Notizen.

Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln. Wenn als Definitionsgleichung für den Winkel zweier Kreise von den Radien R und r und der Centraldistanz c die Gleichung

$$2\,Rr\cos\sigma = R^2 + r^2 - c^2$$

festgestellt wird, so giebt die Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise einer Ebene, welche ich in Nr. III bis V der „Geometr. Mittheilungen" (Band 24 dieser Vierteljahrsschrift, p. 200 f. und p. 221 f. und Band 25 p. 217 f. und p. 403 f.) angewendet habe, eine einfache und consequente Anschauungsform für das System der Kreise, die mit einem gegebenen Kreis Winkel von vorgeschriebenem Cosinus bilden, und Lineal- und Zirkel-Constructionen zur Lösung aller Aufgaben über Kreise in der Ebene, welche solche Bedingungen einschliessen, nach der Methode der darstellenden Geometrie. Denken wir nämlich den Kreis vom Radius R als fest und in der Bildebene gelegen, seinen Mittelpunkt O als Anfangspunkt und zwei zu einander rechtwinklige unter seinen Durchmessern als Axen x und y, sowie die in O auf seiner Ebene errichtete Normale als Axe z eines Systems Cartesischer rechtwinkliger Coordinaten, so stellt der Kreis vom Radius r einen Punkt im Raume dar, dessen z die positive oder negative Länge r ist, während das Quadrat der Centraldistanz c der Summe der Quadrate seiner Coordinaten x und y gleich ist; die Kreise des in Rede stehenden Systems sind daher für den einen und den andern ihnen beizulegenden Drehungssinn die Bilder von Punkten, deren Coordinaten der Gleichung

$$\pm\,2\,Rz\cos\sigma = R^2 + z^2 - (x^2 + y^2)$$

genügen, d. h. von den Punkten zweier zur Bildebene orthogonal symmetrischer gleichseitiger Rotationshyperboloide von der Axe z. Die Meridiane derselben in der Ebene xz werden dargestellt durch

$$\pm\,2\,R\,z\cos\sigma = R^2 + z^2 - x^2$$

und vertreten das ganze System als Repräsentanten derjenigen Kreise desselben, die ihre Centra im Durchmesser x haben. Auf sie oder auf eine beliebige gleichseitige Hyperbel beziehen sich die folgenden Entwickelungen, deren rein elementarer Gang zur Ausdehnung der Methode auf den imaginären Schnittwinkel (mit $\cos \sigma^* > 1$) führt. Die zugehörige Figur, die hier unterdrückt werden muss, wird nach den folgenden Angaben leicht zu bilden sein. Eine gleichseitige Hyperbel von der reellen Halbaxe

$$MA = MB = r_0$$

sei so gelegen, dass ihre Hauptaxe mit dem x, ihre Nebenaxe mit dem z eines rechtwinkligen Coordinatensystems vom Anfangspunkt M zusammen fällt. Wir betrachten zwei Punkte P, P' derselben mit den Coordinaten (x, z) und (x', z') respective und wollen die Fusspunkte der Perpendikel von P und P' auf die Axen z und x durch O und O^* respective bezeichnen und mit ihren Längen um diese Fusspunkte Kreise beschreiben, die als feste Kreise der Systeme von bestimmten Schnittwinkeln σ, σ^* dienen sollen; so dass also $R = x'$ und $R^* = z'$ ist. Wir fällen ferner von P oder (x, z) auf $P'\,O$ das Perpendikel vom Fusspunkt N und der Länge $(z' - z)$ und auf $P'\,O^*$ das Perpendikel vom Fusspunkt N^* und der Länge $(x' - x)$ und beschreiben um N respective N^* mit diesen Längen die Kreise der Systeme r respective r^*, sodass $r = z' - z$, $r^* = x' - x$ ist. Da zugleich die respectiven Centraldistanzen $c = x$ und $c^* = z$ sind, so gelten für die cosinus der Schnittwinkel der Kreise R, r und R^*, r^* respective die definirenden Gleichungen

$$\cos\sigma = \frac{x'^2 + (z' - z)^2 - x^2}{2\,x'\,(z' - z)}, \quad \cos\sigma^* = \frac{z'^2 + (x' - x)^2 - z^2}{2\,z'\,(x' - x)}$$

