Kreisen mit Scheitelkreis, resp. das mit Kehlkreis oder das Netz mit imaginärem, resp. reellem Orthogonalkreis; die Kreise des letzten lassen sich in solche lineare Reihen ordnen, die den Kehlkreis an demselben Punkte orthogonal schneiden und mithin einander berühren, d. h.

das einfache Hyperboloid enthält zwei Systeme gerader Mantellinien unter 45° zur Tafel; die symmetrisch zur Haupt- und Tafel-Ebene gelegenen Punktepaare beider Hyperboloide haben je denselben Bildkreis und von einem zum andern Bildkreise mit constanter Differenz der Radienquadrate (Art. 94). Verschiebt man aber die Tafel parallel sich selbst um einen Betrag d, so nehmen die Abstände aller Punkte auf der einen Seite derselben um d ab und auf der anderen um d zu, so dass die vorher symmetrischen Paare mit gleichen Bildkreisen nun concentrische Bildkreise mit der constanten Radiendifferenz $2d$ liefern; alle Kreise dieses zweifach unendlichen quadratischen Systems (Art. 133) schneiden den Spurkreis des Hyperboloids unter einem constanten Winkel σ, dessen Cosinus der Cotangente des Winkels α gleich ist, welchen die Tangentialebenen des Hyperboloids in den Punkten jenes Spurkreises mit der Tafelebene bilden (Art. 95, 97 f.). So liefern die einfachen gleichseitigen Rotations-Hyperboloide die Systeme mit constantem reellen und die zweifachen die mit constantem nicht reellen Schnittwinkel zu ihren bezüglichen Parallelkreisen; ich erwähne nur, dass die Bestimmung der Systeme von constantem Schnittwinkel mit imaginärem Grundkreis sich aus den zweifachen Hyperboloiden mit derselben elementaren Einfachheit constructiv ergibt, wie für reellen.

Damit erhalten alle Bestimmungen über Kreise mittelst ihrer Punkte, resp. Tangenten, wie mittelst ihrer Berührung oder ihres Schnittes mit geraden Linien oder mit Kreisen ihre anschauliche Interpretation im dreidimensionalen Raume und die Untersuchung von Systemen und Gruppen derselben, die solchen Bedingungen entsprechen, wird zur Untersuchung der zugehörigen Flächen, ihrer gemeinsamen Durchdringungscurven und Schnittpunkte. Jene Flächen sind aber Ebenen, gleichseitige Rotationskegel und gleichseitige Rotationshyperboloide, mit zur Tafel normaler Axe, symmetrisch zur Tafel oder nicht; ihre Durchdringungscurven sind also neben geraden Linien nur Kegelschnitte, da die genannten Kegel und Hyperboloide alle einen und denselben unendlich fernen Querschnitt enthalten. Ihre darstellend geometrische Behandlung wird durchgeführt unter Wahl der Tafel oder einer zu ihr parallelen als Bildebene und einer der durch das Problem eingeführten Flächen, respective ihres Asymptotenkegels als projicirend; der Uebergang von der Centralprojection zu der durch die Punkt-Kreis-Abbildung geforderten Orthogonalprojection auf die Tafel (Art. 9) führt immer einfach zum Ziel. Die Lösungen aller Probleme der vorbezeichneten Classe kommen dadurch auf Lineal- und Zirkel-Constructionen zurück, weil die fraglichen Durchdringungen im allgemeinsten Falle auf den Schnitt zwischen einer geraden Linie und einem gleichseitigen Rotationshyperboloid oder mit einer gleichseitigen Hyperbel hinauskommen, deren Axen zur Tafel parallel und normal sind (Art. 63, 74). Das Apollonische Problem für drei Kreise (Art. 122) und das Problem mit gegebenen Schnittwinkeln für drei Kreise (Art. 126) zeigen die Behandlung; für jenes ist einer der gleichseitigen Rotationskegel des Problems als projicirend zu nehmen, für dieses ebenso der Asymptoten-Kegel eines der drei gleichseitigen Rotationshyperboloide desselben; die Construction bleibt im Wesentlichen unverändert, die Gergonne'sche Lösung des Apollonius ist recht verstanden auch die Lösung des Schnittwinkelproblems. Dabei erscheinen die geraden Linien als

