Zur Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung.

Von

Dr. Ulrich Aeschlimann.

Die Aufgabe, aus der Gleichung einer ebenen Curve vierter Ordnung die Gleichungen ihrer Doppeltangenten abzuleiten, ist im Allgemeinen algebraisch nicht lösbar, wie Herr Camille Jordan gezeigt hat.[1]) Hesse macht z. B. in seiner grundlegenden Abhandlung[2]) das Problem abhängig von der Darstellung der Curvengleichung in Form einer gleich null gesetzten symmetrischen Determinante vierten Grades, deren Elemente lineare Funktionen der Coordinaten sind, und weiter von der Auflösung einer Gleichung vom achten Grade.

Herr Prof. Dr. Geiser machte in einer Vorlesung: «Ueber ebene Curven dritter und vierter Ordnung», welche der Verfasser im Wintersemester 1875/76 als Schüler der VI. Abtheilung des Eidg. Polytechnikums besuchte, auf mehrere Fälle aufmerksam, für welche sich a priori entscheiden lässt, dass die Auflösung der obigen Aufgabe *algebraisch* möglich ist. Eines dieser Beispiele soll im Folgenden behandelt werden. Es wird sich zeigen, dass die Steiner'sche Erzeugungsart der Curve vierter Ordnung als Enveloppe von Kegelschnittreihen am naturgemässesten zur Lösung des

---

[1]) Traité des Substitutions pag. 330.

[2]) Crelle's Journal t. 49. pag. 279 u. ff. Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.

Problems hinführt, während für die weitere Gruppirung der Doppeltangenten der von Hesse angegebene Algorithmus sich als besonders fruchtbar erweist. Die zu untersuchende Curve ist auch noch in anderer Hinsicht von Interesse. Gewöhnlich gibt man, um die Möglichkeit von 28 reellen Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung zu zeigen, der Curvengleichung eine bestimmte Form und construirt die Curve aus derselben. Sind solche Beispiele in gewissem Sinne als *algebraisch* zu bezeichnen, so ist die obige Curve im Gegensatze dazu ein *geometrisches* Beispiel einer Curve vierter Ordnung mit 28 reellen Doppeltangenten.

§ 1.

Im 55. Band des Crelle'schen Journals für Math. gibt *Steiner* unter Anderm folgenden Satz an: *Jede Schaar von unter sich ähnlichen und einem gegebenen Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitten hat ihre Mittelpunkte in einer gewissen Curve vierter Ordnung.* In der That. Alle Kegelschnitte mit drei gemeinschaftlichen Tangenten, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, bilden eine Kegelschnittschaar. In derselben gibt es im Allgemeinen vier Kegelschnitte, die ein vorgeschriebenes Axenverhältniss haben, also einem gegebenen Kegelschnitt ähnlich sind. Die Curve C der Mittelpunkte wird also von einer beliebigen Geraden im Allgemeinen in vier Punkten geschnitten, ist demnach von der *vierten Ordnung.*

Für gewisse Werthe des Axenverhältnisses lässt sich die Ortscurve C sofort angeben. Ist z. B. das Axenverhältniss *null*, d. h. sind die berührenden Kegelschnitte Parabeln oder doppelt gelegte Strecken von einer Ecke des Tangentendreiseits nach der gegenüberliegenden Seite desselben, so liegen ihre Mittelpunkte offenbar entweder auf der unendlich fernen Geraden der Ebene, sagen wir g_0, oder auf einer der drei Verbindungslinien der Seitenmitten des Tangentendreiseits, sagen wir g_1, g_2, g_3. Der Ort C besteht also in diesem Fall aus vier Geraden. Ist ferner das Verhältniss der Axen gleich $\sqrt{-1}$, so sind die berührenden Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln. Die Mittelpunkte derselben liegen bekanntlich auf einem Kreise f, welcher das Tangentendreiseit zum Tripel harmonischer Polaren hat. Die Curve C besteht also in diesem Fall aus dem doppelt gelegten Kreise f. Jeder Punkt der Ebene ist im Allgemeinen der Mittelpunkt eines ganz bestimmten Kegelschnittes mit drei gegebenen Tangenten. Wählt man hingegen die Schnittpunkte des doppelt gelegten Kreises f mit den Geraden g_i ($i = 0, 1, 2, 3$) als Mittelpunkte solcher Kegelschnitte, so kann das Axenverhältniss sowohl den Werth 0 als $\sqrt{-1}$ haben, d. h. es ist für diese Punkte unbestimmt. Demnach gehn auch die zu beliebigen Werthen des Axenverhältnisses gehörigen Curven C durch eben diese Punkte, bilden also ein Büschel mit paarweise zusammenfallenden Grundpunkten.[1]) Ist also $g_i = 0$ die Gleichung der Geraden g_i, $f = 0$ diejenige des Kreises f, so lässt sich die Gleichung jeder Curve C auf die Form bringen:

$$C \equiv g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 - \varrho \cdot f^2 = 0,$$

wo ϱ eine Funktion des Axenverhältnisses ist. Demnach ist C die Enveloppe einer Kegelschnittreihe von der Gleichung:

---

[1]) Jeder *reelle* Punkt bestimmt als Mittelpunkt eines Kegelschnittes mit drei reellen Tangenten stets auch einen *reellen* Kegelschnitt. Folglich sind die Grundpunkte des Büschels sämmtlich imaginär, und pie Geraden g_0, g_1, g_2, g_3 sind gemeinschaftliche *ideale Doppeltangenten* aller Curven C des Büschels.

