

Ueber monoconfocale Kegelschnitte.

Von **Dr. J. Keller.**

Mit 22 Figuren.

Nach einem Abbildungsprincipe von Prof. Dr. W. Fiedler*) werden die dreifach unendlich vielen Kreise einer Ebene durch die in ebenso grosser Anzahl vorhandenen Punkte des Raumes dargestellt, in der Weise, dass man in dem Mittelpunkte des Kreises das Perpendikel auf die Ebene errichtet und auf demselben nach der einen oder andern Seite eine Distanz aufträgt, die gleich dem Radius des Kreises ist; der Raumpunkt, zu dem man so gelangt, ist der Repräsentant des betreffenden Kreises. Systemen von einfach unendlich vielen Kreisen entsprechen alsdann einfach unendlich viele Punkte des Raumes, die auf einer gewissen Curve liegen; Systemen von zweifach unendlich vielen Kreisen zweifach unendlich viele Punkte, die eine gewisse Fläche erfüllen; hiernach werden die Aufgaben, Kreise nach vorgeschriebenen Bedingungen zu construiren, auf bestimmte Probleme über jene Curven und Flächen übertragen. — Angeregt durch die Fülle und Vollständigkeit der Resultate, sowie durch die so zu sagen spielend einfachen Lösungen scheinbar schwieriger Probleme, die sich aus diesem Abbildungsprincipe ergeben, suchte ich nach ähnlichen Fällen, und da bot sich mir denn in erster

*) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Bd. XXIV, p. 145 ff.

Linie der duale zu jenem dar: Die Kegelschnitte einer Ebene, die einen gemeinsamen Brennpunkt haben, durch die Ebenen des Raumes darzustellen: Denn wie der Kreis ein Kegelschnitt ist, von welchem begriffsgemäss bereits zwei Punkte festgesetzt sind, die imaginären Doppelpunkte der Involution harmonischer Pole auf der unendlich fernen Geraden seiner Ebene, (die Kreispunkte seiner Ebene), so sind auch von dem Kegelschnitte, der einen gegebenen Punkt zu einem seiner Brennpunkte hat, bereits zwei Tangenten fixirt, die imaginären Doppelstrahlen der Rechtwinkel-Involution harmonischer Polaren aus dem Brennpunkte; den Punkten des Raumes entsprechen aber seine Ebenen nach dem Dualitätsprincipe. Diesen Analogieen gemäss ist nun auch meine Darstellung monoconfocaler Kegelschnitte jener Darstellung der Kreise nachgebildet: Ich nenne die Ebene, auf der sich die dreifach unendlich vielen Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkte befinden, die Bildebene; F sei der gegebene Brennpunkt. Ist nun K ein bestimmter Kegelschnitt des Systems, so stelle ich ihn dar durch die eine der zwei Ebenen, welche die Bildebene in der Polare des Brennpunktes F (Leitlinie l) schneiden und mit ihr den Winkel α einschliessen, wobei $\operatorname{tg} \alpha$ dem constanten Verhältnisse e gleich ist, in welchem die Entfernung eines Curvenpunktes vom Brennpunkte F zu seiner Entfernung von der Leitlinie steht. Ich überlasse es von jetzt ab dem Leser, selber zu verfolgen, wie zwischen den aus jenem Kreisabbildungsprincipe fliessenden Resultaten und den meinigen, sowohl in der Art und Weise der Ableitung als auch in dem endlichen Ausdrucke derselben überall das Dualitätsgesetz durchblickt.

Ich setze voraus, der Kegelschnitt (Fig. 1, nach Annahme eine Ellipse) sei gegeben, ausser durch den Brennpunkt F , durch die Scheitel A, B der grossen Axe, womit auch der Mittelpunkt M und die Scheitel C, D der kleinen Axe leicht erhältlich sind. Errichten wir in A und B die Lothe auf die Gerade AB und tragen auf ihnen resp. die Längen AF und BF nach gleichen Richtungen auf, so schneidet die Verbindungsgerade der Endpunkte $(A), (B)$ die Gerade AB in dem Punkte E ; das in E auf AB errichtete Loth ist die Polare l des Brennpunktes F ; denn es verhält sich $\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{BE} = e$. Die Gerade $E(A)(B)$ berührt zudem den Kegelschnitt in ihrem Schnittpunkte (F) mit dem in F auf AB errichteten Lothe, denn es ist auch $\frac{(F)F}{F'E} = e$. Hiermit sind nun auch die zwei Ebenen bekannt, welche unserem Abbildungsprincipe gemäss den Kegelschnitt repräsentiren: Sie gehen durch l und schliessen mit der Bildebene den Winkel α ein, dessen tang. $= e = \frac{(A)A}{AE}$ ist. Offenbar sind die Geraden $E(A)(B), E(A^*)(B^*)$ die Umklappungen der durch E gehenden Falllinien dieser Ebenen mittelst ihrer projicirenden Ebene. Umgekehrt ist durch die Kenntniss der einen oder der andern dieser Ebenen der Kegelschnitt wirklich eindeutig repräsentirt, mit anderen Worten, man ist dadurch in den Stand gesetzt, den Kegelschnitt zeichnen zu können; denn durch Angabe der Linie l , der Spur der Ebene mit der Bildebene, ist das Loth $F'E$ auf sie und durch die Kenntniss des Winkels α die Gerade $E(A)(B)$ bestimmt; schneidet man diese letztere durch die 45° Linien $F'(A), F'(B)$, gelangt man zu den Punkten $(A), (B)$ und damit zu den Scheiteln A und B selbst, woraus der

Kegelschnitt gezeichnet werden kann. Es ist augenscheinlich, dass die andere mit der Bildebene den Winkel $-\alpha$ einschliessende Ebene die nämlichen Punkte A, B liefert. Ist P ein beliebiger Curvenpunkt, so ergibt sich $\frac{PF}{PP_1} = \frac{(P)P}{PP_1} = e = \operatorname{tg} \alpha$, d. h. errichten wir in einem willkürlichen Curvenpunkte das Loth auf die Bildebene, so trifft es die den Kegelschnitt repräsentirende Ebene in einem Punkte, dessen Entfernung von $P =$ der Länge des Radius vector PF ist oder also: Der über dem Kegelschnitte als Basis errichtete senkrechte Cylinder trifft die den Kegelschnitt repräsentirende Ebene in einem neuen Kegelschnitte, dessen Punkte von den entsprechenden Basispunkten um die Radien vectoren der letzteren entfernt sind. Ist $e = 1$ oder $\alpha = 45^\circ$ (Fig. 2), so läuft die eine der durch F gehenden 45° Linien parallel zu $E(F_1)$, die andere trifft sie in der Mitte zwischen E und (F_1) , d. h. der zugehörige Kegelschnitt ist eine Parabel; ist $e > 1$ oder $\alpha > 45^\circ$, so ist der entsprechende Kegelschnitt eine Hyperbel, deren Asymptoten mit AB einen Winkel φ einschliessen, dessen $\operatorname{cosin.} = \frac{a}{c}$ ist; $e < 1$ oder $\alpha < 45^\circ$ entspricht wie in Fig. 1 eine Ellipse. Steht die Ebene auf der Bildebene senkrecht, entspricht ihr als Kegelschnitt die als doppelt gelegt anzusehende Gerade l ; sie ist als Grenzfall einer Hyperbel zu betrachten, deren reelle Axe zu o geworden; der Bildebene ($l, \alpha = 0$) entspricht der Brennpunkt F , anzusehen als Grenzfall einer Ellipse oder besser eines Kreises vom Radius o . Auch über die Lage der Ebenen, welchen die speciellen Formen: Kreis und gleichseitige Hyperbel entsprechen, kommen wir in's Klare, wenn wir bei den Kegel-

schnitten auf das Abhängigkeitsgesetz zwischen dem Axenverhältnisse und der Constanten e Rücksicht nehmen. Es ist $e = \frac{c}{a}$, somit für den Fall der Ellipse

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2};$$

für $b = a$ wird $e = 0$, und somit $\alpha = 0$, d. h. dem Systeme der zur Bildebene parallelen Ebenen entsprechen Kreise; sie haben alle den Brennpunkt F zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte und jeder unter ihnen hat zum Radius die Entfernung der entsprechenden Ebene von der Bildebene. Für den hyperbolischen Fall ist