Orte der Centra von Kreisen, die mit zwei gegebenen Geraden vorgeschriebene Winkel (will sagen Winkel von vorgeschriebenem Cosinus) bilden, oder auch speciell mit 45° Neigung zur Tafel als Orte der Centra von Kreisen, die einen gegebenen Kreis in gegebenem Punkte unter constantem Winkel schneiden, somit einander berühren. Die Kegelschnitte (Art. 134 f.) dagegen erscheinen, je nachdem sie als Schnitte von Ebenen mit gleichseitigen Rotationskegeln oder Rotationshyperboloiden erhalten werden, die entweder zur Tafel symmetrisch oder asymmetrisch sind; je nachdem sie Durchdringungen solcher Kegel miteinander, oder eines Kegels mit einem Hyperboloid oder von zwei solchen Hyperboloiden sind, immer mit den beiden Fällen ihrer Assymmetrie zur Tafel gegenüber der Symmetrie der einen von beiden als Orte der Centra von Kreisen unter folgenden Bedingungen, respective: Dass sie durch einen festen Punkt gehen oder einen festen Kreis berühren, ihn orthogonal, diametral oder unter einem Winkel von gegebenem Cosinuswerth schneiden und eine feste Gerade unter vorgeschriebenem Winkel schneiden, feste Kreise gleichartig oder ungleichartig berühren, dass sie einen festen Kreis berühren und einen zweiten orthogonal, diametral oder unter Winkeln von gegebenem Cosinuswerth schneiden; dass sie von zwei festen Kreisen den einen orthogonal, respective diametral, und den andern unter vorgeschriebenem Winkel oder endlich, dass sie zwei feste Kreise unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden. Und da durch einen so als Durchdringung erhaltenen Kegelschnitt immer einfach unendlich viele jener gleichseitigen Rotations-Hyperboloide mit seiner Ebene und den beiden sich in ihm durchdringenden Kegeln als Grenz- und Uebergangsformen hindurchgehen, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen und deren Spur in irgend einer zu ihren Axen normalen Tafelebene ein Büschel von Kreisen mit der Spur der Ebene als Verbindungslinie der Grundpunkte bilden, so haben die Bildkreise der Punkte des Kegelschnittes in jeder dieser Ebenen alle jene Beziehungen zugleich zu den einzelnen Kreisen dieses Büschels, die demselben angehörigen imaginären durch Symmetriekreise vertretenen mit eingeschlossen. Für die Spitzen der Kegel in diesem Büschel erscheint der Kegelschnitt (Art. 156, 159) insbesondere als Centralprojection des Kreises und hat daher mit diesem die durch Centralprojection unzerstörbaren Eigenschaften gemein; man erhält die Theorie der Kegelschnitte aus projectivischen Büscheln und Reihen, wie in Art. 43 und 141 der «Cykl.» und in Art. 24 f. der «Darst. Geom.». Darum umfasst die elementare Entwickelung meiner Idee neben der projectivischen auch eine Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen; die Fälle der Berührung mit zwei festen Kreisen, von denen der eine zum Punkt werden darf, während dann der andere die Hauptaxenlänge zum Radius hat, sind seit L. Gaultier (1812, «Journal de l'Ecole polytechnique» Cah. XVI, p. 179—181) durch Poncelet und Steiner allgemein bekannt und benutzt.

Ich bleibe bei dem vorigen Resultat stehen, um einige Bemerkungen daran zu knüpfen. Die Spur der Ebene des Durchdringungskegelschnittes, die gerade Verbindungslinie der Grundpunkte jenes Kreisbüschels, erhellt daraus als nur abhängig von den Spurkreisen irgend zweier unter den gleichseitigen Hyperboloiden — sie ist ihre Radicalaxe, Potenzlinie oder Chordale (Art. 71) und bleibt daher auch dieselbe, wenn man dieselben beiden Kreise als Spuren von gleichseitigen Rotationskegeln oder als Kehlkreise von zur Tafel symmetrischen einfachen gleichseitigen Rotationshyperboloiden annimmt im Falle der Realität, dagegen als Scheitelkreise symmetrischer zweifacher Hyperboloide, wenn sie imaginär sind; diess gibt ihre Definition als Ort der Centra von Kreisen, welche beide gegebene Kreise orthogonal, resp. diametral oder den ersten orthogonal und den zweiten diametral, resp. umgekehrt durchschneiden, je nachdem die beiden Kreise reell, oder imaginär oder der erste reell und der zweite imaginär oder umgekehrt vorausgesetzt sind (Art. 129). In jedem Falle ergibt sich, dass die Potenzlinien von drei Kreisen der Tafel durch einen Punkt gehen (Art. 71, 129), — man nennt ihn für drei reelle Kreise ihren Chordalpunkt, ihr Radical- oder Potenz-Centrum — welcher zugleich der Mittelpunkt eines nach dem vorigen bestimmten Kreises ist; er hat offenbar die doppelte Bedeutung (Art. 130), einerseits die Orthogonalprojection des gemeinsamen Punktes der drei tafelsymmetrischen Hyperboloide zu sein, welche die gegebenen Kreise bestimmen (und insofern ist jener Kreis der zugehörige, sein Bildkreis); anderseits das Centrum des durch die zu jenen Kreisen gehörigen drei Paare von Raumpunkten gehenden tafelsymmetrischen Hyperboloids, welches dann jener Kreis als Kehl- oder Scheitelkreis vollends bestimmt. Nehmen wir ihn in der letzterwähnten Bedeutung, so knüpfen sich folgende weitere Bemerkungen offenbar an. Die drei Paare von Punkten, welche die gegebenen Kreise repräsentiren, bestimmen miteinander zu dreien vier Paare zur Tafel symmetrische Ebenen durch die vier Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise als Spuren; diese schneiden das vorher bezeichnete tafelsymmetrische Hyperboloid in vier Paaren von Kegelschnitten mit vier bestimmten Orthogonalprojectionen in der Tafel. Weil die drei gegebenen Kreise zu ihren Bildkreisen gehören, so liefern die vier den einzelnen Aehnlichkeitsaxen derselben zugeordneten Paare von gemeinschaftlich berührenden oder Apollonischen Kreisen (Art. 122) die Grundkreise der Paare von gleichseitigen Rotationskegeln, welche durch jene Kegelschnitte auf dem Hyperboloid gehen und damit die Kreisbüschel der gleichwinklig schneidenden zu ihren Bildkreissystemen (Art. 140; vergl. Art. 142), zu denen jener Hauptkreis des Hyperboloids selbst auch gehört, so dass er mit je einer der vier Aehnlichkeitsaxen die besagten vier Büschel der Reihe nach bestimmt.

