Einfache Erzeugung einer grösseren Anzahl von Complexen zweiten Grades

von

Dr. **A. Weiler.**

Bei einer Untersuchung über Complexe zweiten Grades bin ich zu nachfolgenden Hauptresultaten gelangt.[1])

Es giebt solche Complexe, die sich durch lineare Congruenzen erzeugen lassen. Ein Beispiel bietet der tetraedrale Complex. Herr Reye[2]) hat angegeben, dass er aus linearen Congruenzen besteht. Seien $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_3 \mathsf{A}_4$ die Ecken und die gegenüberliegenden Flächen des Tetraeders der Haupt-Punkte und Ebenen resp. der Singularitätenfläche des Complexes. Alle Complexgeraden, welche den Strahl b des Büschels $A_1 \mathsf{A}_4$ treffen, bilden eine lineare Congruenz, deren zweite Directrix b' dem Büschel $A_4 \mathsf{A}_1$ angehört. Wenn alsdann b, b' die $A_1 A_4$ gegenüberliegende Tetraederkante $A_2 A_3$ in B und B' schneiden, so liefern die Punkte $A_2 A_3 B B'$ und die 4 Schnittpunkte irgend eines Complexstrahls mit den Flächen A_i gleiche, also constante, Doppelverhältnisswerthe. — Die Directricenpaare $bb'\ cc'$, ... schneiden somit $A_2 A_3$ in zwei (vereinigten) projectivischen Reihen oder die Büschel $bcd \ldots$, $b'c'd' \ldots$ sind projectivisch. Die Doppelpunkte jener Reihen sind A_2, A_3; die von A_1, A_4 nach ihnen gehenden

---

[1]) Die vollständige Mittheilung wird in einem der nächsten Hefte der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" erscheinen.

[2]) Die Geometrie der Lage, 1868, II, pag. 121.

Büschelstrahlen entsprechen sich und ergeben zerfallende Congruenzen.

Der tetraedrale Complex oder der Complex [(11)(11)(11)][1] wird also durch lineare Congruenzen erzeugt, deren Directricenpaare zwei projectivische Büschel in allgemeiner Lage und Zuordnung bilden. — Diese Erzeugung ist für denselben Complex auf sechs Arten möglich.

Hat man weiterhin zwei projectivische Büschel A**A**, B**B** (mit den Scheiteln A, B und in den Ebenen **A** durch A und **B** durch B gehend), wobei A in **AB** liegt, so entsteht ein weiterer Complex zweiten Grades, nämlich [(11)(22)]. Entspricht hierbei insbesondere dem Strahl **AB** des Büschels A**A** im zweiten Büschel die Linie BA, so entsteht [(33)].

Wenn beide Scheitel A, B der projectivischen Büschel A**A**, B**B** in **AB** liegen, so entsteht [(11)(112)]. (Wenn alsdann speciell AB=**AB** sich selbst entspricht, so zerfällt der Complex in einen allgemeinen und einen speciellen linearen.)

Ein eigenthümliches Verhalten zeigt der bereits erwähnte Complex [(11)(22)]. Seien **ABC** drei Ebenen, die sich im Punkte C schneiden. In **AC** liege A, in **BC** liege B. Alsdann hat man entsprechend der oben gegebenen Erzeugung die projectivischen Büschel A**C**, C**B** und C**A**, B**C**. Aber auch A**A** und B**B** können Büschel von Directricen sein. Diese Büschel sind in allgemeiner Lage, aber entsprechende Strahlen schneiden auf der Schnittlinie ihrer Ebenen **A**, **B** Punktepaare heraus, welche zwei pro-

[1] Vgl. meine Abhandlung: Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades, Mathematische Annalen VII, pag. 145.

jectivische Reihen mit zusammenfallenden Doppelelementen bilden.

Bevor weitere Fälle behandelt werden, soll folgende allgemeine Bemerkung Platz finden. Die Congruenz mit den Directricen d, d_1' gehöre zum Complex. Alsdann zerfällt die Congruenz zweiten Grades von Complexgeraden, welche d treffen in zwei lineare dd_1', dd_2'. Die Zuordnung der Directricen ist, also im Allgemeinen [2,2]-deutig. Wenn aber d in der Ausnahmeebene $\mathbf{E}$ durch den darin gelegenen Ausnahmepunkt P geht, so zerfällt die eine lineare Congruenz in das Bündel P und das Strahlfeld $\mathbf{E}$ und zu d gehört nebst der einen Directrix d_1' eine zweite, die in $\mathbf{E}$ durch P beliebig gewählt werden kann. In diesem Falle gehört zu der Directrix d nur eine bewegliche d'.