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1};$$

daher wird für $b = a$, $e = \sqrt{2}$, d. h. den Ebenen, welche mit der Bildebene den Winkel $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ einschliessen, entsprechen gleichseitige Hyperbeln; machen wir demzufolge in Fig. 2 die Kathete $F(F_2)$ des rechtwinkligen Dreieckes $EF(F_2)$ gleich der Hypothenuse des rechtwinklig gleichschenkeligen Dreieckes $EF(F_1)$, so schliesst die Gerade $E(F_2)$ mit EF den Winkel $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein und folglich entspricht der zugehörigen Ebene eine gleichseitige Hyperbel. Aus der Formel $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ folgt allgemein, dass die Asymptoten der Hyperbel, deren entsprechende Ebene mit der Bildebene den Winkel α einschliesst, mit der Geraden EF einen Winkel φ bilden, dessen Secante $= \operatorname{tg} \alpha$ ist. — *Den Ebenen eines Büschels, dessen Scheitelkante auf der Bildebene liegt*, entsprechen hier-nach Kegelschnitte, welche diese Scheitelkante zur gemeinsamen Leitlinie l haben. Sie bilden in Wirklichkeit ein System sich doppelt berührender Kegelschnitte, welche die

imaginären Schnittpunkte der gemeinschaftlichen imaginären Tangenten aus F' mit l zu Berührungspunkten haben. In Bezug auf F' als Centrum und l als Axe sind sie centrisch collinear. Es kommen unter ihnen unendlich viele Ellipsen, unendlich viele Hyperbeln, eine Parabel, eine gleichseitige Hyperbel, ein sich auf den Brennpunkt reducirender Kreis und eine in die als Doppellinie zu betrachtende Gerade l degenerirte Hyperbel vor. — Die vorhin abgeleitete Beziehung zwischen dem Axenverhältnisse und der Constanten e gestattet auch, die Ellipse des Systemes zu construiren, der ein vorgeschriebenes Axenverhältniss entspricht oder die Hyperbel, deren Asymptoten einen gegebenen Winkel einschliessen. — Betrachten wir im Weiteren andere specielle Lagen, welche die Scheitellkante des Ebenenbüschels haben kann, so bieten sich ausser dem eben erwähnten folgende weitere Fälle dar:

2) *Die Scheitellkante des Ebenenbüschels liege auf der Bildebene, gehe aber durch F' .*

Den Ebenen, denen die Winkel $\alpha > 45^\circ$ zukommen, entsprechen Kegelschnitte, die in Paare von geraden Linien durch F' degeneriren, und zwar schliessen diese mit dem Lothe von F' auf l Winkel ein, deren Secanten $= \operatorname{tg} \alpha$ sind; für $\alpha = 45^\circ$ vereinigen sich die beiden Geraden in dieses Loth; den Winkeln $\alpha < 45^\circ$ entsprechen imaginäre Linienpaare, von denen nichts reell ist, als ihr Schnittpunkt F' ; für $\alpha = 90^\circ$ fallen die beiden Geraden wieder zusammen in die Gerade l ; für $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ besteht das Linienpaar aus den zwei 45° Linien durch F' (degenerirte gleichseitige Hyperbel).

3) *Die Scheitellkante des Ebenenbüschels liege auf der Bildebene im Unendlichen.*

Das Büschel besteht aus den zur Bildebene parallelen

Ebenen und ihnen entspricht das schon früher erwähnte System concentrischer Kreise vom Mittelpunkte F' ; der ∞ fernen Ebene entspricht die ∞ ferne Gerade der Bildebene.

4) *Die Scheitellkante des Ebenenbüschels liege im Unendlichen.*

Alle Ebenen des Büschels sind einander parallel und schliessen daher mit der Bildebene den nämlichen Winkel α ein: Es entsprechen ihnen Kegelschnitte mit dem gleichen Axenverhältnisse, deren grosse Axen auf derselben Geraden liegen; sie sind ähnlich und ähnlich gelegen für F' als Aehnlichkeitscentrum und schneiden daher die ∞ ferne Gerade in denselben zwei Punkten. Für $\alpha < 45^\circ$ besteht das System aus lauter Ellipsen, welche im Unendlichen zwei imaginäre Punkte gemeinsam haben; für $\alpha > 45^\circ$ aus lauter Hyperbeln mit parallelen Asymptoten; für $\alpha = 45^\circ$ aus lauter Parabeln; für $\alpha = 90^\circ$ aus einem System paralleler Geraden, den Spuren der betreffenden Ebenen, die jedoch als Doppelgerade anzusehen sind und daher aufgefasst werden können als Kegelschnitte, die sich im Unendlichen in dem nämlichen Punkte berühren.

5) *Die Scheitellkante des Ebenenbüschels stehe zur Bildebene senkrecht.*

Alsdann stehen auch alle Ebenen des Büschels zur Bildebene senkrecht und das ihnen entsprechende Kegelschnittssystem besteht daher aus dem Büschel ihrer Spuren; jede derselben ist als Doppelgerade aufzufassen, so dass sie betrachtet werden können als Kegelschnitte, die sich im Fusspunkte der Scheitellkante berühren.

6) *Die Scheitellkante des Ebenenbüschels sei parallel zur Bildebene.*

Um dieses Ebenenbüschel darzustellen (Fig. 3), denken wir uns durch F' zu seiner Scheitellkante die Normal-

ebene gelegt; diese schneidet aus ihm ein Büschel von Strahlen, deren Winkel unter einander die wirklichen Neigungswinkel der Ebenen darstellen und die mit der Spur FE der Normalebene Winkel bilden, die gleich sind den Neigungswinkeln α der Ebenen mit der Bildebene; das Strahlenbüschel aus (S) ist die Umklappung dieses Strahlenbüschels in die Bildebene. Durch die Scheitellkante s gehen je zwei Ebenen, die mit der Bildebene den gleichen Winkel α einschliessen; ihre Spuren liegen symmetrisch zu $(S)E$; diesen entsprechen zwei Kegelschnitte mit demselben Axenverhältnisse, resp. mit demselben Asymptotenwinkel. Die zwei in Fig. 3 gezeichneten Ellipsen E, E^* gehören in dieser Weise zusammen. Markiren wir auf $(S)E$ die zwei Punkte X und Y , welche von F um die Länge $(S)E$ entfernt sind, so genügen diese bei jeder durch s gehenden Ebene der Bedingung, dass der Quotient aus ihren Entfernungen von F durch ihre Entfernungen von der zugehörigen Spur = der tg des betreffenden Neigungswinkels α ist, d. h. alle den Ebenen des Büschels entsprechenden Kegelschnitte gehen durch die zwei Punkte X, Y . Ist $(S)E < FE$, so sind die Punkte X, Y imaginär, immerhin ist ihre Verbindungslinie $(S)E$ reell; für $(S)E = FE$ berühren sich die Kegelschnitte in E . Unter den Kegelschnitten des Systems kommen zwei Parabeln P, P^* , zwei gleichseitige Hyperbeln H, H^* (in Fig. 3 ist nur H gezeichnet), sowie ein Kreis K vor, welcher der zur Bildebene parallelen Ebene des Büschels entspricht; der zur Bildebene senkrecht stehenden Ebene des Büschels entspricht XY als Doppelgerade und der nach F gehenden Ebene das Geradenpaar FX, FY , das im Falle $(S)E < FE$ imaginär wird.

Bei jedem der angeführten Specialfälle sehen wir,

dass dem betreffenden Ebenenbüschel ein System von Kegelschnitten durch zwei feste Punkte entspricht. Dadurch wird der Schluss nahe gelegt, dass auch bei allgemeiner Lage der Scheitelkante diess noch der Fall sei. Wir machen die bezügliche Untersuchung in Rücksicht auf die spätere Anwendung lieber im umgekehrten Sinne, wie bei den Specialfällen und stellen uns daher die Aufgabe, die unendlich vielen Ebenen zu finden, welche den durch zwei beliebig gegebene Punkte X, Y gehenden Kegelschnitten entsprechen. Zu diesem Zwecke ziehen wir in dem Dreieck XYF (Fig. 4) aus F die Halbierungslinien des Winkels; diese schneiden aus XY zwei Punkte S_1, S_2 , welche die Distanz XY in dem Verhältnisse $\pm \frac{FX}{FY}$ theilen; daraus folgt, dass S_1XY aufgefasst werden kann als die Orthogonalprojection einer Geraden s_1 , welche die Bildebene in S_1 schneidet und durch die Endpunkte der in X, Y nach derselben Seite auf die Bildebene errichteten Perpendikel von den resp. Längen XF, YF geht. Allen Ebenen, welche durch diese Gerade s_1 gehen, entsprechen Kegelschnitte durch X, Y ; denn bei jeder ist das Verhältniss der Entfernungen der Punkte X und Y von F durch die Entfernungen von der zugehörigen Spur $= \operatorname{tg} \alpha$. Ebenso ist S_2XY die Orthogonalprojection einer zweiten Geraden s_2 , welche die Bildebene in S_2 schneidet und durch die Endpunkte der in X, Y nach verschiedenen Seiten auf die Bildebene errichteten Perpendikel von den resp. Längen XF, YF geht; den durch diese Gerade gehenden Ebenen entsprechen ebenfalls Kegelschnitte durch X, Y . — In dem Büschel von der Scheitelkante s_1 kommen zwei Ebenen vor, denen Parabeln entsprechen; ihre Spuren berühren die um X

resp. Y mit den resp. Radien XF , YF beschriebenen Kreise; den Ebenen, deren Spuren diese Kreise nicht schneiden, entsprechen Ellipsen; je zwei unter ihnen haben das nämliche Axenverhältniss; der Ebene, deren Spur senkrecht auf $S_1 XY$ steht, entspricht die Ellipse von dem kleinsten Werthe der Constanten e oder von dem grössten Axenverhältnisse $\frac{b}{a}$. Allen Ebenen, deren Spuren jene Kreise schneiden, entsprechen Hyperbeln; je zwei unter ihnen haben denselben Asymptotenwinkel; so gibt es namentlich auch zwei gleichseitige Hyperbeln; der projicirenden Ebene der Scheitelkante s_1 entspricht die Spur $S_1 XY$ selbst als Doppelgerade; der Ebene durch F entspricht der Kegelschnitt, der in die zwei Geraden FX , FY degenerirt. — Den Ebenen durch die Gerade s_2 entsprechen lauter Hyperbeln; je zweien unter ihnen kommt dieselbe Constante e zu; der Ebene, deren Spur auf $XY \perp$ steht, entspricht die Hyperbel von dem kleinsten Werthe von e ; ist dieser kleiner als $\sqrt{2}$, so kommen auch in diesem System zwei gleichseitige Hyperbeln vor, im andern Falle nicht.