Ich führe noch ein Paar diesen Betrachtungen verwandte Resultate an. Der aus dem Mittelpunkte der Centraldistanz zweier Kreise als Centrum beschriebene Kreis ihres Büschels ist der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche vom einen der gegebenen Kreise orthogonal und vom jedesmal andern diametral geschnitten werden; oder der Ort von Punkten mit gleichen positiven und negativen Potenzen in Bezug auf die gegebenen reellen Kreise. Die gemeinsamen Tangenten von zwei Kreisen sind die Orthogonalprojectionen der in einerlei Verticalebenen liegenden geraden Mantellinien der zugehörigen einfachen tafelsymmetrischen Hyperboloide; da dieselben unter 45° zur Tafel geneigt sind, so liegen die Projectionen ihrer Schnittpunkte in den Mitten zwischen den zugehörigen Berührungspunkten an den Kreisen als ihren Durchstosspunkten in der Tafel; oder die Potenzlinie der Kreise halbirt die zwischen den Berührungspunkten liegenden Strecken ihrer gemeinsamen Tangenten und die vier Berührungspunkte der äusseren und die vier der innern gemeinsamen Tangenten liegen in zwei concentrischen Kreisen.

Die Orthogonalprojectionen der Kehlkreise der unendlich vielen einfachen Rotationshyperboloide, die durch einen Kegelschnitt in der oben dargelegten Weise gehen, auf die Tafelebene bilden ein System doppelt berührender Kreise für die Projection des Kegelschnittes (Art. 170); denken wir irgend zwei derselben und die zur Tafel parallelen Ebenen ihrer Kehlkreise, so theilen diese den Kegelschnitt in zwei Regionen, die eine zwischen ihnen, die andere ausserhalb derselben gelegen; für die Punkte des Kegelschnitts in jener ist die Summe, für die Punkte in dieser die Differenz der Längen der an jene beiden doppelt berührenden Kreise gehenden Tangenten constant, nämlich dem Abstand der beiden Kehlkreisebenen gleich, weil diese Tangenten die sich im Kegelschnittpunkt jeweilig schneidenden Mantellinien repräsentiren und ihre horizontalen Projectionen als von 45° Linien den bezüglichen Höhendifferenzen gleich sind. Die Brennpunkte sind doppelt berührende Kreise vom Radius Null und mit nicht reeller Berührung; das Gesetz von der Summe, resp. Differenz der Radienvectoren ist ein Specialfall jener Erklärung. Sind die doppeltberührenden Kreise concentrisch oder die zugehörigen Hyperboloide coaxial, so erhält man als doppeltberührenden Kegelschnitt einen Kreis, der zu jenen concentrisch ist; die Berührung zwischen concentrischen Kreisen kann nur in den unendlich fernen imaginären Kreispunkten stattfinden.

Denkt man drei Kegelschnitte, die den nämlichen Kreis doppelt berühren, so sind sie die Orthogonalprojectionen von drei Paaren zur Tafel symmetrischer ebener Querschnitte desselben tafelsymmetrischen einfachen Hyperboloids; da ihre Ebenen vier dreiseitige Ecken mit demselben Spurendreieck bilden und die Orthogonalprojectionen ihrer Kanten Durchschnittssehnen der Kegelschnitte in der Tafel sind, so gehen diese viermal zu dreien durch einen Punkt und diese vier Punkte liegen in Paaren in sechs Geraden durch die Ecken jenes Spurendreiecks.

Aber ich verlasse diese leicht zu vermehrenden Beispiele, um den Platz der Theorie der reciproken Radien in den Entwickelungen dieser Idee aufzuzeigen; er ist bezeichnet durch die Verbindung der geraden Linie mit der gleichseitigen Hyperbel (Art. 63, 74), die in dem Doppelsatze liegt, dass zwei Kreise zwei lineare Reihen und ein Kreisbüschel bestimmen; denn der jedesmalige Durchstosspunkt der linearen Reihe in der Hyperbelaxe und Centrale des Kreisbüschels liefert durch die entsprechende Hyperbelordinate einen Kreis des Büschels, den man den äussern oder innern Potenzkreis der gegebenen Kreise nennt (Art. 73) und in Bezug auf ihn als Directrix entspricht jeder der beiden gegebenen Kreise dem andern nach der Abbildung durch reciproke Radienvectoren (Art. 78 f.). In dieser Abbildung entspricht jedem Kreise wieder ein Kreis und beide schneiden einander auf dem Directrixkreis; insbesondere liegen zwei Paare entsprechender Punkte immer auf einem sich selbst entsprechenden Kreis, welcher den Directrixkreis rechtwinklig und die ursprünglichen gegebenen entsprechenden Kreise gleichwinklig schneidet;