$$L_1 \equiv g_0\, g_1 . \lambda_1^2 + 2 . \sqrt{\varrho} . f . \lambda_1 + g_2\, g_3 = 0\,,$$

oder auch von

$$L_2 \equiv g_0\, g_2 , \lambda_2^2 + 2 . \sqrt{\varrho} . f . \lambda_2 + g_1\, g_3 = 0\,,$$
$$L_3 \equiv g_0\, g_3 , \lambda_3^2 + 2 . \sqrt{\varrho} . f . \lambda_3 + g_1\, g_2 = 0\,,$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 variable Parameter sind. In der That ist $C = 0$ die Bedingung, dass die vorstehenden Gleichungen gleiche Wurzeln λ_i zulassen. Jeder Kegelschnitt der Reihe berührt die Enveloppe C in vier verschiedenen Punkten. Zerfällt er in ein Linienpaar, so ist dieses ein Doppeltangentenpaar von C. Die Bedingungsgleichung wird vom 6. Grade in den λ_i. Dieselbe enthält aber die Wurzeln 0 und ∞, reduzirt sich also auf eine Gleichung des *vierten Grades*. Da man aus jeder der drei Reihen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ auf diese Weise vier neue Doppeltangentenpaare erhält, so können wir durch Auflösen von Gleichungen vierten Grades die Gleichungen von sämmtlichen 28 Doppeltangenten ableiten. *Das Problem ist also algebraisch lösbar.*

§ 2.

Wir wollen nun die im vorigen Paragraphen angedeutete Auflösung wirklich ausführen. Zu diesem Zwecke leiten wir zuerst die Gleichung der Curve C ab. Wir wählen das Tangentendreieck ABC zum Coordinatendreieck und bestimmen einen Punkt durch seine Abstände x, y, z von den Seiten

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

wobei die Abstände für einen Punkt im Innern des Dreiecks als positiv gerechnet sein sollen. Es gilt dann für Δ, als den doppelten Inhalt des Dreiecks ABC, stets die Gleichung:

$$ax + by + cz = \Delta \tag{1}$$

Seien nun M der Mittelpunkt, F_1 und F_2 die Brennpunkte eines dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitts, ferner x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 ihre bezüglichen Coordinaten. Sei ferner β die halbe kleine Axe des Kegelschnitts, so hat man:

$$x_1 + x_2 = 2x; \quad y_1 + y_2 = 2y; \quad z_1 + z_2 = 2z;$$
$$x_1 \,.\, x_2 = \beta^2; \quad y_1 \,.\, y_2 = \beta^2; \quad z_1 \,.\, z_2 = \beta^2.$$

Also:

$$x_1 - x_2 = 2\,.\,\sqrt{x^2 - \beta^2};\ y_1 - y_2 = 2\,.\,\sqrt{y^2 - \beta^2};\ z_1 - z_2 = 2\,.\,\sqrt{z^2 - \beta^2};$$

und da nach 1)

$$a\,(x_1 - x_2) + b\,(y_1 - y_2) + c\,(z_1 - z_1) = 0 \text{ ist,}$$

so folgt:

$$a\,.\,\sqrt{x^2 - \beta^2} + b\,.\,\sqrt{y^2 - \beta^2} + c\,.\,\sqrt{z^2 - \beta^2} = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit der Wurzelvorzeichen gilt ebenso:

$$-a\,.\,\sqrt{x^2 - \beta^2} + b\,.\,\sqrt{y^2 - \beta^2} + c\,.\,\sqrt{z^2 - \beta^2} = 0;$$
$$a\,.\,\sqrt{x^2 - \beta^2} - b\,.\,\sqrt{y^2 - \beta^2} + c\,.\,\sqrt{z^2 - \beta^2} = 0;$$
$$a\,.\,\sqrt{x^2 - \beta^2} + b\,.\,\sqrt{y^2 - \beta^2} - c\,.\,\sqrt{z^2 - \beta^2} = 0.$$

Multiplicirt man diese vier Gleichungen mit einander und ordnet nach Potenzen von β, so wird:

$$4\,\Delta^2\,\beta^4 - 2\,f\,\beta^2 + g_0\,g_1\,g_2\,g_3 = 0, \tag{2}$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left.\begin{array}{l}
-a^2 + b^2 + c^2 = a_1;\ a^2 - b^2 + c^2 = b_1;\ a^2 + b^2 - c^2 = c_1; \\
a_1\,a^2\,x^2 + b_1 b^2 y^2 + c_1\,c^2\,z^2 \equiv f\,; \\
ax + by + cz \equiv g_0\,; \\
-ax + by + cz \equiv g_1\,; \\
ax - by + cz \equiv g_2\,; \\
ax + by - cz \equiv g_3\,;
\end{array}\right\} \quad 3)$$

Sind in 2) die Werthe von x, y, z gegeben, so liefert die Gleichung zwei Werthe $\beta_1{}^2$ und $\beta_2{}^2$ für die Quadrate der Halbaxen des durch den Mittelpunkt und 3 Tangenten bestimmten Kegelschnitts. Sollen diese in einem bestimmten Verhältniss stehn, soll also z. B.

$$\frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} = \lambda \tag{4}$$

sein, so ist die Bedingung dafür:

$$C \equiv g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 - \frac{\lambda f^2}{\Delta^2 (1+\lambda)^2}. \tag{5}$$

Diess ist die Gleichung der gesuchten Ortscurve C.

§ 3.