Wir können nun auch die umgekehrte Frage behandeln: Gegeben ein Ebenenbüschel von der Scheitelkante s (Fig. 5; s ist gegeben durch ihre Orthogonalprojection s' , den Durchstosspunkt S mit der Bildebene und durch die Ordinate $P(P)$ eines beliebigen Punktes P auf ihr); man bestimme die zwei Fixpunkte X , Y , durch welche alle den Ebenen des Büschels entsprechenden Kegelschnitte gehen. Ist (s) die Umklappung von s mittelst ihrer projicirenden Ebene in die Bildebene, so liegen nach dem Vorigen die Punkte X , Y auf s' und zwar der Art, dass $XF = X(X)$, $YF = Y(Y)$. Um

diesen Bedingungen gemäss X und Y zu finden, schlagen wir um P als Centrum den Kreis mit dem Radius $P(P)$; dieser wird von der Geraden SF im Allgemeinen in zwei Punkten F_1, F_2 geschnitten; ziehen wir jetzt zu den Radien F_1P, F_2P durch F die Parallelen, so schneiden diese aus s' die gesuchten Punkte. — Wenn SF jenen Kreis nicht schneidet, so sind die Punkte X, Y imaginär, d. h. den durch s gehenden Ebenen entsprechen in diesem Falle Kegelschnitte mit zwei imaginären gemeinsamen Schnittpunkten, ihre Verbindungsgerade s' jedoch bleibt auch da reell; dieser Fall tritt ein, wenn $\text{arc. sin.}(FS, s') > \text{arc. tg. } \beta$ ist, wobei β der Neigungswinkel der Geraden s gegen die Bildebene bedeutet. Sind diese zwei Winkel einander gleich, so berührt SF jenen Kreis und infolge dessen fallen X und Y in einen Punkt zusammen, nämlich in den Schnittpunkt von s' mit dem in F auf FS errichteten Lothe; in diesem Falle berühren die Kegelschnitte die Gerade s , in diesem Punkte. Hiermit ist uns offenbar die Lösung der Aufgabe angeboten: Alle Kegelschnitte zu construiren, welche eine gegebene Gerade s' in einem gegebenen Punkte X berühren (Fig. 6): In F haben wir auf die Gerade FX das Loth zu errichten, welches s' in S schneidet; denken wir uns jetzt in X das Loth auf die Bildebene errichtet und auf ihm von X an die Länge XF aufgetragen, so bestimmt der so erhaltene Punkt mit S eine Gerade s als Scheitelkante eines Büschels von Ebenen, denen die gesuchten Kegelschnitte entsprechen. Es kommen in diesem Systeme stets zwei Parabeln vor, von denen die eine in die Doppelgerade FX degenerirt ist; ferner unendlich viele Hyperbeln mit allen möglichen Asymptotenwinkeln, je zwei mit dem nämlichen, somit auch zwei gleichseitige H, H^* ; dann die als dege-

nerirte Hyperbel zu betrachtende Doppelgerade SX ; schliesslich unendlich viele Ellipsen, jedoch nicht mit allen möglichen Axenverhältnissen, denn der Ebene, deren Spur auf SX senkrecht steht, entspricht die Ellipse, für welche $\frac{b}{a}$ ein Maximum ist. Allerdings tritt das Ebenenbüschel, dessen Axe das Loth in X auf die Bildebene ist, noch hinzu, dem ebenfalls ein System von Kegelschnitten entspricht, welche s' in X berühren; dieses besteht jedoch aus dem Büschel von Doppelgeraden (degenerirte Hyperbeln) vom Scheitel X .

Bevor wir in unseren Entwicklungen weiter gehen, wollen wir den bis jetzt behandelten Stoff zur Lösung einiger Aufgaben benutzen.

1. Aufgabe. Gegeben ein Kegelschnitt durch l und α ; man bestimme seine Schnittpunkte mit einer Geraden.

Wir betrachten (Fig. 7) die gegebene Gerade g' als die Projection einer Geraden g , die sich auf der den Kegelschnitt repräsentirenden Ebene befindet. In diesem Sinne aufgefasst ist g bestimmt durch ihre Spur S auf l und durch die Ordinate eines beliebigen ihrer Punkte, z. B. des Punktes P ; diese letztere ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $EP(P)$ die gegenüberliegende Kathete $P(P)$ des Winkels α . Die gestellte Aufgabe ist damit auf die bereits in Fig. 5 behandelte reducirt, die zwei gemeinschaftlichen Schnittpunkte X, Y aller der Kegelschnitte zu finden, welche den Ebenen eines Büschels entsprechen; denn da die gegebene Ebene durch g geht, so sind jene gemeinschaftlichen Schnittpunkte auch die Schnittpunkte des der Ebene entsprechenden Kegelschnittes mit g' .

2. Aufgabe. Gegeben ein Kegelschnitt durch l und α ;

man bestimme die Tangenten an ihn aus einem gegebenen Punkte P .

Der in Fig. 7 mit dem Radius $P(P)$ um P beschriebene Kreis darf bezüglich unserer Aufgabe von der Geraden SF nicht geschnitten, sondern muss berührt werden; wir ziehen daher (Fig. 8) von F aus an diesen Kreis die zwei Tangenten, welche auf l die Punkte S_1, S_2 liefern, durch welche die gesuchten Tangenten t_1, t_2 gehen; ihre Berührungspunkte T_1, T_2 liegen auf den Lothen durch F zu FS_1 , resp. FS_2 .

3. Aufgabe. Gegeben zwei Kegelschnitte durch ihre correspondirenden Ebenen $(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2)$; man bestimme ihre gemeinschaftlichen Punkte X, Y, Z, U .

Bei der Lösung dieses Problems haben wir uns an die früher erwähnte Bemerkung zu erinnern, dass ein Kegelschnitt stets zwei symmetrisch zur Bildebene gelegene Ebenen zu Correspondentinnen hat; wir haben daher im vorliegenden Falle 4 Ebenen in Betracht zu ziehen, nämlich (Fig. 9): $(l_1, \alpha_1), (l_1, -\alpha_1); (l_2, \alpha_2), (l_2, -\alpha_2)$. Diese schneiden sich ausser in den zwei Spuren l_1, l_2 noch in 4 andern Geraden, die z. B. durch je zwei Niveaulinien n_1, n_2 in derselben Höhe über der Bildebene erhalten werden können. Die symmetrische Lage der vier Ebenen zu zweien gegenüber der Bildebene zieht auch eine entsprechende symmetrische Lage ihrer Schnittlinien nach sich, so dass sie sich in zwei Paare ordnen, der Art, dass die zwei eines Paares zur Bildebene symmetrisch liegen und daher dieselbe Orthogonalprojection auf diese haben: $(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2)$ und $(l_1, -\alpha_1), (l_2, -\alpha_2)$ liefern das eine Paar von der Orthogonalprojection s_{12} ; $(l_1, \alpha_1), (l_2, -\alpha_2)$ und $(l_1, -\alpha_1), (l_2, \alpha_2)$ das andere Paar von der Orthogonalprojection $-s_{12}$. Auf $s_{12}, -s_{12}$ liegen

die vier gesuchten Schnittpunkte je paarweise conjugirt und können daher als Schnittpunkte dieser Geraden mit einem der zwei gegebenen Kegelschnitte nach Aufgabe 1 gefunden werden. — Natürlich kann das eine oder das andere Paar der Schnittpunkte imaginär ausfallen, oder auch beide Paare zugleich; unter allen Umständen sind ihre Verbindungsgeraden s_{12} , $-s_{12}$ reell und bestimmt.

Fällen wir z. B. von dem Schnittpunkte X die Lothe XX_1 , XX_2 resp. auf die Spuren l_1 , l_2 und bezeichnen die Winkel, welche die Sehne SXY mit l_1 und l_2 einschliesst, mit φ_1 und φ_2 , so ergibt sich:

$$\sin \varphi_1 = \frac{XX_1}{SX}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{XX_2}{SX}, \quad \text{hieraus} \quad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{XX_1}{XX_2};$$

da aber $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{XF}{XX_1}$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{XF}{XX_2}$, oder $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{XX_2}{XX_1}$

$$\text{so folgt} \quad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = 1 : \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \text{ d. h.:}$$

Die Sehne SXY theilt den Winkel der zwei Spuren l_1 , l_2 in dem umgekehrten Verhältnisse der Winkel α_1 , α_2 ; dasselbe ist der Fall mit der anderen Sehne SZU ; hieraus folgt: Der Winkel der zwei Spuren wird durch die Sehnen SXY , SZU harmonisch getheilt. — Noch einfacher als so folgt diese Eigenschaft aus den Schnittpunkten N , $-N$ der bei der Construction von s_{12} , $-s_{12}$ verwendeten Niveaulinien, denn diese liegen symmetrisch zum Schnittpunkte L_2 von l_2 mit n_1 .