d. h. die Kreise, welche zwei gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, bilden zwei Netze mit den beiden Potenzkreisen der gegebenen als Potenz- resp. Scheitelkreisen. Durch die Drehung der betrachteten Kreise um ihre in der Tafel gelegenen Durchmesser (Art. 83) gelangt man zu Kugeln, welche in der Abhängigkeit der reciproken Radien mit den entsprechenden Potenzkugeln als Directrixen stehen, zu den sich selbst entsprechenden Kugeln durch drei Paare von einander entsprechenden Punkten, die nicht in einer Ebene liegen und zu den beiden Netzen der gleichwinklig schneidenden zu zwei Kugeln, die durch deren Potenzkugeln bestimmt werden — eine entsprechende dem Princip der Rotation entspringende Erweiterung der Anschauung vom Netz der Kreise auf den Raum. Dass umgekehrt der Rückgang auf eine Dimension, also in die gerade Punktreihe, von den reciproken Radien zur Involution führt, das erhält hier seine characteristische Ausprägung zuerst in den Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel. (Art. 61, etc.) Wenn von drei Kugeln die erste aus der zweiten und die zweite aus der dritten vermittelst reciproker Radien abgeleitet wurde, so kann auch die erste durch reciproke Radien unmittelbar in die dritte übergeführt werden; denn die Centralebene der drei Kugeln enthält ein durch ihre drei Diametralkreise bestimmtes Netz und bestimmt damit ein zu ihr symmetrisches Netzhyperboloid, in welchem diesen Kreisen bestimmte symmetrische Punktpaare entsprechen. Die Sehne zwischen einem Punkt des ersten und einem Punkt des zweiten Paares trifft die Centralebene in einem Punkte der als Mittelpunkt den Bildkreis des Hyperboloids oder den Kreis im Netze und damit die Kugel liefert, welche Directrix für den Uebergang von der ersten zur zweiten Kugel ist, etc. Man erweitert den Satz auf beliebig viele successive Abbildungen durch reciproke Radien. In dieser Entwickelung ist also Steiner's Lehre von den potenzhaltenden Punkten und Kreisen zugleich die Theorie der reciproken Radien. Dass der geraden Linie ein Kreis und der Ebene eine Kugel durch den Mittelpunkt der Directrix entspricht u. s. w. ergibt sich ebenso einfach. Ich gehe jedoch auf die weitere Ausführung und namentlich auf den engen Zusammenhang, in dem das Alles bei der elementaren Ableitung mit der centrischen Collineation in der Ebene und im Raume steht (Art. 81, 82) nicht weiter ein. Ich muss nur hervorheben, dass mit dieser Theorie der reciproken Radien die Probleme über den gleichwinkligen Schnitt von Kreisen und Kugeln mit gegebenen Kreisen, resp. Kugeln, in die vorher skizzirte Behandlungsweise eingereiht sind. Wenn in derselben Ebene drei Paare von Kreisen gegeben sind (Art. 107) und die Bestimmung von Kreisen verlangt wird, welche das erste Paar der gegebenen unter gleichen Winkeln schneiden, und ebenso unter andern gleichen Winkeln die beiden andern gegebenen Paare, so ist offenbar, dass die gesuchten Kreise die gemeinschaftlichen sind der Tripel von Kreisnetzen, welche aus den Paaren der Netze gleichwinklig schneidender Kreise des ersten, zweiten und dritten Paares gebildet werden können. Haben die drei gegebenen Paare oder haben zwei derselben einen Kreis gemein, so erhält man bemerkenswerthe Spezialfälle ohne irgend wesentliche Veränderung. Und das Analoge gilt für vier Paare von Kugeln (Art. 118), von denen dann wiederum zwei oder drei oder alle Paare eine Kugel gemeinsam haben können. Die Aufgaben bleiben auch lösbar, wenn gerade Linien, respective Ebenen unter die bestimmenden Kreise, respective Kugeln eintreten; wenn aber alle in solche übergingen, so erhält man nur die unendlich ferne Gerade der Tafel, respective die unendlich ferne Ebene des Raums als Grenzform von Kreis und Kugel respective. Ich will auch anmerken, dass nun in die Theorie der Kegelschnitte die Kreispaare eingeführt werden können; es ist klar, dass der Mittelpunkt eines Kreises, der zwei gegebene Kreise gleichwinklig und einen festen Kreis unter vorgeschriebenem Winkel schneidet, einen Kegelschnitt durchläuft, etc. Und so wie durch die oben geschilderte Anwendung des Princips der Rotation die Theorie der Kegelschnitte in der Form der berührenden zu zwei festen Kreisen etc. sich zu einer Theorie der Rotationsflächen zweiten Grades mit zwei Brennpunkten aus den berührenden, respective unter bestimmten Winkeln schneidenden zu zwei festen Kugeln erweitert (Art. 142, 152, 163), so geht auch diess auf dieselben über, dass die eine dieser festen Kugeln durch ein gleichwinklig geschnittenes Paar von Kugeln ersetzt werden kann.

Das ist der Sinn und die Art, in welchen meine Abbildungsidee das Gebiet der Geometrie der Kreise in der Ebene und der Kugeln im Raume beherrscht; die einfache Weise, wie daraus auch die Geometrie der Kreise auf der Kugel erhalten wird, habe ich in einer Schlussbetrachtung anschaulich gemacht (Art. 172—177).

Die Figur des Feuerbach'schen Kreises beim Dreieck liefert ein Beispiel der Anwendung, an dem sich die Vorzüge der Methode bewähren; sie liefert zwei Wege zu seiner Bestimmung, deren einer völlig neu ist, während der andere zu den bekannten Relationen eine ganze Reihe neuer hinzufügt, je nachdem man ihn als gleichwinklig schneidenden der vier die Dreiecksseiten berührenden Kreise K_0, K_1, K_2, K_3 betrachtet oder als vierfachen Apollonischen Kreis, nämlich für jedes der vier aus ihnen zu bildenden Tripel. Im ersten Sinne bildet er mit den drei Seiten des Dreiecks die eine Gruppe von vier gleichwinklig schneidenden der vier gegebenen Kreise und es ergeben sich noch andere vier solcher Kreise W_0, W_1, W_2, W_3; im zweiten Sinne zählt er in jeder der vier Gruppen von acht Apollonischen Kreisen, die den Tripeln der Kreise K_i zugehören und da auch jede der Dreieckseiten das Gleiche thut, so bleiben sechszehn andere Apollonische Kreise übrig; dieselben theilen sich in fünf Gruppen, nämlich vier Tripel und ein Quadrupel; jene gehen je durch eines der Potenzcentra S_0, S_1, S_2, S_3 der Tripel der Kreise K_i, nämlich $K_1\,K_2\,K_3$, $K_2\,K_3\,K_0$, $K_3\,K_0\,K_1$, $K_0\,K_1\,K_2$ respective oder sie bilden vier konische Netze und sind den Dreieckseiten als Apollonischen Kreisen conjugirt; diese sind dem Feuerbach'schen Kreise conjugirt und haben ihre Mittelpunkte A_{iF} in einer geraden Linie, die auch den Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises enthält und durch die Höhenschnittpunkte der vier Dreiseite geht, die aus den nicht in die Dreieckseiten fallenden vier Aehnlichkeitsaxen der Kreise K_i gebildet sind, oder sie bilden mit dem umgeschriebenen Kreise ein planares Netz.