Aus Gleichung 5) ersieht man, dass die Geraden g_0, g_1, g_2, g_3 (welche, wie man aus 3) ersieht, identisch sind mit den in § 1 eingeführten) Doppeltangenten von C sind, und dass ihre Berührungspunkte auf dem Kegelschnitte f liegen. Dass dieser letztere identisch ist mit dem Kreise f, welcher in § 1 eingeführt wurde, ist leicht zu zeigen. Sind nämlich A, B, C die Winkel des Dreiecks ABC, so ist:

$$a_1 = \frac{b^2 c^2}{\Delta} . \sin 2A; \quad b_1 = \frac{c^2 a^2}{\Delta} . \sin 2B; \quad c_1 = \frac{a^2 b^2}{\Delta} . \sin 2C.$$

Demnach wird:

$$f \equiv \frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta} . (\sin 2A . x^2 + \sin 2B . y^2 + \sin 2C . z^2),$$

welches die bekannte Gleichung für den Kreis ergibt, der das Dreieck ABC zum Tripel hat. Derselbe ist, wie man sieht, nur reell, wenn von den drei Winkeln $2A$, $2B$, $2C$, einer grösser als 180° ist, d. h. wenn ABC ein stumpfwinkliges Dreieck ist.

Der Ausdruck C bleibt unverändert, wenn statt λ, $\frac{1}{\lambda}$ gesetzt wird. Um demnach alle Gleichungen der Curven des Büschels 5) zu erhalten, hat man λ bloss von (-1) bis $(+1)$ sich ändern zu lassen.

Für $\lambda = -1$ geht C über in den doppelt gelegten Kreis f, für $\lambda = 0$ in die Geraden g_0, g_1, g_2, g_3. Für $\lambda = +1$ wird aus 5):

$$C \equiv a^2x^4 + b^2y^4 + c^2z^4 - a_1y^2z^2 - b_1z^2x^2 - c_1x^2y^2 = 0.$$

Die linke Seite zerfällt in die Factoren:

$$\frac{1}{2a} \cdot \left(-(b_1 + c_1)\, x^2 + (c_1 + 2\,\varDelta\, i) \quad y^2 + (b_1 - 2\,\varDelta\, i)\, z^2\right)$$
$$\frac{1}{2a} \cdot \left(-(b_1 + c_1)\, x^2 + (c_1 - 2\,\varDelta\, i) \quad y^2 + (b_1 + 2\,\varDelta\, i)\, z^2\right)^{1)}$$

Die Curve C zerfällt also in zwei imaginäre Kegelschnitte, die sich in den einzigen reellen Punkten der Curve C

$$x^2 = y^2 = z^2$$

schneiden. In der That sind diese Punkte die Mittelpunkte der 4 dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreise.

Nimmt man dann ferner $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{A^2}{2}$, so wird aus 5)

$$C \equiv g_0g_1g_2g_3 - \frac{a_1{}^2 - 4\,b^2\,c^2}{4a_1{}^2\,\varDelta^2} \cdot f^2 = 0.$$

Oder da $\quad a_1{}^2 - 4\,b^2\,c^2 = -4\,\varDelta^2$ ist:

$$C \equiv g_0g_1g_2g_3 + \frac{f^2}{a_1{}^2} = 0$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so wird:

$$\frac{y^2}{z^2} = \frac{c^2}{b^2 - a^2} \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{z^2} = \frac{c^2 - a^2}{b^2}.$$

Für $y = 0$ hingegen wird:

$$z^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{z^2} = \frac{c^2 - a^2}{a_1}.$$

Ist nun $a < b < c$, so sind die vier Schnittpunkte der Curve C mit $x = 0$ alle reell; ist $b < a < c$, so sind

1) Zwei andere Formen für die Faktoren erhält man durch cykl. Vertauschung von a, b, c und x, y, z.

zwei reell und zwei imaginär und wenn endlich $b < c < a$, so sind alle 4 Schnittpunkte imaginär. Von den Schnittpunkten auf $y = 0$ fallen zwei in die Ecke A des Coordinatendreiecks; die beiden andern sind reell, wenn der Bruch $\frac{c^2 - a^2}{a_1}$ positiv ist, hingegen imaginär, wenn negativ. Ersteres tritt ein, wenn $a_1 < 0$, also $a^2 > c^2$ ist, d. h. *wenn A ein stumpfer Winkel ist*, oder auch, wenn $a^2 < c^2$, also $a_1 > 0$ ist. Analog verhält es sich mit der Realität der Schnittpunkte auf $z = 0$. Wendet man eine ähnliche Discussion auch für $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{B^2}{2}$ und $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{C^2}{2}$ an, so erhält man folgendes Schema für $a < b < c$ und $\sphericalangle C < 90^\circ$:

λ	Reelle Schnittpunkte auf						Imaginäre Schnittpunkte auf		
	BC		CA		AB		BC	CA	AB
	G[1]	V[2]	G	V	G	V			
$-\operatorname{tg}\frac{A^2}{2}$	4	0	2	2	2	2	0	0	0
$-\operatorname{tg}\frac{B^2}{2}$	2	2	2	0	0	2	0	2	2
$-\operatorname{tg}\frac{C^2}{2}$	0	2	0	2	0	0	2	2	4

Hingegen für $a < b < c$ und $\sphericalangle C > 90^\circ$ erhält man:

λ	Reelle Schnittpunkte auf						Imaginäre Schnittpunkte auf		
	BC		CA		AB		BC	CA	AB
	G[1]	V[2]	G	V	G	V			
$-\operatorname{tg}\frac{A^2}{2}$	4	0	2	2	2	2	0	0	0
$-\operatorname{tg}\frac{B^2}{2}$	2	2	2	0	0	2	0	2	2
$-\operatorname{tg}\frac{C^2}{2}$	2	2	2	2	0	0	0	0	4

[1]) Getrennt.
[2]) Vereinigt.