4. Aufgabe. Man construïre die Kegelschnitte durch drei gegebene Punkte X , Y , Z .

Alle Kegelschnitte, welche durch die zwei Punkte Y , Z gehen (Fig. 10), haben die Ebenen zweier Büschel, deren Scheitellanten $S_{23} YZ$, $-S_{23} YZ$ nach Fig. 4 ermittelt werden können, zu ihren Correspondentinnen; ebenso ent-

sprechen den Ebenen der Büschel $S_{31} ZX$, $-S_{31} ZX$ die Kegelschnitte durch Z, X und den Büscheln $S_{12} XY$, $-S_{12} XY$ die Ebenen durch X, Y . — Diese sechs Kanten liegen vier Mal zu dreien je auf einer Ebene und zwar:

$$\begin{array}{l} S_{23} YZ, S_{31} ZX, S_{12} XY \text{ auf } E \text{ von der Spur } s \equiv S_{23} S_{31} S_{12}, \\ S_{23} YZ, -S_{31} ZX, -S_{12} XY \text{ „ } E_1 \text{ „ „ „ } s_1 \equiv S_{23} -S_{31} -S_{12}, \\ -S_{23} YZ, S_{31} ZX, -S_{12} XY \text{ „ } E_2 \text{ „ „ „ } s_2 \equiv -S_{23} S_{31} -S_{12}, \\ -S_{23} YZ, -S_{31} ZX, S_{12} XY \text{ „ } E_3 \text{ „ „ „ } s_3 \equiv -S_{23} -S_{31} S_{12}. \end{array}$$

Von jeder dieser Ebenen kann der zugehörige Neigungswinkel α mittelst eines der drei Punkte X, Y, Z leicht gefunden werden; die vier Kegelschnitte, welche diesen vier Ebenen entsprechen, gehen durch X, Y, Z . — Den drei Geraden s_1, s_2, s_3 entsprechen infolge ihrer Lage gegenüber X, Y, Z nothwendig Hyperbeln; s kann möglicherweise eine Ellipse correspondiren, wie diess in unserer Fig. der Fall ist. — Je zwei der vier Kegelschnitte haben ausser X, Y, Z noch einen vierten Punkt gemeinsam, der nach Aufgabe 3 mit einem von diesen auch auf einer durch den Schnittpunkt der Spuren der zwei entsprechenden Ebenen gehenden Geraden liegt. Sehnen der letzteren Art — das sei hier noch bemerkt — gibt es 6, welche 4 Mal zu dreien durch je einen Punkt gehen.

5. Aufgabe. *Man construire die Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte gehen und in dem einen von ihnen eine gegebene Gerade zur Tangente haben.*

Offenbar bildet diese Aufgabe einen Specialfall der vorhergehenden und wird daher auch nach denselben Principien wie diese gelöst. Der Fig. 11 gemäss entsprechen jedoch nur den Ebenen E und E_1 wirkliche Kegelschnitte, während E_2 und E_3 zusammenfallen in die Normalebene zur Bildebene durch XY und diese ihnen daher als Doppel-

gerade entspricht. s_1 hat stets eine Hyperbel zur Correspondentin, während s eine Ellipse oder Hyperbel entsprechen kann. Ausser den gegebenen Elementen haben die zwei Kegelschnitte noch einen Punkt gemeinsam, der mit X auf einer Geraden nach dem Schnittpunkte von s , s_1 liegt.

Das System von drei beliebigen Kegelschnitten.

Sind K_1, K_2, K_3 (Fig. 12) drei beliebige Kegelschnitte, durch die Ebenen $(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2), (l_3, \alpha_3)$ repräsentirt, so können wir nach Aufgabe 3, pag. 13, die Schnittpunkte je zweier von ihnen direct ermitteln. Die folgende Zusammenstellung gibt die sechs Sehnen, auf denen jene paarweis liegen, mit Angabe ihrer Entstehungsweise:

s_{23}	als Orthog. Projection der Schnittlinie der Ebenen	$(l_2, \alpha_2), (l_3, \alpha_3)$,	oder	$(l_2, -\alpha_2), (l_3, -\alpha_3)$
$-s_{23}$	" " " " " " "	$(l_2, \alpha_2), (l_3, -\alpha_3)$,	"	$(l_2, -\alpha_2), (l_3, \alpha_3)$
s_{31}	" " " " " " "	$(l_3, \alpha_3), (l_1, \alpha_1)$,	"	$(l_3, -\alpha_3), (l_1, -\alpha_1)$
$-s_{31}$	" " " " " " "	$(l_3, \alpha_3), (l_1, -\alpha_1)$,	"	$(l_3, -\alpha_3), (l_1, \alpha_1)$
s_{12}	" " " " " " "	$(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2)$,	"	$(l_1, -\alpha_1), (l_2, -\alpha_2)$
$-s_{12}$	" " " " " " "	$(l_1, \alpha_1), (l_2, -\alpha_2)$,	"	$(l_1, -\alpha_1), (l_2, \alpha_2)$.

Die sechs Ebenen $(l_i, \pm \alpha_i)$ gehen achtmal zu dreien durch einen Punkt, und zwar liegen je zwei von diesen symmetrisch zur Bildebene; daraus folgt, dass die sechs Sehnen $\pm s_{ik}$ viermal zu dreien durch einen Punkt gehen und zwar:

s_{23}, s_{31}, s_{12}	durch S_1 als Orth. Proj. des Schnittp. der Ebenen	$(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2), (l_3, \alpha_3)$
$s_{23}, -s_{31}, -s_{12}$	" S_1 , " " " " " " "	$(l_1, -\alpha_1), (l_2, \alpha_2), (l_3, \alpha_3)$
$-s_{23}, s_{31}, -s_{12}$	" S_2 , " " " " " " "	$(l_1, \alpha_1), (l_2, -\alpha_2), (l_3, \alpha_3)$
$-s_{23}, -s_{31}, s_{12}$	" S_3 , " " " " " " "	$(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2), (l_3, -\alpha_3)$.

Das Viereck der S hat die sechs Sehnen s zu seinen Seiten und das Dreieck der l zum Diagonaldreieck (z. B. in Fig. 10 treten 4 solche Gruppen von S auf der Art, dass bei jeder Gruppe 3 der S mit X, Y, Z zusammenfallen).

Andererseits liegen die Schnittlinien der sechs Ebenen $(l_1, \pm \alpha_1)$, $(l_2, \pm \alpha_2)$, $(l_3, \pm \alpha_3)$ mit bestimmt zugeordneten, durch die $\pm s_{ik}$ gehenden Normalebene zur Bildebene zu dreien je in einer Ebene; bezeichnen wir die Normalebene durch $\pm s_{ik}$ mit $\pm N_{ik}$, so enthält die folgende Zusammenstellung die diesbezüglichen Relationen:

Die Schnittl. (l_1, α_1) , $-N_{23}$; (l_2, α_2) , $-N_{31}$; (l_3, α_3) , $-N_{12}$ lieg. in ein. Ebene v. d. Spur -s
 „ „ $(l_1, -\alpha_1)$, $-N_{23}$; (l_2, α_2) , N_{31} ; (l_3, α_3) , N_{12} „ „ „ „ „ „ „ -s₁
 „ „ (l_1, α_1) , N_{23} ; $(l_2, -\alpha_2)$, $-N_{31}$; (l_3, α_3) , N_{12} „ „ „ „ „ „ „ -s₂
 „ „ (l_1, α_1) , N_{23} ; (l_2, α_2) , N_{31} ; $(l_3, -\alpha_3)$, $-N_{12}$ „ „ „ „ „ „ „ -s₃.

Hieraus folgt, dass die Schnittpunkte der l mit bestimmt zugeordneten $\pm s_{ik}$ viermal zu dreien auf Geraden liegen, und zwar:

Die Schnittpunkte von $l_1, -s_{23}$; $l_2, -s_{31}$; $l_3, -s_{12}$ auf -s
 „ „ „ $l_1, -s_{23}$; l_2, s_{31} ; l_3, s_{12} „ -s₁
 „ „ „ l_1, s_{23} ; $l_2, -s_{31}$; l_3, s_{12} „ -s₂
 „ „ „ l_1, s_{23} ; l_2, s_{31} ; $l_3, -s_{12}$ „ -s₃.

Das Vierseit dieser -s hat die sechs Schnittpunkte $(l_i, \pm s_{ik})$ zu seinen Ecken und das Dreiseit der l zum Diagonaldreiseit.

Aus dem Vorigen lässt sich der wichtige Specialfall ableiten, bei welchem die drei Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen. Wenn dieses stattfinden soll, so müssen die drei Ebenen, welche die Kegelschnitte repräsentiren, durch einen Punkt gehen, dessen Entfernung von der Tafel ebenso gross ist wie die Entfernung seiner Orthogonalprojection vom Brennpunkte F , oder mit andern Worten: Seine Verbindungsgerade mit F muss gegen die Bildebene einen Neigungswinkel von 45° bilden. Die Fig. 13 enthält diese Specialität bezüglich des Punktes S_2 ; derselbe ist die Orthogonal-Projection des Schnittpunktes der Ebenen (l_1, α_1) , $(l_2, -\alpha_2)$, (l_3, α_3) .