Die Mittelpunkte der Kreise W_i sind zu den Potenzcentren S_i centrisch symmetrisch für den Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises und zu den Mittelpunkten K_i ähnlich und ähnlich gelegen für den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks als Centrum und das Verhältniss $1:2$; sie sind auch von den jeweiligen ungleichnamigen S_k um den Radius des umschriebenen Kreises entfernt, während durch die

Tripel der Mittelpunkte der K_i vier Kreise gehen, die den Durchmesser des umschriebenen zum Radius haben. Der Feuerbach'sche Kreis gehört als solcher gleichmässig zu den zwölf Dreiecken aus den Vierecken $E_1\ E_2\ E_3\ H$, $S_0\ S_1\ S_2\ S_3$, $W_0\ W_1\ W_2\ W_3$, wird also von den 48 berührenden Kreisen derselben berührt, etc. (Art. 178 f.). So wie der Feuerbach'sche Kreis einem gemeinsamen Punkte der vier gleichseitigen Rotationskegel K_0, $\mathsf{K}_i{}^*$ über den Kreisen K_0, $K_1{}^*$, $K_2{}^*$, $K_3{}^*$, wo die Spitze des ersten auf der entgegengesetzten Seite der Tafel zu den drei übrigen liegt, oder einem gemeinsamen Punkte ihrer sechs Durchdringungshyberbeln entspricht, indess von den sechszehn übrigen Apollonischen Kreisen je eines der Tripel durch ein S_i und ein Kreis von dem Quadrupel der A_{iF} die Schnittpunkte der Kegel über einem Tripel der Kreise K_i sind; so sind die gleichwinklig schneidenden Kreise W_i die Bildkreise gemeinsamer Punktepaare der Netzhyperboloide, die die Potenzkreise der K_i zu zweien bestimmen und jener gehört allen ihren Gruppen zugleich an, d. h. er schneidet gleichzeitig die äusseren Potenzkreise der Paare aus K_1, K_2, K_3 orthogonal und die inneren Potenzkreise der Paare $K_0\ K_1$, $K_0\ K_2$, $K_0\ K_3$ diametral (Art. 106).

Die Mittelpunkte der Durchdringungshyperbeln M_{12}, M_3, ... zwischen den Kegeln $\mathsf{K}_1{}^*\ \mathsf{K}_2{}^*$ oder $\mathsf{K}_1\ \mathsf{K}_2$, $\mathsf{K}_0\ \mathsf{K}_3{}^*$, ... halbiren die Verbindungslinien der zugehörigen Spitzen, ihre Grundrisse also die Strecken $K_1\ K_2$, $K_0\ K_3$, ... und liegen in drei Durchmesserendpunkten des umgeschriebenen Kreises, sowie auch in Perpendikeln zu den Dreiecksseiten $E_1\ E_2$, $E_2\ E_3$, $E_3\ E_1$ in ihren Schnittpunkten mit den geraden Linien $S_0\ S_3$, $S_1\ S_2$, ... — was den Satz gibt: Die Fusspunkte der Perpendikel auf die Seiten eines Dreiecks aus einem Punkte des ihm umschriebenen Kreises liegen in einer geraden Linie; insbesondere die für die Endpunkte eines Durchmessers in zwei zu einander rechtwinkligen Geraden, deren Schnittpunkt auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks liegt. (Hier speciell die Mitten der Seiten des Dreiecks.) Die Figur enthält überdiess die drei Höhen des Dreiecks als Fusspunktlinien der Ecken des Dreiecks, von denen sie ausgehen, und die drei Seiten als Fusspunktlinien der jenen diametral gegenüberliegenden Punkte; mit jeder von jenen bestimmt die zu ihr normale unter diesen einen Punkt des Feuerbach'schen Kreises; oder alle sechs bilden ein gleichseitig hyperbolisches Viereck E_1 E_2 E_3 H, analog dem vorher erhaltenen S_1 S_2 S_3 S_0, dessen Diagonalpunkte dem Feuerbach'schen Kreise angehören.

Die Untersuchung der Bewegung der Fusspunktlinie bei dem infinitesimalen Fortrücken des Punktes auf dem umschriebenen Kreis zeigt nun, dass für jedes rechtwinklige Paar der Fusspunktgeraden ihre Berührungspunkte mit der Enveloppe aller solchen Geraden in den doppelten Abständen ihrer zweiten Durchschnittspunkte mit dem Feuerbach'schen Kreise von ihrem Schnittpunkte auf demselben und nach der gleichen Seite liegen; so wie dass die Verbindungslinie dieser Berührungspunkte wiederum eine der Fusspunktlinien ist; wir erhalten so zu S_0 S_3 und S_1 S_2 als Verbindungslinie der Berührungspunkte die Höhe E_3 H, die sich mit der Seite E_1 E_2 auf dem Feuerbach'schen Kreise schneidet und eine neue Berührungssehne liefert, etc.; man sieht, dass die beiden hyperbolisch gleichseitigen Vierecke der Figur in der Verbindung sind, welche der Satz anzeigt: Durch jeden Punkt des Feuerbach'schen Kreises gehen drei Tangenten der Enveloppe — dieselbe ist eine Curve dritter

Classe — von denen zwei zu einander rechtwinklig sind, indess die dritte auf der Berührungssehne der beiden vorigen rechtwinklig steht. Und weil für jeden der beiden imaginären Kreispunkte die unendlich ferne Gerade als Fusspunktlinie erhalten wird, so ist sie eine Doppeltangente der Enveloppe und ihre Berührungspunkte sind — weil sie zu sich selbst normal ist — die imaginären Kreispunkte selbst. Unsere Constructionsfigur des Feuerbach'schen Kreises führte also direct auf die berühmte Hypocycloide mit drei Spitzen, welche J. Steiner 1856 in der Akademie von Berlin und im 53. Bd. des »Journal« besprochen hat.