Für den Complex [11(112)] wähle man zwei Ebenen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, in ihrer Schnittlinie die Punkte A, B. Bei Kegelschnitt K treffe $\mathbf{A}$ in C, D und $\mathbf{B}$ in E, F. Durch die Schnittpunkte mit den Tangenten von K entstehen in CD, EF zwei Punktereihen mit [2, 2]-deutiger Zuordnung. Die Punkte auf CD verbinde mit A, die auf EF mit B, so entstehen zwei Büschel $A\mathbf{A}, B\mathbf{B}$ mit [2,2]-deutiger Zuordnung. Entsprechende Strahlen sind die Directricen der lin. Congruenzen. (K ist hier irgend ein Complexkegelschnitt.)

Für [1(113)] hat man im Allgemeinen die vorige Erzeugung, jedoch fällt C mit E zusammen d. h. $AB = \mathbf{AB}$ schneidet K. — Bei [(114)] wird K ebenfalls von AB getroffen, zudem wird K von $\mathbf{A}$ berührt ($C = D = E$). Die Zuordnung der Büschelstrahlen ist [2,1]-deutig. — Unabhängig von K hat man folgende Entstehung: Ein Büschel $B\mathbf{B}$ und eine damit projectivische Strahleninvolution $A\mathbf{A}$

liegen so, dass A und B in **AB** liegen und dass diesem Strahl AB zu B**B** gezählt ein Doppelstrahl der Involution, der auch in AB fällt, entspricht.

Zu dieser Gruppe von Complexen gehört weiterhin [2(112)]. Die Büschel A**A**, B**B** sind auch hier in [2,1]-deutiger Zuordnung. **A** berührt K in $C=D$ und **B** schneidet K noch in E,F. Wenn auch noch $E=F$ d. h. wenn K sowohl von **A** als **B** berührt wird, so hat man Büschel mit [1,1]-deutiger Zuordnung und erhält [(11)(112)], s. oben.

Es sind hier alle Fälle behandelt, bei denen die Directricen Büschel bilden, mit Ausnahme einiger Complexe, bestehend aus speziellen Congruenzen, welche zuletzt behandelt werden. — Neben den Büscheln werden nun noch Regelschaaren von Flächen zweiten Grades eingeführt.

Bei [(11)(11)2] sind die Strahlen $abc\ldots$ einer solchen Regelschaar R projectivisch mit den Strahlen $a'b'c'\ldots$ eines Büschels A**A**, dessen Scheitel auf dem Strahl a von R liegt und dessen Ebene a enthält (nicht aber die Tangentialebene in A an die Fläche von R ist). Hierbei entspricht der gemeinsame Strahl $a=a'$ sich selbst. Diese Erzeugung ist für den nämlichen Complex a u f v i e r A r t e n möglich. — Für [(11)(13)] sind die Strahlen $abc\ldots$ von R projectivisch mit den Strahlen $a'b'c'\ldots$ des Büschels A**A**, dessen Scheitel auf a liegt und dessen Ebene **A** die Tangentialebene in A an die von R gebildete Fläche ist. Auch hier entspricht der gemeinsame Strahl $a=a'$ sich selbst. — Daneben giebt es noch eine andere Erzeugungsweise.

Es kann hier die vorkommende Fläche zweiten Grades in einen Kegel oder in einen Kegelschnitt ausarten. Bei [2(22)] sind die Strahlen $abc\ldots$ eines Kegels **K** projectivsich zugeordnet den Strahlen $a'b'c'\ldots$ des Büschels A**A**, wobei A auf **K** liegt und **A** durch dessen Spitze geht. Der Büschelstrahl, der auf **K** liegt, entspricht sich selbst. Diese Erzeugung ist stets auf zwei Arten möglich. (Im dualen Fall geht R über in alle Tangenten eines Kegelschnitts K.)

Die zu [(24)] gehörende Regelfläche artet ebenfalls aus. Um mit [2(22)] vergleichen zu können, nehmen wir an, sie werde zu einem Kegel **K**. Der Scheitel A des Büschels ist auf **K** gelegen und **A** berührt **K**. Der gemeinsame Strahl entspricht sich selbst. Diese Erzeugung ist auch hier zwei Male möglich.