Man kann sich nun leicht ein Bild von den verschiedenen Formen der Curven C machen. Für $\lambda = 1$ sind bloss vier Punkte der zugehörigen Curve C reell, die reellen Schnittpunkte der imaginären Kegelschnitte, in welche sie zerfällt. Lässt man λ abnehmen, so bilden sich um diese Punkte herum 4 Ovale, welche im Innern und den Scheitelräumen des durch g_1, g_2, g_3 gebildeten Dreiecks liegen. Dieselben dehnen sich aus und legen sich für $\lambda = 0$ an die Geraden g_0 g_1 g_2 g_3 an. Für negative Werthe von λ bilden sich dann 3 Ovale um die Ecken A, B, C herum, welche in den Nebenräumen des durch g_1, g_2, g_3 gebildeten Dreiecks liegen. Diese ziehn sich für abnehmende Werthe von λ mehr und mehr zusammen. Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, und $a < b < c$, so zieht sich für $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{A^2}{2}$ das Oval um A herum auf die Ecke A zusammen. Die Curve C hat dann in A einen isolirten Doppelpunkt. Für $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{B^2}{2}$ verschwindet auch das Oval um B herum und endlich für $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{C^2}{2}$ dasjenige um C herum. Von $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{C^2}{2}$ bis $\lambda = -1$ existiren keine reellen Punkte von C mehr. Ist hingegen das Dreieck ABC stumpfwinklig, also der Kreis f reell, so verschwinden für $a < b < c$ in gleicher Weise wie vorhin für $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{A^2}{2}$ und $\lambda = -\operatorname{tg}\frac{B^2}{2}$ die Ovale um A und B herum. Da aber $-\operatorname{tg}\frac{C^2}{2} < -1$ ist, so geschieht diess nicht auch mit demjenigen um C herum, sondern dasselbe umschliesst den Kreis f und kann sich daher nicht auf einen Punkt zusammenziehen. Hingegen bildet sich für $\lambda < -\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$ ein neues Oval, welches sich ausdehnt und sich von innen dem Kreise f

nähert. Für $\lambda = -1$ fallen dann die zwei Ovale mit f zusammen. In beiden Fällen geht durch jeden reellen Punkt der Ebene stets eine und nur eine Curve des Büschels, wie oben bemerkt wurde.

§ 4.

Wir gehen nun dazu über die Gleichungen der ausser den Geraden g_i noch möglichen Doppeltangenten von C abzuleiten. Zu diesem Zwecke betrachten wir C als die Enveloppe von folgenden Kegelschnittreihen:

$$\left.\begin{aligned} M &\equiv g_0 g_1 \cdot \mu^2 + 2\frac{f}{l}\cdot\mu + g_2 g_3 = 0;\\ N &\equiv g_0 g_2 \cdot \nu^2 + 2\frac{f}{l}\cdot\nu + g_1 g_3 = 0;\\ S &\equiv g_0 g_3 \cdot \sigma^2 + 2\frac{f}{l}\cdot\sigma + g_1 g_2 = 0;\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

wo

$$\Delta\cdot\frac{1+\lambda}{\sqrt{\lambda}} = l \qquad 7)$$

und μ, ν, σ variable Parameter sind. Für das Weitere führen wir Flächencoordinaten ein, setzen also:

$$ax = X,\ by = Y,\ cz = Z, \qquad 8)$$

dann wird

$$M \equiv A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{23}YZ = 0,$$

wo

$$A_{11} = -\mu^2 + 2\frac{a_1}{l}\cdot\mu + 1,\ A_{22} = \mu^2 + 2\frac{b_1}{l}\mu - 1,$$

$$A_{33} = \mu^2 + 2\frac{c_1}{l}\cdot\mu - 1,\ A_{23} = \mu^2 + 1 \quad \text{ist.}$$

Soll M in zwei lineare Faktoren zerfallen, so muss

$$D \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ sein.}$$

Diess ist der Fall, wenn entweder $A_{11} = 0$ ist oder $A_{22}, A_{33} - A_{23}^2 = 0$. Sieht man von den Wurzeln $\mu = 0$ und $\mu = \infty$ ab, so ergibt diess die beiden Gleichungen

$$\mu^2 - 2 \cdot \frac{a_1}{l} \cdot \mu - 1 = 0, \tag{9}$$

$$\mu^2 + 2 \cdot \frac{h_1}{(b_1 + c_1)\, l} \cdot \mu - 1 = 0, \tag{10}$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$b_1 c_1 - l^2 = h_1 \; ; \; c_1 a_1 - l^2 = h_2 \; ; \; a_1 b_1 - l^2 = h_3 . \tag{11}$$