So führt die Figur des Feuerbach'schen Kreises über die Elemente hinaus zu einer Curve höherer Ordnung; ähnlich ist der Satz von den Punkten mit gleichen positiven und negativen Potenzen in Bezug auf zwei reelle Kreise ein Specialfall eines Satzes über Punkte von äquidifferenten derartigen Potenzen in Bezug auf zwei reelle Kreise, der auf einen Ort von der vierten Ordnung führt. Oder um ein den früheren Betrachtungen nahe liegendes systematisches Beispiel zu wählen: Wenn Kreise aus Punkten einer Curve n ter Ordnung mit solchen Radien beschrieben werden, dass sie den einen Aehnlichkeitspunkt mit einem festen Kreis auf einer festen Curve m ter Ordnung haben, so beschreibt der andere eine Curve von der Ordnung mn; insbesondere wenn sie einen festen Kreis berühren, ist der Ort ihrer freien Aehnlichkeitspunkte mit diesem eine Curve von der Ordnung $2n$, insbesondere für die Curve als Kegelschnitt eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, nämlich das centrale Bild der Durchdringungscurve zwischen einem zur Tafel normalen Cylinder über dem Kegelschnitt mit einem gleichseitigen Rotationskegel über dem festen Kreis — wie das mein Assistent Herr

Dr. Beyel in seiner Dissertation »Centrische Collineation $n$ter Ordnung in der Ebene vermittelt durch Aehnlichkeitspunkte von Kreisen« (Zürich 1882) näher ausgeführt hat.

Aber auch ohne die Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades zu verlassen, wird man nur mit Heranziehung der aus derselben Quelle mit entspringenden Theorien von der Projectivität und Involution auf umfassendere Relationen derselben zu Kreissystemen geführt. Die Projectivitätstheorie der Kegelschnitte lehrt ihre Bestimmung durch fünf Tangenten; jede Gruppe von vier derselben bildet ein vollständiges Viereck, in welchem nach einer Bemerkung von Gauss die Mitten der drei Diagonalen auf einer Geraden liegen; dieselbe enthält auch die Mittelpunkte aller die vier Geraden berührenden Kegelschnitte — die Gauss'schen Geraden der fünf durch fünf gerade Linien derselben Ebene bestimmten vollständigen Vierecke gehen daher durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes, den jene sämmtlich berühren. Nach Bodenmiller bilden ferner die über den Diagonalen eines Vierseits als Durchmesser oder um jene Mitten beschriebenen Kreise ein Büschel oder gehen durch zwei Punkte, Punkte mit rechtwinkligen Tangentenpaaren an alle Kegelschnitte der die vier Tangenten berührenden Schaar, wie schon Plücker bemerkt hat; ist insbesondere unter den vier Geraden die unendlich ferne, so werden die Diagonalen zu den von den Ecken aus unbegrenzten Gegenseiten parallele und die Bodenmiller'schen Kreise zu den Höhen; die Schnittpunkte der Höhen in den vier Dreiecken aus vier Geraden liegen daher in der Directrix der von ihnen berührten Parabel. Die Grundpunkte der aus fünf Geraden in dieser Weise entspringenden fünf Büschel von je drei Kreisen liegen also sämmtlich auf dem ihnen allen gemeinsamen sogenannten Orthogonalkreis des durch sie bestimmten Kegelschnittes. Zu den conjugirten oder orthogonalen Büscheln der vorigen, die deren Potenzlinien zu ihren Centralen haben, liefert aber jedes der fünf Vierseite fünf Kreise und die Gruppe dieser fünf mal fünf Kreise bildet ein Netz mit dem Orthogonalkreis als Potenzkreis; diese fünf Kreise sind der umschriebene Kreis des aus den drei Diagonalen des Vierseits gebildeten Dreiecks und die vier um die Höhenschnittpunkte seiner vier Dreiseite mit den geometrischen Mitteln der Höhenabschnitte als Radien beschriebenen oder diesen orthogonal conjugirten Kreise. (»Darstell. Geom.« Art. 10, 47 etc.) Die Ecken des Diagonaldreiecks bilden in der That ein Tripel harmonischer Pole für alle Kegelschnitte der Schaar und also für den Kegelschnitt der fünf Tangenten — entsprechend einem wohlbekannten Resultat aus der Invariantentheorie der Kegelschnitte, das auch für die quadratischen Formen mit mehr als drei Veränderlichen fortbesteht.

Die letzte Bemerkung zeigt, dass diese Sätze auf Flächen zweiten Grades erweitert werden können, und indem ich anmerke, dass man in P. Serret's »Géometrie de Direction« (Paris 1869) viele dieser Erweiterungen findet, ist doch hinzu zu fügen, dass noch manche Frage zu beantworten bleibt.

Aber ich habe noch in zwei Richtungen den angeregten Gedankengang zu ergänzen, um ihn zum Schlusse zu führen. Zuerst durch die Bemerkung, dass geometrisch die Durchführung des Princips der Dualität in allem Vorgeführten geboten ist, insofern sie sich fruchtbar erweist. In dieser Beziehung stellt sich, wie ich vor Jahren in einer Vorlesung ausgeführt habe, neben die Projection oder Bestimmung aller Raumelemente durch die Elemente in einer

Ebene mittelst gerader Strahlen aus einem festen Punkt mit zwei festen Ebenen, deren eine die Bildebene ist, — um andere partiell duale Umformungen nicht zu erwähnen — die Bestimmung aller Raumelemente durch die Elemente in einem Bündel mittelst einer festen Ebene und zweier festen Punkte; worin eine Reihe Spezialfälle eingeschlossen sind, die denen der Centralprojection entsprechen. Sind B und U die festen Punkte, der erste der Scheitel des den Raum abbildenden Bündels, dazu als feste Ebene die unendlich ferne, so wird eine Gerade g bestimmt durch die Eben $g\,B$ und die durch B gehende Parallelebene zur Ebene $g\,U$; aus beiden bezeichneten Ebenen bestimmt sich die Gerade sehr einfach; für eine in der unendlich fernen Ebene liegende Gerade fallen beide zusammen etc.; (Vgl. »Geom. Mitthlg.« IV., Bd. XXIV p. 213 f.)