Aus der Entstehung unserer gleichseitigen Hyperbel als Umlegung der Durchdringung von zwei mit den Scheiteln A und B als Spitzen und den Normalen zur Zeichnungsebene als Axen gebildeten gleichseitigen Rotationskegeln ergiebt sich aber für die Punkte P' derselben, dass die zugehörigen Kreise um O mit $O\,P'$ durch die Scheitel A und B gehen oder dass $x^2 - z^2 = r_0^2$ ist, d. h.

$$x'^2 - x^2 = z'^2 - z^2$$

oder durch Substitution in die vorigen Gleichungen

$$\cos\sigma = \frac{z'}{x'}, \quad \cos\sigma^* = \frac{x'}{z'} = \frac{1}{\cos\sigma},$$

und für die Tangenten, dass der Fusspunkt des Perpendikels $P' O$ zur Nebenaxe und der Fusspunkt T der Tangente $P' T$ in derselben mit den Scheiteln A und B rechte Winkel $O A T$, $O B T$ bestimmen. Daraus folgt

$$z' : x' = M O : O P' = M O : O A = O A : O T = O P' : O T = \cot\alpha$$

für α als den Winkel, den die Tangente der Hyperbel in P' mit der Axe der x oder mit $P' O$ einschliesst.

$$M O : O P' = \cot\alpha$$

sagt zugleich, dass α der Winkel ist, unter dem die Coordinate $O P'$ vom Centrum M aus erscheint; und man sieht, dass

$$\cos\sigma^* = \cot\alpha^* = M O^* : O^* P'$$

die Fortdauer dieser geometrischen Definition auch für den imaginären Schnittwinkel ausspricht. Daher kann das Ergebniss in folgende Anschauung zusammengefasst werden, aus der die darstellend geometrischen Lösungen aller bezüglichen Probleme entspringen: Man zeichnet den Winkel α, dessen Cotangente dem gegebenen Cosinus gleich ist und bestimmt zum gegebenen Kreise vom Mittelpunkt O (oder O^*) und Radius $O P' = R$ (oder $O^* P' = R^*$) mit diesem als der einen Kathete die an α anliegende andere Kathete $O M$ (oder $O^* M$) und durch Antragen von α in P' an $O P'$ (oder $O^* P'$) an der Seite von M die Tangente der gleichseitigen Hyperbel, woraus man leicht ihre Scheitel A und B erhält ($A B$ ist für reellen Schnittwinkel σ parallel dem Anfangs-Radius $O P'$, für imaginären σ^* normal zu demselben $O^* P'$). Rotirt nun die so gefundene Hyperbel um ihre zur Bildebene normale Axe — die Nebenaxe $O M$ im Falle der reellen und die Hauptaxe $O^* M$ im Falle des imaginären Schnittwinkels, — so ist das entstehende gleichseitige Rotations-Hyperboloid (ein einfaches im ersten, ein zweifaches im zweiten Falle) der Ort aller Punkte, deren Kreisbilder den gegebenenen Grundkreis unter dem Winkel vom vorgeschriebenen Cosinus schneiden. Verschiebt man die Bildebene parallel zu sich selbst, so giebt das einfache Hyperboloid stets reelle Grundkreise R und reelle Schnittwinkel σ zwischen 0° für den unendlich fernen Querschnitt, (d. h. nicht darstellbar, so lang r_0 nicht Null ist) und 90° für den diametralen; das zweifache für Ebenen, die ausserhalb der Strecke $A B$ die Axe schneiden, reelle endliche Grundkreise mit Schnittwinkeln von reellen endlichen aber Eins übersteigenden Cosinus, für die durch A oder B gehenden Null-Kreise mit Schnittwinkel von unendlich grossem reellem Cosinus; für die zwischenliegenden imaginäre Grundkreise, insbesondere für den Diametralschnitt den Scheitelkreis (als Symmetriekreis — Stellvertreter des imaginären Directrixkreises des Orthogonalsystems) mit dem Schnittwinkel vom Cosinus Null, womit das im Durchmesser Schneiden des letztern als die anschauliche Vertretung des Orthogonal-Schneidens mit dem imaginären Diametralkreis sich ergiebt. Im Falle des imaginären Schnittwinkels giebt es immer ein reelles Paar von gleichen Kreisen, welche von den Kreisen des Systems berührt werden, deren Centra in demselben Durchmesser liegen: die Grundkreise der durch die Hyperbel gehenden gleichseitigen Rotationskegel — für die Diametralebene werden sie zu den Scheiteln. Den reellen Grundkreis schneiden sie im Durchmesser, den Stellvertreter des imaginären, den die Bildebene aus der Scheitelberührungskugel des zweifachen Hyperboloids ausschneidet, orthogonal.