Durch die letzten Betrachtungen sind wir zur Ein-

sicht gelangt über das Kegelschnittsystem, welches einem Ebenenbündel (die Gesamtheit der zweifach unendlich vielen Ebenen, die durch einen beliebigen Punkt — den Scheitel des Bündels — des Raumes gehen) entspricht. Ist S die Orthogonal-Projection des Scheitels des Ebenenbündels, so sind die zweifach unendlich vielen Kegelschnitte, welche den Ebenen des Bündels correspondiren, durch die Eigenschaft verbunden, dass die eine der Schnittsehnen von je zweien unter ihnen durch S geht; die andere Schnittsehne schneidet sich mit dieser im Schnittpunkte der zwei bezüglichen Spuren l und sie beide theilen den Winkel der letzteren harmonisch. — Bildet die Verbindungsgerade des Brennpunktes F mit dem Scheitel des Bündels gegen der Bildebene einen Neigungswinkel, der $< 45^\circ$, so liegt S ausserhalb eines jeden wirklichen, nicht degenerirten Kegelschnittes des Systems; d. h. es gehen von ihm an jeden solchen Kegelschnitt zwei reelle, verschiedene Tangenten; ist dieser Winkel $> 45^\circ$, so liegt S im Innern eines jeden Kegelschnittes, und wenn er $= 45^\circ$, so gehen alle Kegelschnitte durch S . — Denken wir uns die Ebenen des Bündels in die Tangentialebenen von geraden Kreiskegeln angeordnet, welche den Scheitel zur gemeinschaftlichen Spitze und das Loth von diesem zur Bildebene zur Axe haben, so sieht man, dass in dem Kegelschnittsystem im Allgemeinen unendlich viele Kegelschnitte von derselben Constanten e oder demselben Axenverhältnisse, resp. demselben Asymptotenwinkel vorkommen, somit unendlich viele Parabeln, unendlich viele gleichseitige Hyperbeln, unendlich viele zu Doppelgeraden degenerirte Kegelschnitte (entsprechen dem Bündel der zur Bildebene senkrecht stehenden Ebenen), unendlich viele in Linienpaare degenerirte Kegelschnitte (entsprechen

dem Ebenenbüschel, dessen Scheitellkante nach F geht), endlich ein Kreis.

Sollen umgekehrt die Kegelschnitte gezeichnet werden, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, so errichten wir in diesem das Loth auf die Bildebene und tragen auf ihm nach der einen oder andern Richtung die Distanz PF auf; der Endpunkt des Lothes ist alsdann der Scheitel des Bündels, dessen Ebenen die gewünschten Kegelschnitte entsprechen.

Die schon voraussichtlich interessanten Betrachtungen über specielle Ebenenbündel (specielle Lagen des Scheitels) mit ihren entsprechenden Kegelschnittssystemen finden hier keinen Raum.

Berührung von Kegelschnitten unter sich und mit geraden Linien.

Es sei K (Fig. 14) ein fest gegebener Kegelschnitt, durch die Ebene (l, α) repräsentirt. Ist t eine beliebige seiner Tangenten und T deren Berührungspunkt, so haben nach Fig. 6, pag. 11, alle Kegelschnitte, welche t in T und daher auch K in T berühren, zu ihren räumlichen Vertreterinnen die Ebenen eines Büschels, welches die auf der Ebene (l, α) liegende und sich in t projicirende Gerade t_r zur Scheitellkante hat. Hieraus folgern wir: Alle Kegelschnitte, welche den gegebenen K berühren, sind durch die zweifach unendlich vielen Ebenen repräsentirt, welche durch die Tangenten des Kegelschnittes K_r gehen, der in der Ebene (l, α) liegt und von welchem K die Orthogonal-Projection ist. — Betrachten wir den speciellen Fall hievon, wo der feste Kegelschnitt K eine Gerade g (Fig. 15) und daher die ihn repräsen-

tirende Ebene die Normalebene durch g zur Bildebene ist. Alle Kegelschnitte, welche g in P berühren, werden durch die Ebenen eines Büschels repräsentirt, das g_r zur Scheiteltante hat (g_r hat ihre Spur mit der Bildebene in S und geht durch den Punkt P_r , der senkrecht über P liegt in einer Entfernung $= PF$). Lassen wir P die Gerade g durchlaufen, so sieht man, dass P_r eine gleichseitige Hyperbel beschreibt und g_r dieselbe als Tangente umhüllt; in jeder Lage ist P_r der Berührungspunkt der entsprechenden Scheiteltante g_r , d. h.: Alle Kegelschnitte, welche die Gerade g berühren, werden durch die zweifach unendlich vielen Tangentialebenen einer gleichseitigen Hyperbel repräsentirt, welche in der Normalebene durch g zur Tafel liegt, g zur imaginären und das Loth in E auf g zur reellen Axe hat; die Länge der letzteren ist $= 2 EF$.

Als angewandte Aufgaben zu Diesem können die Kegelschnitte construiert werden, welche durch zwei Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt oder eine gegebene Gerade berühren; oder die Kegelschnitte, welche eine Gerade in einem bestimmten Punkte und einen gegebenen Kegelschnitt oder eine andere gegebene Gerade berühren; die Lösung dieser Probleme hängt offenbar bloss ab von der Ausführung der darstellend-geometrischen Aufgabe, die Ebenen zu bestimmen, welche durch eine Gerade gehen und einen Kegelschnitt berühren.

Es gibt einfach unendlich viele Kegelschnitte, welche durch einen Punkt P gehen und einen gegebenen Kegelschnitt K oder eine gegebene Gerade berühren; die sie repräsentirenden Ebenen sind die Tangentialebenen des Kegels, der den Punkt P_r zur Spitze und den Kegelschnitt

K_r zur Basis hat. — Die zwei Kreise vom Mittelpunkte F , welche einen Kegelschnitt K berühren, entsprechen den durch die Tangenten h_{1r}, h_{2r} (Fig. 14) gehenden, zur Bildebene parallelen Ebenen. Den zur Tafel normalen Tangentialebenen von K_r entsprechen ihre Spuren, die Tangenten von K , als in Doppelgerade degenerierte Hyperbeln, welche K berühren; endlich entsprechen den Tangentialebenen des Kegels von der Spitze F über der Basis K_r , die alle zur Bildebene unter 45° geneigt sind und daher einen geraden Kreiskegel bilden, die Strahlen aus F als in Doppelgerade degenerierte Parabeln, die somit angesehen werden können als Kegelschnitte, welche K berühren.

Im Weiteren wollen wir nach den Kegelschnitten fragen, welche zwei gegebene Gerade g_1, g_2 berühren. Den Kegelschnitten, welche die Gerade g_1 berühren (Fig. 16), entsprechen die Tangentialebenen der gleichseitigen Hyperbel K_{1r} ; gleicherweise entsprechen den Kegelschnitten, welche g_2 berühren, die Tangentialebenen der gleichseitigen Hyperbel K_{2r} ; soll daher ein Kegelschnitt sowohl g_1 als auch g_2 tangieren, so muss die ihm entsprechende Ebene gemeinschaftliche Tangentialebene der zwei Hyperbeln sein; nun besitzen diese letzteren zwei gemeinschaftliche Punkte $X_r, -X_r$, die lothrecht über dem Schnittpunkte X der zwei Geraden g_1, g_2 symmetrisch zur Bildebene im Abstände $= XF$ sich befinden; die gemeinschaftliche Developpable (die Enveloppe der gemeinschaftlichen Tangentialebenen) der zwei Hyperbeln besteht daher aus zwei Kegeln zweiten Grades. Construire wir in X_r und $-X_r$ die Tangenten $x_{1r}, -x_{1r}$; $x_{2r}, -x_{2r}$, resp. an die Hyperbeln K_{1r}, K_{2r} , so bestimmen x_{1r}, x_{2r} und $-x_{1r}, -x_{2r}$ die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der Hyperbeln in X_r und $-X_r$; dieselben liegen symmetrisch zur Bildebene und schneiden