Die Directricen können fernerhin die eine Erzeugung R einer Fläche zweiten Grades F ausmachen. Das ist zunächst der Fall bei [(111)111]. Die Zuordnung der Strahlen von R wird in einem ebenen Querschnitt von F durch einen Kegelschnitt K gegeben. K liege mit dem Kegelschnitt C von F in einer Ebene. Jedem Punkte P von C entsprechen die zweiten Schnittpunkte $P_1{}'P_2{}'$ der von P an K gehenden Tangenten, mit C. Durch die entsprechenden Punkte PP' legt man die Erzeugenden der Schaar R und erhält so die Directricen in [2,2]-deutiger Zuordnung.

Den Strahlen von R, welche durch die K und C gemeinsamen Punkte gehen, entsprechen zusammenfallende Directricen und diese Congruenzen bilden die singulären Linien, bestehend aus 4 allgemeinen linearen Congruenzen. Die Geraden der zweiten Erzeugung von F gehören diesen 4 Congruenzen an und sind somit vierfache singuläre Linien (Aehnliches hat man bei [11(112)] etc.).

[1(111)2] zeigt im Allgemeinen das nämliche Verhalten. Jedoch berühren sich K und C an einer Stelle. (Zwei Congruenzen singulärer Linien fallen desshalb zusammen und bilden eine specielle doppelt zu zählende Congruenz). — Haben K und C 3 consecutive Punkte gemeinsam, oder osculiren sie sich dreipunktig, so entsteht [(111)3]. Die Zuordnung der Strahlen von R bleibt [2,2]-deutig und es fallen 3 Congruenzen singulärer Linien zusammen.

Wenn K und C sich doppelt berühren, so entsteht [(111)(11)1]. Die Zuordnung der Strahlen von R wird hier eindeutig: Bringt man die Strahlen der einen Erzeugung einer Fläche zweiten Grades in projectivische Zuordnung und fasst man jedes Strahlenpaar auf als die Directricen einer linearen Congruenz, so bilden diese Congruenzen den Complex zweiten Grades [(111)(11)1].

Es kann der Fall eintreten, dass oben K und C sich vierpunktig osculiren. Alsdann sind die Strahlen von R so in projectivischer Zuordnung, dass die selbstentsprechenden vereinigt sind. Es entsteht [(111)(12)]. — Wenn endlich K und C identisch sind, so hat man [(111)(111)]. Jeder Erzeugenden von R entspricht die consecutive. Der Complex besteht aus speciellen Congruenzen und wird gebildet durch alle Tangenten von F. Beide Regelschaaren von F kann man zur Erzeugung verwenden.

Besteht die Singularitätenfläche des Complexes aus zwei Flächen zweiten Grades F_1, F_2, die ein windschiefes Vierseit gemein haben, so hat man nachstehende Erzeugungen. Bei [11(11)(11)] sei das Vierseit $e_1 e_2 e_3 e_4$. Die Regelschaaren von F_1, F_2, welche die Gegenseiten e_1, e_3 schneiden, sind so in projectivischer Zuordnung, dass e_2 und e_4 sich selbst entsprechen. Gleichzeitig sind aber auch die übrigen beiden Regelschaaren auf F_1, F_2 eindeutig zugeordnet, wobei e_1, e_3 sich selbst entsprechen. Der nächst speciellere Fall ist [1(11)(12)]. Hier haben

F_1, F_2 die Erzeugenden e_1, e_3 gemeinsam und berühren sich nach e_2. Die Strahlen der Regelschaaren, zu denen e_1, e_3 gehören, sind eindeutig zugeordnet, so dass e_1 und e_3 sich selbst entsprechen. Oder man bringt die anderen Regelschaaren in eindeutiges Entsprechen, wobei für die aus e_1 geschnittenen projectivischen Punktereihen die Doppelpunkte in e_1, e_3 vereinigt sind. — F_1 und F_2 berühren sich für [(12)(12)] längs zwei Erzeugenden e_1, e_2. Auf e_1 construire man zwei vereinigte projectivische Reihen, deren Doppelpunkte in $e_1 e_2$ vereinigt sind. Durch die entsprechenden Punkte gehen die Directricenpaare und gehören den e_1 schneidenden Regelschaaren von F_1 und F_2 an. — Diese Erzeugung ist zweimal ausführbar.