Für denselben Grundkreis erhält man mit verschiedenen Schnittwinkeln ein Büschel von parallelen, gleichseitigen Hyperboloiden vom Parameter $\cos\alpha$ und darin die Quelle vieler Ergebnisse für projektivische Relationen unter diesen Parametern bei mehreren Grundkreisen. Der Uebergang zum ebenen und zum linearen System der Kreise (vergl. V, Art. 2 und 5) ist durch $\cos\sigma = \cot\alpha$ klar vorgezeichnet; er entspricht dem unendlich grossen R respective R^*.

Ich unterlasse aber jede weitere Ausführung; ich wollte nur, weil ich an diesem Orte nicht auf die Methode zurückzukommen gedenke, die Interpretation des Schnittwinkels der Kreise geben, auf die ich bereits in Band 24, p. 223 unten hingewiesen, und die auch Art. 22 in „Geometr. Mittheilungen" V in Bd. 25 voraussetzt.

Zu den Elementen der Geometrie der Lage. Die Ueberführung der allgemeinen- Strahlen und Ebenen-Involutionen durch Schein- oder Schnitt-Bildung in symmetrische respective rechtwinklige ist ein Problem von pädagogischem und systematischem Werthe; ich will meine Behandlung desselben daher kurz mittheilen.

Eine Involution im Strahlen- oder Ebenen-Büschel ist bekanntlich symmetrisch, wenn ihre Doppelelemente reell und rechtwinklig zu einander sind, weil diese dann die halbirenden für jedes der Involution angehörige Paar von Elementen sind. In Folge dessen lassen die beiden Aufgaben: Durch eine hyperboloische Involution im Strahlenbüschel, d. h. eine solche mit reellen Doppelstrahlen g, h, ein symmetrisch-involutorisches Ebenenbüschel zu legen, und eine hyperbolische Ebeneninvolution durch einen bestimmten Punkt ihrer Scheitelkante nach einer symmetrischen Strahleninvolution zu schneiden — unendlich viele Lösungen zu.

Denn im ersten Falle drehen wir um den einen Doppelstrahl g der Involution eine Ebene und legen durch den andern Doppelstrahl h zu jeder ihrer Lagen die Normalebene, um in der Schnittlinie eines jeden solchen Paares eine Lage der gesuchten Scheitelkante der projicirenden symmetrischen Ebenen-Involution zu erhalten. Diese Scheitelkanten erfüllen daher einen Kegel zweiter Ordnung K_2 und man sieht leicht, dass jede zu g oder h normale Ebene denselben in einem Kreise schneidet, für den die Schnittpunkte mit g und h Endpunkte eines Durchmessers sind.

Im zweiten Falle denken wir durch den in der Scheitelkante angenommenen Punkt in der einen Doppelebene G eine gerade g_1 und bestimmen die Schnittlinie h_1 ihrer durch jenen Punkt gehenden Normalebene mit der zweiten Doppelebene H, um in der Ebene g_1 h_1 eine Ebene der geforderten Art zu erhalten. Die Gesammtheit solcher Ebenen bildet also einen Kegel zweiter Classe K^2 durch Umhüllung; derselbe berührt auch die Ebenen G und H, nämlich in den Geraden, die zur Scheitelkante des Ebenenbüschels im gewählten Punkte rechtwinklig sind oder in den Scheiteln des Linienwinkels, durch den der Flächenwinkel $(G\ ,\ H)$ gemessen wird.