Führt man dann weiter die Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{l^2 - 4\Delta^2} = k \; ; & \sqrt{k^2 + 4 b^2 c^2} = m \; ; \\ \sqrt{k^2 + 4c^2 a^2} = n \; ; & \sqrt{k^2 + 4 a^2 b^2} = p \text{ [1]} \end{array}\right\} \tag{12}$$

wobei für die Wurzeln das positive Vorzeichen genommen werden soll, so erhält man für die Wurzeln der Gleichungen 9) und 10) resp.:

$$\mu_1 = \frac{a_1 + m}{l} \; ; \; -\frac{1}{\mu_1} = -\frac{l}{a_1 + m} \; ; \tag{13}$$

$$\mu_2 = \frac{-h_1 + np}{(b_1 + c_1) l} \; ; \; -\frac{1}{\mu_2} = -\frac{(b_1 + c_1) l}{-h_1 + np} . \tag{14}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung $M = 0$ ein, so erhält man die Gleichungen von vier Doppeltangentenpaaren:

$$\left.\begin{array}{l} t_{11} \cdot t_{12} \equiv 4 \dfrac{\mu_1}{l} (r^2 Y^2 + b^2 Z^2 + m YZ); \\ t_{13} \cdot t_{14} \equiv -\dfrac{4}{\mu_1 l} (c^2 Y^2 + b^2 Z^2 - m\, YZ); \\ t_{15} \cdot t_{16} \equiv \dfrac{\mu_2}{a^2 l} (-k^2 X^2 + n^2 Y^2 + p^2 Z^2 + 2 np YZ); \\ t_{17} \cdot t_{18} \equiv \dfrac{1}{\mu_2 a^2 l} (k^2 X^2 - n^2 Y^2 - p^2 Z^2 + 2 np YZ), \end{array}\right\} \tag{15}$$

---

[1]) Zwischen diesen Grössen gelten z. B. folgende Relationen:
$m^2 - a_1^{\,2} = n^2 - b_1^{\,2} = p^2 - c_1^{\,2} = l^2$

so dass für

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{t}_{11} \equiv \sqrt{\frac{2\,(a_1+m}{l^2}}\left(\sqrt{\frac{c}{b}(m+k)}\cdot Y+\sqrt{\frac{b}{c}(m-k)}\cdot Z\right); \\
\mathfrak{t}_{12} \equiv \sqrt{\frac{2\,(a_1+m}{l^2}}\left(\sqrt{\frac{b}{c}(m+k)}\cdot Z+\sqrt{\frac{c}{b}(m-k)}\cdot Y\right); \\
\mathfrak{t}_{13} \equiv \sqrt{\frac{2}{a_1+m}}\left(\sqrt{\frac{c}{b}(m+k)}\cdot Y-\sqrt{\frac{b}{c}(m-k)}\cdot Z\right); \\
\mathfrak{t}_{14} \equiv \sqrt{\frac{2}{a_1+m}}\left(\sqrt{\frac{b}{c}(m+k)}\cdot Z-\sqrt{\frac{c}{b}(m-k)}\cdot Y\right); \\
\mathfrak{t}_{15} \equiv \sqrt{\frac{np-h_1}{2\,a^4l^2}}\left(kX+nY+pZ\right); \\
\mathfrak{t}_{16} \equiv \sqrt{\frac{np-h_1}{2\,a^4l^2}}\left(-kX+nY+pZ\right); \\
\mathfrak{t}_{17} \equiv \sqrt{\frac{2}{np-h_1}}\left(kX-nY+pZ\right); \\
\mathfrak{t}_{18} \equiv \sqrt{\frac{2}{np-h_1}}\left(kX+nY-pZ\right)
\end{array}\right\} \quad 15a)$$

$\mathfrak{t}_{11}=0$, $\mathfrak{t}_{12}=0 \ldots . \mathfrak{t}_{18}=0$ die Gleichungen von 8 Doppeltangenten von C sind. Die Gleichungen 15a) zeigen, dass die Doppeltangenten $\mathfrak{t}_{11}, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{14}$ durch die Ecke A des Coordinatendreiecks gehn, und zwar *sind* t_{11}, t_{13} *und* t_{12}, t_{14} *harmonisch zu den Seiten* AB *und* AC, *während* t_{11}, t_{12} *und* t_{13}, t_{14} *harmonisch sind zu den Halbirungslinien des Winkels* A. In der That, werden in 15) die Werthe für $\mathfrak{t}_{11} . \mathfrak{t}_{12}$ und $\mathfrak{t}_{13} . \mathfrak{t}_{14}$ symmetrische Funktionen in y und z, wenn die Substitutionen 8) angewendet werden, so dass also y mit z vertauscht werden kann, was den 2. Theil des Satzes beweist. *Ferner bilden die Doppeltangenten* $t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}$ *ein Vierseil, dessen Ecken paarweise auf die Seiten des Coordinatendreiseits fallen*, für welches also das letztere das Diagonaldreiseit ist. Die Gleichungen der aus den Reihen $N=0$ und $S=0$ sich ergebenden Doppeltangenten erhält man aus 15a) durch cykl. Vertauschung von X, Y, Z resp. a, b, c. Wir bezeichnen dieselben analog mit 15a) indem wir in t_{ik} die ersten Indices cykl. vertauschen, also setzen:

$$\left.\begin{aligned}
t_{21} &\equiv \sqrt{\frac{2\,(b_1+n)}{l^2}}\left(\sqrt{\frac{a}{c}(n+k)}\,.\,Z+\sqrt{\frac{c}{a}(n-k)}\,.\,X\right);\\
t_{22} &\equiv \sqrt{\frac{2\,(b_1+n)}{l^2}}\left(\sqrt{\frac{c}{a}(n+k)}\,.\,X+\sqrt{\frac{a}{c}(n-k)}\,.\,Z\right);\\
t_{23} &\equiv \sqrt{\frac{2}{b_1+n}}\left(\sqrt{\frac{a}{c}(n+k)}\,.\,Z-\sqrt{\frac{c}{a}(n-k)}\,.\,X\right);\\
t_{24} &\equiv \sqrt{\frac{2}{b_1+n}}\left(\sqrt{\frac{c}{a}(n+k)}\,.\,X-\sqrt{\frac{a}{c}(n-k)}\,.\,Z\right);\\
t_{25} &\equiv \sqrt{\frac{pm-h_2}{2\,b^4\,l^2}}\left(m\,X+k\,Y+p\,Z\right);\\
t_{26} &\equiv \sqrt{\frac{pm-h_2}{2\,b^4\,l^2}}\left(m\,X-k\,Y+p\,Z\right);\\
t_{27} &\equiv \sqrt{\frac{2}{pm-h_2}}\left(m\,X+k\,Y-p\,Z\right);\\
t_{28} &\equiv \sqrt{\frac{2}{pm-h_2}}\left(-mX+kY+pZ\right);
\end{aligned}\right\}\ 16)$$

$$\left.\begin{aligned}
t_{31} &\equiv \sqrt{\frac{2\,(c_1+p)}{l^2}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}(p+k)}\,.\,X+\sqrt{\frac{a}{b}(p-k)}\,.\,Y\right);\\
t_{32} &\equiv \sqrt{\frac{2\,(c_1+p)}{l^2}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}(p+k)}\,.\,Y+\sqrt{\frac{b}{a}(p-k)}\,.\,X\right);\\
t_{33} &\equiv \sqrt{\frac{2}{c_1+p}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}(p+k)}\;\;X-\sqrt{\frac{a}{b}(p-k)}\,.\,Y\right);\\
t_{34} &\equiv \sqrt{\frac{2}{c_1+p}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}(p+k)}\,.\,Y-\sqrt{\frac{b}{a}(p-k)}\,.\,X\right);\\
t_{35} &\equiv \sqrt{\frac{mn-h_3}{2\,c^4\,l^2}}\left(m\,X+n\,Y+k\,Z\right);\\
t_{36} &\equiv \sqrt{\frac{mn-h_3}{2\,c^4\,l^2}}\left(m\,X+n\,Y-k\,Z\right);\\
t_{37} &\equiv \sqrt{\frac{2}{mn-h_3}}\left(-m\,X+n\,Y+k\,Z\right);\\
t_{38} &\equiv \sqrt{\frac{2}{mn-h_3}}\left(m\,X-n\,Y+k\,Z\right).
\end{aligned}\right\}\ 17)$$

Die Anfangs gestellte Aufgabe ist damit gelöst. Die Realität der Doppeltangenten lässt sich leicht aus ihren Gleichungen entscheiden, und es ergibt sich daraus ein indirekter Beweis für die Richtigkeit der Diskussion der verschiedenen Formen, welche die Curven C des Büschels annehmen können.

Für *positive Werthe von* λ sind die Grössen k, l, m, n, p, sowie die Differenzen $(m-k)$, $(n-k)$, $(p-k)$, sämmtlich reell und positiv. *Folglich sind alle Doppeltangenten* t_{ik} *reell.*

Wird hingegen λ negativ, also z. B. $\lambda = -\lambda_1$, wo λ_1 zwischen 0 und $(+1)$ liegt, so erhält man:

$$l = \frac{1}{i} \cdot \frac{1-\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \Delta;\ k = \frac{1}{i} \cdot \frac{1+\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} \Delta;\ m = i.\Delta.\sqrt{\frac{(1+\lambda_1)^2}{\lambda_1} - 4 \operatorname{cosec} A^2};$$

$$n = i.\Delta.\sqrt{\frac{(1+\lambda_1)^2}{\lambda_1} - 4 \operatorname{cosec} B^2};\ p = i.\Delta.\sqrt{\frac{(1+\lambda_1)^2}{\lambda_1} - 4 \operatorname{cosec} C^2},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Ist λ_1 klein, so sind die Grössen m, n, p sämmtlich rein imaginär. Sie werden jedoch der Reihe nach wieder reell, sowie λ_1 die Grenzen

$$\operatorname{tg} \frac{A^2}{2},\quad \operatorname{tg} \frac{B^2}{2},\quad \operatorname{tg} \frac{C^2}{2}\ (A < B < C)$$

überschreitet. Die Grössen $\sqrt{m \pm k}$, $\sqrt{n \pm k}$, $\sqrt{p \pm k}$, welche in die Gleichungen der durch die Ecken des Coordinatendreiecks gehenden Doppeltangenten eingehen, sind imaginär, folglich sind diese letztern Doppeltangenten auch sämmtlich imaginär. Von den übrigen sind (weil Anfangs der Faktor $\frac{1}{i}$ sich aus sämmtlichen Gliedern weghebt) für $\lambda_1 < \operatorname{tg} \frac{A^2}{2}$ alle reell, für $\operatorname{tg} \frac{A^2}{2} < \lambda_1 < \operatorname{tg} \frac{B^2}{2}$ sind bloss noch die t_{1k} $(k = 5, 6, 7, 8)$ reell, und für $\operatorname{tg} \frac{B^2}{2} < \lambda_1 <$