Aber auch auf die Idee der Cyklographie ist das Princip der Dualität anwendbar; ich gab in einer Anmerkung zur IV. der »Geom. Mitthl.« (Bd. XXIV, p. 212) eine Abbildung der geraden Linien des Raumes an, welche als Abbildung des zu sich selbst dualen Raumelements in wesentlich derselben Art erhalten wird, wenn man die Ebenen des Raumes durch die dual umgeformte Abbildung der Cyklographie in der Tafel bestimmt, also statt durch Kreise (oder Kegelschnitte mit zwei festen Punkten in der Polare des Durchstosspunktes der Verbindungslinie der zwei symmetrisch liegenden Raumpunkte) durch Kegelschnitte mit zwei festen Tangenten durch den Pol der Schnittlinie oder der Spur der zwei symmetrisch liegenden Ebenen; ein solches Kegelschnittsystem ist das mit einem festen Brennpunkt, welches einen Kegelschnitt durch Angabe seiner entsprechenden Directrix und eines Punktes oder durch Festsetzung der Zahl bestimmt, die das constante Verhältniss der Abstände seiner Punkte vom Brennpunkt und von der Directrix ausdrückt; setzt man diese Zahl der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels der Ebenen gegen die Tafel gleich, so hat man in sehr einfacher Weise die dreifach unendlich vielen Ebenen des Raumes mit den bezeichneten Kegelschnitten in der Ebene verbunden und der Erfolg beweist die Brauchbarkeit der Beziehung; ich kann hiefür auf die Abhandlung meines Assistenten Herrn Dr. Keller, unter dem Titel »über monoconfocale Kegelschnitte« im Anfange dieses XXVII. Bandes verweisen, in welcher derselbe selbstständig die Elemente dieser Abbildung bis zum Apollonischen Problem für monoconfocale Kegelschnitte entwickelt hat; die Weiterführung zu den Winkelschnittproblemen, etc. nach dem Plane meiner »Cyklographie« ist nicht schwierig. Die Analogie zur Entwickelung der Feuerbach-Relationen gibt den Satz: Zu den vier monoconfocalen Kegelschnitten durch dieselben drei Punkte gibt es einen Kegelschnitt, der sie alle berührt und denselben Brennpunkt hat.

Die Verbindung mit der Collineation ist auch hier evident und macht sich geltend durch den offenbaren Satz: Kegelschnitte mit einerlei Brennpunkt sind für denselben centrisch collinear mit zwei durch den Schnitt der Directrixen gehenden Collineationsaxen.

Sodann mit der andern Bemerkung, dass wir in der Centralprojection wie mit der Methode der »Cyklographie« etc. den Raum auf die Ebene oder genauer einen Raum von drei Dimensionen auf einen Raum von zwei Dimensionen beziehen und dadurch untersuchen; dort entwickeln wir durch die beiden Grundoperationen des Projicierens und Schneidens die projectivischen Eigenschaften, hier kommen wir analog zur Durchforschung eines ausgedehnten Gebietes wesentlich metrischer Relationen. Wir können dieselben Gedanken auf den Raum von drei als enthalten in dem von vier Dimensionen anwenden. In jener Richtung habe ich in bezüglichen Vorlesungen hier gern das älteste mir bekannte Beispiel einer Verwendung des Gedankens benutzt, welches von Prof. Cayley im 31. Bd. des »Journal« p. 213 gegeben ist; es besagt etwa folgendes: Wenn n Punkte des Raumes von drei Dimensionen 1, 2 . . . . n durch ihre n . n—1 : 2 Verbindungsgeraden und n . n—1 . n—2 : 3! Verbindungsebenen vereinigt werden, so schneidet jeder lineare Raum von zwei Dimensionen desselben, d. h. jede Ebene ein System von Durchstosspunkten und Spuren aus ihnen, jene durch 12, 13 . . . . 1 n, 23, . . 2 n, etc., diese durch 123, 124, . . 12 n, etc. bezeichnet, so dass jene n . n—1 : 2 Punkte in n . n—1 . n—2 : 3! Geraden liegen. Betrachten wir nun den dreidimensionalen Raum als einen Schnitt aus einem linearen Raum von vier Dimensonen, so entspringen den n . n—1 : 2 Verbindungslinien von n Punkten des vierdimensionalen Raumes in Paaren ebenso viele Punkte, den n . n—1 . n—2 : 3! Verbindungsebenen derselben Punkte zu dreien ebenso viele Gerade und den n . n—1 . n—2 . n—3 : 4! Verbindungs- — ich will sagen — Super-Ebenen derselben zu vieren ebenso viele Ebenen im dreidimensionalen Schnittraum; und man hat den Satz, dass sich Systeme von n . n—1 : 2 Punkten im gewöhnlichen Raum bilden lassen, welche zu drei in n . n—1 . n—2 : 3! Geraden und zu vier in n . n—1 . n—2 . n—3 : 4! Ebenen liegen.

Und wenn man den ebenen Schnitt eines solchen Systems bildet, so entspringt ein ebenes System von n.n—1.n—2:3! Punkten, die zu vier in n.n—1.n—2.n—3:4! Geraden liegen.