J. Steiner hat ohne Bezug zu den hier besprochenen Problemen, die ihm jedoch wohl nicht fremd waren, diese Kegel und die entsprechenden sphärischen Kegelschnitte in den Doppelsätzen 3, 4 und 5, 6 auf p. 219 f. seiner „Systemat. Entwicklung“ aufgeführt.

Wenn sonach die hyperbolisch-involutorischen Büschel auf unendlich viele Arten durch Schnitt- oder Schein-Bildung in symmetrische überführbar sind, so dass diese Ueberführungen einer weiteren Bedingung unterworfen werden können, so ist die Ueberführung elliptisch-involutorischer Büschel in rechtwinklige ein bestimmtes Problem, weil man dafür zu sorgen hat, dass Schnitte oder Scheine von zwei Paaren der gegebenen Involution rechtwinklig werden. Sind z. B. x, x_1 und y, y_1 die bestimmenden Paare einer elliptischen Strahleninvolution, so erzeugen die Paare zu einander rechtwinkliger Ebenen durch x und x_1 einen Kegel zweiten Grades K_x, dessen Kreisschnittebenen zu x respective x_1 normal sind; und die Paare rechtwinkliger Ebenen durch y und y_1 einen solchen Kegel K_y; die gemeinsamen Erzeugenden beider Kegel sind die Scheitelkanten der gesuchten rechtwinkligen Ebeneninvolutionen und alle aus andern Paaren, z, z_1 etc. der Involution so erzeugten Kegel K_z, etc. enthalten sie. Zu ihrer bequemen Construction benutzt man an Stelle von y, y_1 das Rechtwinkelpaar der Involution r, r_1; denn der Kegel K_y geht dann in das Ebenenpaar über, welches die Rechtwinkelstrahlen mit der im Scheitel auf der Ebene des Büschels errichteten Normale bestimmen, d. h. in einer dieser Ebenen muss die gesuchte Scheitelkante der Rechtwinkel-Involution liegen. Der Kegel K_x oder vielmehr einer seiner Kreisschnitte bestimmt sie sofort — ein zur Büschelebene orthogonal-symmetrisches Paar.

Sind dagegen X, X_1 ein beliebiges und R, R_1 das Rechtwinkelpaar einer elliptischen Ebeneninvolution, so bilden wir für einen Punkt der Scheitelkante die Kegel zweiten Grades K^x und K^r und bemerken, dass der Letztere in die beiden Normalen zur Scheitelkante in den Ebenen R und R_1 degenerirt, sodass die Tangentialebene durch diese Geraden an den Kegel K_x die Ebenen rechtwinklig involutorischer Schnitte sein müssen. Man construirt sie also aus dem Normalschnitt des Ebenenbüschels durch den gewählten Punkt durch Aufklappung des Halbkreises über der Strecke zwischen den Spuren von X und X_1 als Durchmesser um die Parallele zur Spur von R oder R_1 bis zum rechtwinkligen Schnitt mit der Scheitelkante des Ebenenbüschels.

Man findet diese letzteren elementaren Constructionen neuestens in dem Werke von Prof. H. Schröter „Theorie der

Oberflächen zweiter Ordnung" etc., p. 19 f.). Aber (p. 22) mir erscheinen die unbestimmten Aufgaben bei der hyperbolischen Involution als die fundamentalen und damit der Durchgang durch die vermittelnden Kegel zweiten Grades naturgemäss.

Es ist offenbar, dass man mit dem meisten Vortheil die symmetrisch-harmonische Darstellung der Involutionen zu Grunde legt (siehe § 135 und speciell § 151, 7 und 8 meines Buches „Die darstellende Geometrie" etc. für den Fall der elliptischen Involution).

Einige interessante Deductionen, die sich bei der Anwendung meiner Construction auf die imaginären Doppelstrahlen der elliptischen Involution ergeben, will ich übergehen.