$\operatorname{tg}\frac{C^2}{2}$ sind alle t_{ik} imaginär. Das Nämliche ergibt sich auch aus der Anschauung. Denn für $0 < \lambda < 1$ besteht die Curve C aus 4 aussereinander liegenden Ovalen, ergibt also mit den 4 idealen Doppeltangenten g_i

$$4 + 4 \cdot \frac{4.3}{1.2} = 28 \text{ reelle Doppeltangenten.}$$

Für $-\operatorname{tg}\frac{A^2}{2} < \lambda < 0$ besteht C aus 3 ausserhalb einander liegenden Ovalen, ergibt also

$$4 + 4 \cdot \frac{3.2}{1.2} = 16 \text{ reelle Doppeltangenten.}$$

Für $-\operatorname{tg}\frac{B^2}{2} < \lambda < -\operatorname{tg}\frac{A^2}{2}$ besteht C aus zwei ausser einander liegenden Ovalen, ergibt also

$$4 + 4 = 8 \text{ reelle Doppeltangenten.}$$

Und endlich für $-\operatorname{tg}\frac{C^2}{2} < \lambda < -\operatorname{tg}\frac{B^2}{2}$ besteht C entweder aus einem einzigen Oval, oder aus 2 sich umschliessenden Ovalen. Folglich sind nur noch die 4 idealen Doppeltangenten reell.

Setzt man speziell

a) $\lambda = 0$, so werden die Grössen k, l, m, n, p sämmtlich unendlich gross, ihre Verhältnisse hingegen gleich der Einheit, so dass also die Doppeltangenten:

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{t}_{22}, \mathfrak{t}_{24}, \mathfrak{t}_{31}, \mathfrak{t}_{33} & \text{mit} & X = 0; & \\
\mathfrak{t}_{32}, \mathfrak{t}_{34}, \mathfrak{t}_{11}, \mathfrak{t}_{13} & \text{„} & Y = 0; & \\
\mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{14}, \mathfrak{t}_{21}, \mathfrak{t}_{23} & \text{„} & Z = 0; & \\
\mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{25}, \mathfrak{t}_{35} & \text{mit} & g_0 \equiv X + Y + Z = 0; & \\
\mathfrak{t}_{16}, \mathfrak{t}_{28}, \mathfrak{t}_{37} & \text{„} & g_1 \equiv -X + Y + Z = 0; & \\
\mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{26}, \mathfrak{t}_{38} & \text{„} & g_2 \equiv X - Y + Z = 0; & \\
\mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{27}, \mathfrak{t}_{36} & \text{„} & g_3 \equiv X + Y - Z = 0 &
\end{array}$$

zusammenfallen. Wenn ferner

b) $\lambda = 1$ ist, so werden

$$k = 0,\ l = 2\varDelta,\ m = 2bc,\ n = 2ca,\ p = 2ab,$$

so dass die Doppeltangenten

$$\mathfrak{t}_{11},\ \mathfrak{t}_{12},\ \mathfrak{t}_{15},\ \mathfrak{t}_{16} \text{ mit } cY + bZ = 0,$$

$$\mathfrak{t}_{13},\ \mathfrak{t}_{14},\ \mathfrak{t}_{17},\ \mathfrak{t}_{18} \text{ „ } cY - bZ = 0 \text{ zusammenfallen,}$$

und analog die übrigen. Wir erhalten also folgenden Satz:

Die Curve der Mittelpunkte der einem gegebenen Dreiseit eingeschriebenen unter sich ähnlichen Kegelschnitte besitzt 28 reelle Doppeltangenten falls die Kegelschnitte Ellipsen sind. Davon sind 4 ideal, nämlich die unendlich ferne Gerade der Ebene und die Seiten des dem Tangentendreiseit parallel eingeschriebenen Dreiseits. Von den übrigen 24 gehn dreimal vier durch eine Ecke des Tangentendreiseits, wo sie zu zweien harmonisch sind, das eine Mal zu den Seiten, das andere Mal zu den Halbirungslinien der Winkel des Tangentendreiseits. Die übrigen bilden dreimal zu vieren Vierseite, für welche das Tangentendreiseit das Diagonaldreiseit ist. Sind hingegen die Kegelschnitte Hyperbeln, so hat die Curve ihrer Mittelpunkte ausser den 4 idealen Doppeltangenten noch 12, oder 4 oder 0 der zweiten Art.

§ 5.

Um den weitern Zusammenhang der Doppeltangenten von C zu untersuchen, gehn wir auf die Gl. 6) zurück. Zu jedem Parameter μ in der Reihe $M = 0$ gehört ein bestimmter Kegeschnitt, welcher C in vier Punkten berührt. Sind μ' und μ'' zwei verschiedene Werthe von μ, so hat man identisch

$$\left.\begin{array}{l}\left(g_0 g_1\,\mu'^2 + 2\,\frac{f}{l}\cdot\mu' + g_2 g_3\right)\cdot\left(g_0 g_1\,\mu''^2 + 2\,\frac{f}{l}\,\mu'' + g_2 g_3\right) - \\ -\left(g_0 g_1\,\mu'\mu'' + \frac{f}{l}\,(\mu' + \mu'') + g_2\,g_3\right)^2 = \left(\mu' - \mu''\right)^2\left(g_0 g_1 g_2 g_3 - \frac{f^2}{l^2}\right)\end{array}\right\} 18)$$

d. h. zwei beliebige Kegelschnitte der Reihe berühren C in 8 Punkten, die wieder auf einem Kegelschnitte liegen. Diese drei Kegelschnitte gehören mit den Fundamentalkegelschnitten der Reihe zum nämlichen Netz.