Z. B. für $n = 5$ zuerst Systeme von 10 Punkten im Raum, die zu drei in 10 Geraden und zu vier in 5 Ebenen liegen; sodann Systeme von 10 Punkten in der Ebene, die zu vier in 5 Geraden liegen — einfach die Ecken der weiter oben beobachteten vollständigen Fünfseite. Ihr Schnitt mit einer Geraden sind 5 Punkte in einer Geraden. Für $n = 4$ als Zahl der Punkte im Raum von vier Dimensionen erhält man als Schnitt des Systems mit dem dreidimensionalen Raum 6 Punkte zu 3 in 4 Geraden, und zu 4 in einer Ebene und daraus als Schnitt mit der Ebene 4 Punkte in einer Geraden, die nun mit einer Geraden nur einen Schnittpunkt und kein System mehr hervorbringt; etc. Es war ein nach verschiedenen Seiten hin lehrreiches Beispiel, dem nur die nähere descriptiv geometrische Ausführung fehlte.

Die Untersuchung der algebraischen Raumcurven nach diesem Princip des Projicirens und Schneidens — vergl. meine darstellende Geometrie 2. Thl. § 82 f. — wie sie zuerst von Cayley und Salmon entwickelt worden ist, zeigt den Charakter der Methode zugleich dahin, dass sie die verschiedenen Centralprojectionen einer und derselben Raumcurve in eine Ebene und die verschiedenen Querschnitte einer und derselben developpabeln Fläche in Familien von Curven vereinigt; auch das ist derselben Erweiterung fähig.

Prof. G. Veronese in Padua, einst (bis mit Sommer 1876) Schüler unserer Abtheilung für Fachlehrer, hat in einer werthvollen Abhandlung die »Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens« (»Math. Annalen« Bd. XIX, p. 161—234) zum erstenmale für den allgemeinen Raumbegriff des linearen Raumes von n Dimensionen ausgeführt und dadurch die Grundsätze der

Geometrie der Lage für denselben aufgestellt. Die gewöhnliche Geometrie von drei Dimensionen erhält eine Reihe von neuen Ergebnissen aus dem Gedanken, sie als eine Schnittbildung aus dem Raum von vier Dimensionen aufzufassen.

Der Stellung eines leitenden heuristischen Princips gemäss, welche ich der Centralprojection aus dem Raum von drei Dimensionen auf einen von zweien in der pädagogischen Entwickelung der gewöhnlichen Geometrie beilege, schien es mir in analoger Weise vortheilhaft, den Raum von vier Dimensionen central aus einem seiner Punkte auf einen seiner nicht durch jenen gehenden dreidimensionalen Räume zu projiciren und dadurch seine Formen und deren Eigenschaften zu erläutern; während zugleich aus den bezüglichen Constructionen nach ihren Bedeutungen für die vierdimensionalen Formen neue Eigenschaften des dreidimensionalen Raumes entspringen, wie in der Centralprojection neue planimetrische Sätze erhalten werden; ich entwickelte die Elemente dieser Centralprojection im Anfang dieses Jahres für die Zwecke einer im jetzigen Sommer zu haltenden Vorlesung über ausgewählte Kapitel der Geometrie, durch die ich unter Andern auch das Studium der oben genannten Veronese'schen Abhandlung erleichtern und fördern wollte; und ich konnte dabei genau dem Schema folgen, welches in meiner »Darstell. Geom.« in den Art. 1—12 vorgezeichnet ist.

Wenn ich auf des zu früh verstorbenen englischen Mathematikers Clifford geistvolle letzte Abhandlung »On the Classification of Loci» in »Philos. Transactions von 1878 (London) pag. 663—681« hinweise, so bezeichne ich damit das tiefere allgemein mathematische Interesse solcher Erörterungen in einem sehr wesentlichen Stücke; ihr speciell geometrisches ist hier genügend beleuchtet, und dass sich dasselbe auf die Idee der Cyklographie überträgt, ist offenbar: Die Kugeln eines dreidimensionalen Raumes lassen sich als die Distanzkugeln der Centralprojectionen für die Punkte des vierdimensionalen ansehen und behandeln, in welchem wir ihn enthalten denken.

Jetzt beim Abschluss des Druckes bin ich in der Lage, folgende Anmerkung hinzuzufügen: Als ich an Prof. Veronese ein Exemplar der Cyklographie mit einem Briefe sendete, in welchem ich — eben auf Grund der Weiterführung der Centralprojection in den Raum von vier Dimensionen, die ich gemacht, aber ohne davon zu schreiben — von der Entwickelung der Idee der Cyklographie als eines Grundprincips der Metrik in Räumen von verschiedenen Dimensionen sprach, zu dessen Entwickelung ich Lust hätte ihn aufzufordern, falls andere Arbeiten einem solchen Plane Raum bei ihm liessen — erhielt ich als Antwort eine eben gedruckte Abhandlung »Sulla Geometria descrittiva a quattro Dimensioni« (38 S. 8^0 mit 3 Taf.), deren erster Theil (bis S. 25) sich mit meinen oben erwähnten Entwickelungen fast genau deckt, während im zweiten Theil auch die orthogonale Projection und die Axonometrie behandelt werden, auf die ich für die Vorlesung nicht näher eingegangen war. Ich sah aus derselben und aus einem seitdem noch eingegangenen Briefe, dass Prof. Veronese ihre Hauptstücke schon im Frühjahr 1881 im mathematischen Seminar von Prof. F. Klein in Leipzig vorgetragen und dass er sie also in richtiger Erkenntniss ihres Werthes und Nutzens vor der Vollendung seiner oben citirten Abhandlung über die projectivische Geometrie (Sommer 1881) durchgeführt hat. Ich kann mich auch dieses Zusammentreffens nur freuen.