Die Flächen F_1, F_2 können ausarten in einen Kegel **K** und einen Kegelschnitt C. Im allgemeineren Fall [11(22)] berührt C die in seiner Ebene liegenden Kegelerzeugenden (die Ebene von C enthält die Spitze von **K**). Die Strahlen s von **K** und die Tangenten t von C sind in projectivischer Zuordnung, so dass die gemeinsamen, s_1 und s_2, sich selbst entsprechen. Im specielleren Fall [1(23)] liegt C in einer Tangentialebene von **K** und berührt die darin gelegene Kegelseite s an der Kegelspitze. Die Zuordnung der Erzeugenden von **K** und der Tangenten von C zu Directricen ist eine eindeutige. Hierbei soll s sich selbst entsprechen und es ist die Zuordnung noch in anderer Weise specialisirt.

Complex [(11)4]. Seien d, l, c die doppelte und die einfache Leitlinie einer Regelfläche dritten Grades F, sowie deren eine Cuspidalerzeugende. Auf l construire man zwei projectivische Reihen $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ deren Doppelpunkte in $c\,l$ vereinigt sind. Die durch $ABC\ldots$ gehenden Erzeugenden von F sind alsdann den von

dc nach $A'B'C'\ldots$ gehenden Strahlen eindeutig zugeordnet und entsprechende Strahlen sind Directricenpaare. — Der Complex kann noch in anderer Weise erzeugt werden.

Complex [(15)]. Bei einer Cayley'schen Linienfläche dritten Grades F bringe man die Ebenen durch die Doppelgerade (oder die Punkte auf ihr) in involutorische Zuordnung, so dass die eine Doppelebene mit der Cuspidalebene zusammenfällt. Die in den Ebenenpaaren liegenden Erzeugenden von F sind die Directricen der Congruenzen. — Für diesen Complex giebt es noch eine zweite Erzeugungsweise.

Complex [1(14)]. Eine Regelfläche vierten Grades, Cremona X, habe zusammenfallende Cuspidalebenen. (Der Doppelpunkt der Leitcurve dritter Ordnung geht in eine Spitze über.) Die Erzeugung ist wie bei [(15)], jedoch hier auf zwei Arten möglich.

Von den aus speciellen Congruenzen bestehenden Complexen ist [(111)(111)] bereits erwähnt worden. Wird seine Singularitätenfläche zu einem Kegel oder Kegelschnitt, so entsteht [(222)]. Der Complex besteht entweder aus allen Tangenten eines Kegels **K** oder aus allen Treffgeraden eines Kegelschnittes C. Jeder Erzeugenden von **K** resp. von C ist die consecutive zugeordnet und alle Congruenzen zerfallen. — Beide Complexe unter [(222)] erhält man als zerfallenden Complex vierten Grades. Die Strahlen $abc\ldots$ der einen Regelschaar einer Fläche zweiten Grades F bringt man in projectivische Zuordnung mit den Strahlen $a'b'c'\ldots$ der anderen Schaar von F. Die zerfallenden Congruenzen $aa', bb', \ldots$ bilden beide Complexe zugleich.

Complex [1(122)]. Die Directricen der speciellen

Congruenzen bilden ein Büschel. Zu jedem Strahl giebt es zwei unendlich benachbarte zugehörige Directricen, resp. die Punkte und Ebenen eines solchen Strahls sind auf zwei Arten projectivisch zugeordnet, zu Scheiteln und Ebenen von Strahlenbüscheln, bestehend aus Strahlen dieser Congruenzen und des Complexes. In einem metrisch specialisirten Fall entsteht der Complex durch Rotation einer speciellen linearen Congruenz um eine Axe, welche die Directrix der Congruenz schneidet und zu der Ebene, welche dem Fusspunkte entspricht, senkrecht steht.

Complex [(123)]. Die Directricen bilden ein Büschel $A\mathsf{A}$, wobei A ein Ausnahmepunkt, A eine Ausnahmeebene ist. Sei α ein Strahl des Büschels $A\mathsf{A}$; die α schneidenden Complexstrahlen bilden A und A als zerfallende Congruenz und ausserdem eine irreducible specielle. Die Erzeugung ist folgende: Die Complexkegel aus zwei Punkten S_1, S_2 des Raumes schneiden A in den Kegelschnitten K_1, K_2, welche durch A gehen und dort osculiren. Ein Strahl α des Büschels $A\mathsf{A}$ treffe K_1 und K_2 in P_1, P_2. Den Punkten A, P_1, P_2 auf α entsprechen alsdann stets die Ebenen A, $\alpha S_1, \alpha S_2$.