sich auf der durch F gehenden und auf FX senkrecht stehenden Geraden $S_1 S_2$, wie dieses nothwendig aus der Construction hervorgeht; auf dieser liegen die Spitzen jener zwei Kegel zweiten Grades. Die Tangenten aus X an die zwei Hyperbeln berühren dieselben resp. in den über S_1 und S_2 lothrecht gelegenen Punkten $S_{1r}, -S_{1r}; S_{2r}, -S_{2r}$ und bestimmen paarweise vier gemeinschaftliche Tangentialebenen der Hyperbeln; zwei von ihnen, nämlich $(t_{1r}, -t_{2r}), (-t_{1r}, t_{2r})$ liegen symmetrisch zur Bildebene und schneiden sich in der Geraden XF ; ebenso haben die beiden anderen $(t_{1r}, t_{2r}), (-t_{1r}, -t_{2r})$ symmetrische Lage gegen die Bildebene und schneiden sich in der Geraden XS , die mit XF den Winkel (g_1, g_2) harmonisch theilt (folgt unmittelbar aus der Construction). Die Punkte F und S sind somit die Spitzen jener Kegel zweiten Grades und damit sind diese selbst bestimmt, denn entweder K_{1r} oder K_{2r} kann als ihre gemeinschaftliche Leitcurve betrachtet werden. Den Tangentialebenen des Kegels von der Spitze F , die alle mit der Bildebene Winkel von 45° einschliessen, entsprechen keine eigentlichen Kegelschnitte, sondern die Strahlen aus F als in Doppelgerade degenerirte Parabeln, die als solche die zwei gegebenen Geraden g_1, g_2 berühren; den Tangentialebenen des Kegels von der Spitze S entsprechen dagegen wirkliche g_1, g_2 berührende Kegelschnitte. — Als Anwendung hievon sind in Fig. 17 die zwei Kegelschnitte $(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2)$ ermittelt, welche zwei Gerade g_1, g_2 berühren und ausserdem durch einen gegebenen Punkt P gehen. Die Ebenen $(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2)$ sind die durch den Punkt P_r gehenden Tangentialebenen des Kegels (S, K_r) ; um diese zu ermitteln, ziehen wir die Verbindungsgerade $P_r S$ und markiren ihren Schnittpunkt D_r mit der durch g_1 gehenden Normalebene zur Tafel;

von D_r gehen an die gleichseitige Hyperbel K_{1r} zwei Tangenten, die mit $P_r S$ die zwei gewünschten Ebenen bestimmen; das Uebrige folgt aus Früherem. — Man kommt bei der Lösung dieser Aufgabe in den Fall, von einem Punkte D_r aus an die gleichseitige Hyperbel K_{1r} die Tangenten zu construiren. Zu diesem Zwecke betrachten wir D_r (Fig. 18) als die Umklappung eines in der durch g_1 gehenden Normalebene zur Tafel gelegenen Punktes wie in Fig. 17; die Weiterconstruction verläuft nun ganz analog mit der in Aufgabe 2, pag. 12, angegebenen: Wir schlagen um D (Projection von D_r) als Centrum mit dem Radius $D D_r$ den Kreis, ziehen von F an denselben die zwei Tangenten t_1, t_2 , die aus g_1 die Punkte S_1, S_2 schneiden, durch welche die gesuchten Tangenten gehen; denn steht $F T_1 \perp$ auf $F S_1$ und trifft das in T_1 auf g_1 errichtete Loth die Gerade $S_1 D_r$ in (T_{1r}) , so folgt:

$D_r D : (T_{1r}) T_1 = D D_1 : T_1 F = S_1 D : S_1 T_1$; da nun $D_r D = D D_1$, so folgt $(T_{1r}) T_1 = T_1 F$, also liegt (T_{1r}) auf der Hyperbel (K_{1r}) womit bewiesen, dass $S_1 D_r$ sie in (T_{1r}) berührt etc.

Ist der Kegelschnitt zu bestimmen, der drei gegebene Gerade g_1, g_2, g_3 berührt (Fig. 19), so ermitteln wir die Spitzen S_{23}, S_{31} der Kegel, deren Tangentialebenen Kegelschnitte entsprechen, die gleichzeitig g_2, g_3 , resp. g_3, g_1 berühren; den zwei gemeinschaftlichen Tangentialebenen dieser Kegel, die zur Bildebene symmetrisch liegen und deren gemeinschaftliche Spur l die Gerade S_{23}, S_{31} ist, entspricht alsdann der Kegelschnitt, der alle drei Geraden berührt; die Spitze S_{12} des dritten Kegels, dessen Tangentialebenen Kegelschnitte entsprechen, welche g_1, g_2 berühren, liegt daher auch auf der Geraden S_{23}, S_{31} ; l schneidet g_1, g_2, g_3 resp. in Punkten S_1, S_2, S_3 ;

verbinden wir diese mit F und errichten auf die Verbindungslinien in F die Lothe, so schneiden diese aus g_1, g_2, g_3 resp. ihre Berührungspunkte T_1, T_2, T_3 mit dem Kegelschnitte; natürlich ergibt sich jetzt auch leicht der zugehörige Winkel α .

Als ein interessantes Beispiel monoconfocaler Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen Tangenten führe ich die Systeme biconfocaler (kürzer confocaler) Kegelschnitte an. Der Kegelschnitt K_1 (Fig. 20), durch die Ebene (l_1, α_1) repräsentirt, hat ausser dem a priori gegebenen Brennpunkte F noch den zweiten Brennpunkt F^* ; die auf der grossen Axe gelegenen Scheitel von K_1 liegen nach der in Fig. 1 angegebenen Construction lothrecht unter den Schnittpunkten A_1, B_1 der zwei 45° Linien a, b aus F mit der unter dem Winkel α_1 zur grossen Axe geneigten Geraden c_1 . — Soll nun einer zweiten Ebene (l_2, α_2) ein Kegelschnitt K_2 entsprechen, der mit K_1 den Punkt F^* auch zu seinem zweiten Brennpunkte besitzt, so müssen die Schnittpunkte A_2, B_2 der 45° Linien mit der zugehörigen Geraden c_2 resp. von A_1 und A_2 die nämliche Entfernung haben, denn alsdann haben auch die auf der grossen Axe gelegenen Scheitel von K_2 gleiche Entfernungen von den entsprechenden Scheiteln von K_1 und die zwei Kegelschnitte sind confocal. Den confocalen Kegelschnitten $K_1, K_2, K_3 \dots$ entsprechen daher auf a und b zwei gleiche Punktreihen $A_1, A_2, A_3 \dots$; $B_1, B_2, B_3 \dots$ resp., welche durch Verbindung entsprechender Punkte eine Parabel erzeugen; diese hat F^* zum Brennpunkte und das durch F gehende Loth zu FF^* zur Directrix. Denken wir uns die Ebene der Parabel um FF^* als Axe gedreht, bis sie auf der Bildebene senkrecht steht, so entsprechen den Tangentialebenen des senkrechten para-

bolischen Cylinders, der diese neue Lage der Parabel zur Basis hat, die Kegelschnitte des confocalen Systems.

Als natürliches Schlussglied unserer Untersuchungen soll noch die Frage nach den Kegelschnitten, welche zwei gegebene K_1, K_2 (Fig. 21) berühren, erörtert werden. Nach pag. 19 muss die Ebene, deren entsprechender Kegelschnitt K_1 berührt, den im Raume gelegenen Kegelschnitt K_{1r} tangiren. Die gestellte Frage ist somit gleichwerthig mit derjenigen nach den gemeinschaftlichen Tangentialebenen der zwei Kegelschnitte K_{1r} und K_{2r} . Diese letzteren haben zwei gemeinschaftliche Punkte X_r, Y_r , die nach Aufgabe 3, pag. 13 direct ermittelt werden können; folglich besteht die gemeinsame Developpable von K_{1r} und K_{2r} aus zwei Kegeln 2. Grades, deren Spitzen auf die analoge Weise wie in Fig. 16 construirt werden können. Die Tangenten x_{1r}, x_{2r} in X_r und y_{1r}, y_{2r} in Y_r resp. an K_{1r} und K_{2r} bestimmen die gemeinschaftlichen Tangentialebenen an diese in X_r und Y_r ; auf der Schnittlinie s_r derselben liegen die gesuchten Kegelspitzen. s_r geht durch S_{1r} (Schnittpunkt von x_{1r}, y_{1r}), S_{2r} (Schnittpunkt von x_{2r}, y_{2r}) und ausserdem durch den Brennpunkt F ; ihre Orthogonalprojection s geht durch S_1, S_2, F und steht ausserdem senkrecht zu FS . — Von S aus gehen an K_{1r} und K_{2r} je zwei Tangenten t_{1r}, t_{1r}^* resp. t_{2r}, t_{2r}^* ; die Orthogonalprojectionen ihrer Berührungspunkte T_{1r}, T_{1r}^* ; T_{2r}, T_{2r}^* liegen in den Schnittpunkten von s mit K_1 und K_2 . — Diese vier Tangenten liefern vier gemeinschaftliche Tangentialebenen an K_{1r} und K_{2r} , welche paarweise aus s_r die Kegelspitzen schneiden. Es gehen nämlich die Ebenen $(t_{1r}, t_{2r}^*), (t_{1r}^*, t_{2r})$ durch die Gerade SF und liefern daher den Brennpunkt F als die eine Kegelspitze; dagegen schneiden sich $(t_{1r}, t_{2r}),$

(t_{1r}^*, t_{2r}^*) in einer andern im Raume gelegenen Geraden SM_r und geben die zweite Kegelspitze M_r ; natürlich werden diese räumlichen Constructionen durch das Mittel der Umklappung der projicirenden Ebene durch s_r ausgeführt. — Die Tangentialebenen des Kegels, dessen Spitze mit F zusammenfällt, sind sämmtlich unter 45° zur Bildebene geneigt; die ihnen entsprechenden Kegelschnitte bestehen daher aus den Strahlen durch F , zu betrachten als in Doppelgerade degenerirte Parabeln, die als solche K_1 und K_2 berühren. Den Tangentialebenen des zweiten Kegels von der Spitze M_r entsprechen wirkliche, K_1 und K_2 berührende Kegelschnitte. Als Mittel zur Construction will ich noch erwähnen, dass S_{1r}, S_{2r}, F, M_r und somit auch S_1, S_2, F, M (M ist die Orthogonalprojection von M_r) eine harmonische Gruppe bilden; ebenso sind T_1, T_2, F, M und T_1^*, T_2^*, F, M harmonische Gruppen. Berührt eine Ebene den Kegel von der Spitze M_r längs der Erzeugenden e_r , die K_{1r} und K_{2r} resp. in E_{1r}, E_{2r} trifft, so berührt der entsprechende Kegelschnitt K_1 und K_2 resp. in E_1 und E_2 (E_1, E_2 sind die Orthogonalprojectionen von E_{1r}, E_{2r}).