Von noch grösserem systematischem Werth ist mir, vor allem wegen der Theorie der imaginären Elemente, immer die Construction der Involution erschienen, welche mit einer gegebenen Vereinigung von zwei projectivischen Gebilden erster Stufe die nämlichen Doppelelemente hat. Ich nehme von Prof. Schröter's eben erwähntem Werke (siehe p. 15—18) Anlass zur Mittheilung meines Beweises der Lösung, weil derselbe für den Fall reeller und für den imaginärer Doppelstrahlen die nämliche Einfachheit besitzt.

Man habe beispielsweise die Vereinigung projectivischer Strahlenbüschel am Scheitel T, denke durch denselben einen Hülfskegelschnitt K gelegt und die Pascallinie p der auf ihn übertragenen Projectivität bestimmt; offenbar ist die Involution im Hülfskegelschnitt K, welche diese Gerade p zu ihrer Polare hat, die gesuchte — unabhängig von der Realität der Doppelelemente. Es ist sicher, dass die Doppelelemente der Projectivität f_1, f_2 von denen dieser Involution g, h nicht verschieden sein können. Man construirt nun zwei Paare dieser Involution wie folgt: Sei x, x' ein Paar entsprechender Strahlen der gegebenen projectivischen Büschel, so betrachte man x' als y und construire mittelst p den Strahl y' — also nach bekannter Bezeichnung (siehe mein vorgenanntes Werk, Art. 29, 31, Figuren 59, 65) mittelst der Geraden $X\,Y'$ und $X'Y$, der Tangente des Hülfskegelschnittes in $X'\,Y$, die sich auf der Pascal-Linie p in einem Punkte Z'' begegnen; man construire zum Strahle $x'\,y$ den harmonischconjugirten z in Bezug auf x und y', indem man von Z'' an den Hülfskegelschnitt die zweite Tangente zieht und ihren Berührungspunkt mit T verbindet; in dieser Art und Weise der Construction des vierten harmonischen liegt der entscheidende Punkt. Man construire endlich mittelst ZY' und Z' Y, die sich auf der Pascal-Linie p in einem Punkte X'' schneiden müssen, den entsprechenden Strahl z' in der Projectivität — und hat in y z, y' z' zwei Paare der geforderten Involution. Denn X'' oder Y Z', Y' Z und Z'' oder Y Y, Z Z sind zwei Punkte ihrer Polare, sodass die Identität derselben mit der Pascallinie p der Projectivität erwiesen ist.

Man gelangt leicht zur symmetrisch harmonischen Darstellung, die besonders für den Fall imaginärer Doppelelemente wichtig ist, wenn man — ich will es für den Fall der Reihen aussprechen — die Elemente X' Y als die entsprechenden der Gegenpunkte R' Q in den vereinigten Reihen wählt; dann fällt X mit R und Y' mit Q' zusammen, Z ist die Mitte der Gegenpunkte und Z' der entsprechende zu ihm, d. h. die Involution ist dargestellt durch ein Paar und ihren Centralpunkt. Im Falle der Projectivitäten im Büschel erhält man so unmittelbar die Darstellung aus einem Paar und den Axen. In beiden Fällen ist der Uebergang zur symmetrisch-harmonischen Darstellung offenbar.

Natürlich ist die Uebersetzung des entwickelten Beweises in Relationen der Würfe und die damit verbundene mehr abstracte Formulirung leicht, wenn man Werth darauf legen will.

Wilh. Fiedler.

Auszüge aus den Sitzungsprotokollen.

A. Sitzung vom 10. Januar 1881.

1) Herr Bibliothekar Horner legt folgende eingegangene Schriften vor:

A. In Tausch gegen die Vierteljahrsschrift.

Sitzungsberichte d. Akademie in Wien.

Abth. I. LXXXI. 1–5. Abth. II. LXXXI. 4. 5. LXXXII. 1. 2. LXXXII. 1. 2. Abth. III. LXXXI. 4. 5. LXXXII. 1. 2. Register 76–80.