Im Allgemeinen besitzt der Kegel von der Spitze M_r zwei Tangentialebenen, die auf der Bildebene senkrecht stehen; die Spuren derselben gehen durch M und sind die gemeinschaftlichen Tangenten der zwei gegebenen Kegelschnitte K_1, K_2 . (In Fig. 21 sind diese Tangenten imaginär.) Hierdurch ist das Verfahren angezeigt, an zwei gegebene monoconfocale Kegelschnitte die gemeinsamen Tangenten zu construiren: Man ermittelt nach der vorhin angegebenen Methode den Punkt M und zieht nach Aufgabe 2, pag. 13 von ihm aus an einen der Kegelschnitte die Tangenten, diese berühren alsdann von selbst auch den andern.

Setzen wir voraus, K_1 sei wie vorhin durch die Ebene (l_1, α_1) repräsentirt, K_2 dagegen durch die Ebene $(l_2, -\alpha_2)$, so lässt die analoge Construction zur vorigen einen zweiten Punkt $-M_r$ als Spitze eines Kegels bestimmen, dessen Tangentialebenen Kegelschnitte entsprechen, welche K_1 und K_2 berühren und zwar befindet sich $-M_r$ auf dem nämlichen projicirenden Strahle zur Bildebene wie M_r u. s. w. Es hielte natürlich nicht schwer, die Spuren der zwei Kegel mit der Bildebene zu finden; dieses sind Kegelschnitte, welche die zwei gemeinschaftlichen Tangenten aus M an K_1, K_2 ebenfalls zu gemeinschaftlichen Tangenten besitzen; während also die Leitlinien derjenigen Kegelschnitte, welche zwei gegebene Gerade berühren, ein Büschel bilden (siehe pag. 21), umhüllen die Leitlinien, deren zugehörige Kegelschnitte zwei fest gegebene Kegelschnitte berühren, zwei Curven zweiten Grades.

Als directe Anwendung des zuletzt Entwickelten haben wir in Fig. 22 noch die Kegelschnitte ermittelt, welche drei beliebig gegebene K_1, K_2, K_3 oder $(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2), (l_3, \alpha_3)$, gleichzeitig berühren. (Apollonisches Problem bez. monoconfocaler Kegelschnitte.) $M_{3r}, -M_{3r}; M_{2r}, -M_{2r}$ sind die Spitzen der Kegel, deren Tangentialebenen Kegelschnitte correspondiren, welche K_1, K_2 resp. K_1, K_3 gleichzeitig berühren; diese lassen im Allgemeinen acht gemeinschaftliche Tangentialebenen zu, deren entsprechende Kegelschnitte K_1, K_2 und K_3 berühren. Zieht man z. B. die Gerade M_{2r}, M_{3r} und ermittelt ihren Schnittpunkt D_{1r} mit der Ebene (l_1, α_1) (durch Umklappung der projicirenden Ebene der Geraden M_{2r}, M_{3r}), so gehen von diesem im Allgemeinen zwei Tangenten an K_{1r} , die mit M_{2r}, M_{3r} zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen der Kegel bestimmen, die M_{2r} und M_{3r}

zu Spitzen haben; diesen entsprechen daher zwei Kegelschnitte, welche K_1 , K_2 , K_3 berühren; indem wir gleichzeitig auch die Schnittpunkte der Geraden M_{2r} , M_{3r} mit den Ebenen (l_2, α_2) , (l_3, α_3) bestimmen und von ihnen aus die Tangenten an K_{2r} , resp. K_{3r} ziehen, erhalten wir auch die Berührungspunkte der zwei gesuchten Kegelschnitte mit K_2 und K_3 . So entsprechen den Geraden M_{3r} , $-M_{2r}$, $-M_{3r}$, M_{2r} , $-M_{3r}$, $-M_{2r}$ drei weitere Paare von Kegelschnitten, welche K_1 , K_2 , K_3 berühren; die Spitzen M_{1r} , $-M_{1r}$ der zwei in Fig. 22 fehlenden Kegel, deren Tangentialebenen Kegelschnitte entsprechen, die K_2 , K_3 berühren, liegen selbstverständlich auch auf diesen Verbindungsgeraden. Jeder der acht Apollonischen Kegelschnitte schneidet jeden der drei gegebenen ausser in der Berührungsstelle noch in zwei weiteren Punkten, deren Verbindungsgerade sich mit der gemeinsamen Tangente im Schnittpunkte der zwei bezüglichen Leitlinien trifft u. s. w. In Fig. 22 sind nur die zwei Kegelschnitte wirklich gezeichnet, welche durch die Gerade M_{2r} , M_{3r} geliefert werden.

Es liegt ausser dem Rahmen dieser Veröffentlichung, noch näher auf die interessante Fig. 22 noch auf andere Probleme einzugehen, vielmehr schliesse ich damit ab mit dem Gefühle, hiermit zur Klarheit gebracht zu haben, wie die angegebene Methode so recht geeignet ist, die vielorts scheinbar schwierigen Constructionen über solche Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme in zusammenhängender, systematischer Entwicklung zu behandeln, die an Verständlichkeit, Kürze und Vollständigkeit der Resultate nichts zu wünschen übrig lässt.

Es hielte nicht schwer, die allgemeineren Systeme von Kegelschnitten mit zwei beliebigen gemeinsamen Punkten, oder mit zwei beliebigen gemeinsamen Tan-

genten, oder auch diejenigen mit nur einem gemeinsamen Punkte oder einer gemeinsamen Tangente (die zwei letzteren durch die vierfach unendlich vielen Strahlen des Raumes) durch analoge Mittel der Behandlung zu unterziehen. Endlich werden durch die Collineation und Reciprocität zweier Räume die projectivischen Beziehungen zweier solcher Kegelschnittsysteme eröffnet.

Ueber Ketine, eine neue Reihe organischer Basen

von

Dr. F. P. Treadwell,

I. Assistenten am chemisch-analytischen Laboratorium des Eidg. Polytechnikum.

Nach den Untersuchungen von V. Meyer und seinen Schülern entstehen durch Einwirkung von salpetriger Säure auf die Acetessigäther drei Classen von Nitrosokörpern:

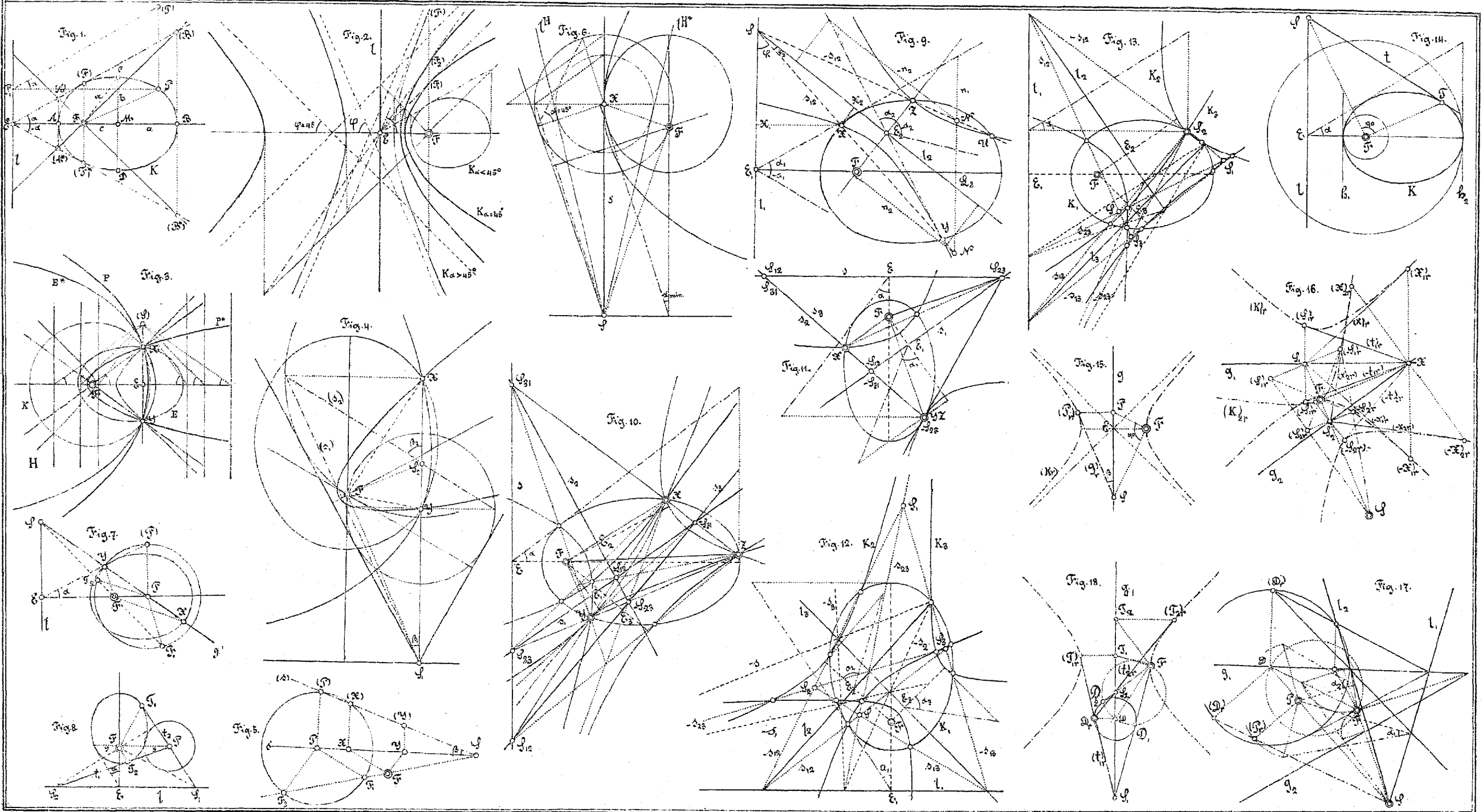
1) Nitrosoacetessigäther $\text{CH}_3 - \text{CO} - \text{CH}(\text{NO}) - \text{COO C}_2 \text{H}_5$.

2) Nitrosoaceton $\text{CH}_3 - \text{CO} - \text{CH}_2(\text{NO})$ und seine Homologen.

3) Nitrosopropionsäure $\text{CH}_3 - \text{CH}(\text{NO}) - \text{COOH}$ und deren Homologen.

Von diesen Substanzen zeigen nur die letzteren, beziehungsweise die Nitrosopropionsäure, bei der Reduction ein Verhalten, welches dem der sonst bekannten Nitrosokörper gleicht; sie geht in Alanin $\text{CH}_3 - \text{CH}(\text{NH}_2) - \text{COOH}$ über.

Resultate, welche hiermit wenig in Uebereinstimmung waren, erhielt H. Gutknecht bei der Untersuchung der



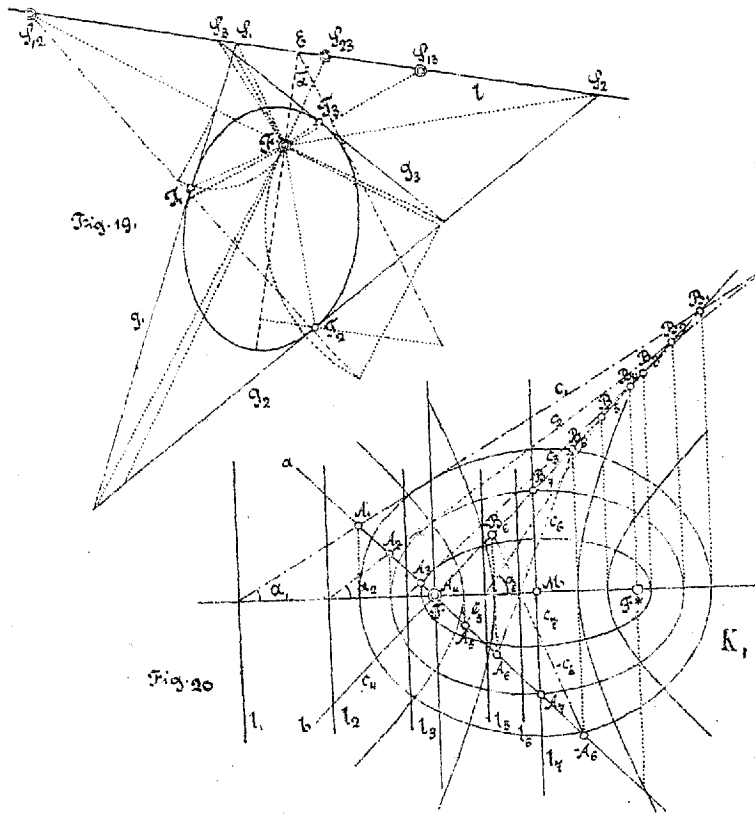


Fig. 19.

Fig. 20.

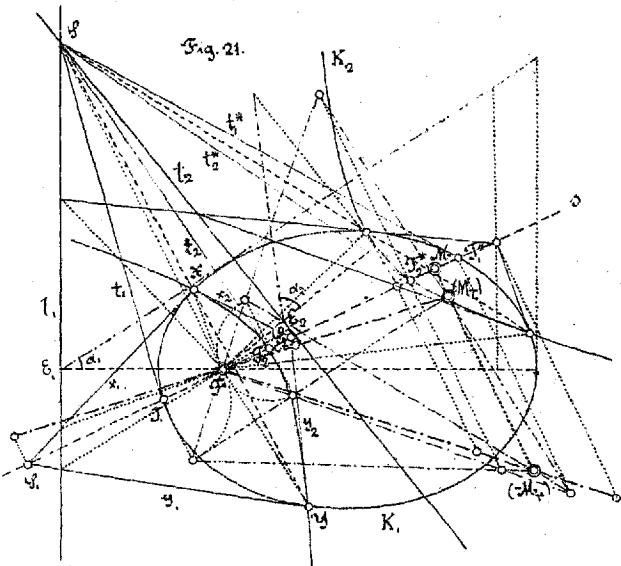


Fig. 21.

Aut. v. Verf.

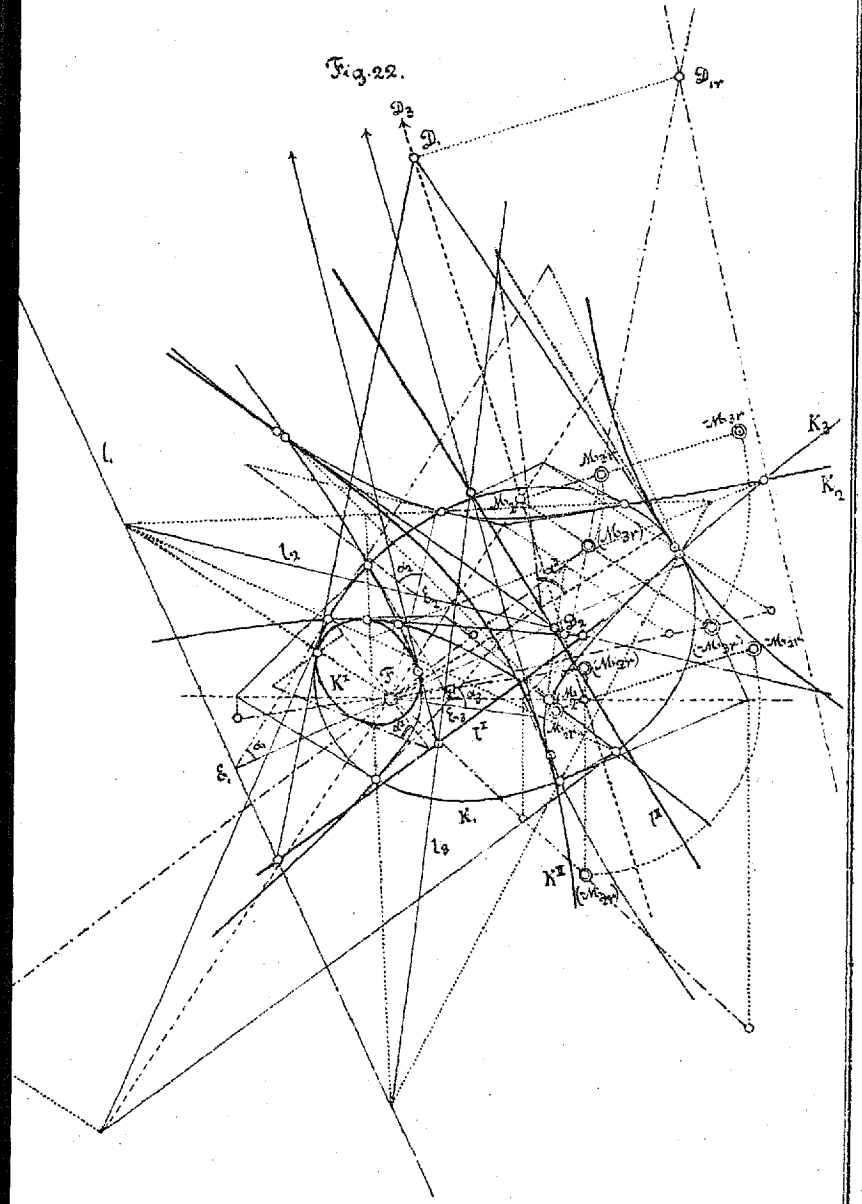


Fig. 22.

Druck v. C. Knechtli, Zürich.