In jeder Reihe kommen 6 Paare von Doppeltangenten vor. Die Berührungspunkte von zwei beliebigen dieser Paare liegen also ebenfalls auf einem Kegelschnitt, was im Ganzen für die 6 Paare 15 verschiedene Kegelschnitte ergibt, *d. h. die 6 Doppeltangentenpaare einer Reihe bilden eine Steiner'sche Gruppe G.*[1]

Setzt man in 18) $\mu' = \mu_1$, $\mu'' = -\frac{1}{\mu_1}$, so wird:

$$\mathfrak{t}_{11}\,\mathfrak{t}_{12}\,\mathfrak{t}_{13}\,\mathfrak{t}_{14} - M_1{}^2 \equiv \left(\mu_1 + \frac{1}{\mu_1}\right)^2\cdot C\,,$$

$$\text{wo:}\quad M_1 \equiv \frac{2}{l^2}\left(m^2\,X^2 + h_3\,Y^2 + h_2\,Z^2\right)\,. \qquad 19)$$

Folglich lässt sich C auch als die Enveloppe von folgenden Kegelschnittreihen darstellen:

$$\left.\begin{array}{l} M \equiv \mathfrak{t}_{11}\,\mathfrak{t}_{12}\cdot\alpha^2 + 2\,M_1\cdot\alpha + \mathfrak{t}_{13}\,\mathfrak{t}_{14} = 0\,; \\ Q \equiv \mathfrak{t}_{11}\,\mathfrak{t}_{13}\cdot\beta^2 + 2\,M_1\cdot\beta + \mathfrak{t}_{12}\,\mathfrak{t}_{14} = 0\,; \\ R \equiv \mathfrak{t}_{11}\,\mathfrak{t}_{14}\cdot\gamma^2 + 2\,M_1\cdot\gamma + \mathfrak{t}_{12}\,\mathfrak{t}_{13} = 0\,, \end{array}\right\} \qquad 20)$$

wo α, β, γ variable Parameter sind. Wir wollen wieder

[1]) Crelle's Journal, t. 49 pag. 266.

die 6 Doppeltangentenpaare in jeder Gruppe bestimmen. Die erste Reihe $M = 0$ liefert natürlich wieder die Paare:

$$t_{11}\, t_{12},\ t_{13}\, t_{14},\ g_0 g_1,\ g_2 g_3,\ t_{15}\, t_{16},\ t_{17}\, t_{18}.$$

Ordnet man in $Q = 0$ nach Potenzen der Coordinaten, so wird:

$$Q \equiv 2 \cdot \frac{m^2 \beta}{l} X^2 + \left(\frac{c}{b}(m+k)\beta^2 + 2 \cdot \frac{h_3}{l} \cdot \beta - \frac{c}{b}(m-k)\right) Y^2 +$$

$$+ \left(-\frac{b}{c}(m-k)\beta^2 + 2 \cdot \frac{h_2}{l} \cdot \beta + \frac{b}{c}(m+k)\right) \cdot Z^2 = 0 \cdot$$

Da nur die Quadrate der Coordinaten vorkommen, so zerfällt Q in zwei Faktoren, wenn einer der Coefficienten verschwindet. Die Doppeltangentenpaare dieser Gruppe sind also harmonisch zu den Seiten des Coordinatendreiecks, folglich sind es die Paare:

$$t_{11}\, t_{13},\ t_{12}\, t_{14},\ t_{21}\, t_{23},\ t_{22}\, t_{24},\ t_{31}\, t_{33},\ t_{32}\, t_{34}. \qquad 21)$$

Ferner erhält man aus 20):

$$R \equiv \frac{2\, m^2 \gamma}{l} \cdot X^2 + \left(2\, c^2 \gamma^2 + 2\, \frac{h_3}{l} \cdot \gamma + 2\, c^2\right) Y^2 +$$

$$+ \left(2\, b^2 \gamma^2 + 2\, \frac{h_2}{l} \cdot \gamma - 2\, b^2\right) Z^2 + 2\, k\, (\gamma^2 + 1)\, Y Z = 0.$$

Ausser für die Werthe $\gamma = 0$ und $\gamma = \infty$ (welche die Paare $t_{12}\, t_{13}$, $t_{11}\, t_{14}$ liefern) zerfällt R in zwei Faktoren, wenn die Glieder in Y und Z ein vollständiges Quadrat bilden, d. h. wenn R die Form annimmt:

$$R \equiv \alpha_{11}{}^2 X^2 - (\beta_{11} Y + \gamma_{11} Z)^2 = (\alpha_{11} X + \beta_{11} Y + \gamma_{11} Z) \cdot (\alpha_{11} X - \beta_{11} Y - \gamma_{11} Z).$$

Die Bedingungsgleichung dafür ist vom 4. Grade in γ. Wir haben jedoch nicht nöthig dieselbe aufzulösen. In der That sieht man sofort ein, dass die Scheitel der gesuchten Paare sämmtlich auf der Geraden $X = 0$ liegen müssen, und da zwei Steiner'sche Gruppen G kein Paar gemein haben können ohne identisch zu werden, so können bloss die Paare:

$$t_{25}\,t_{28},\ t_{26}\,t_{27},\ t_{35}\,t_{37},\ t_{36}\,t_{38}$$

die gesuchten sein, so dass die Gruppe dieser Reihe also aus den Paaren besteht:

$$t_{11}\,t_{14},\ t_{12}\,t_{13},\ t_{25}\,t_{28},\ t_{26}\,t_{27},\ t_{35}\,t_{37},\ t_{36}\,t_{38}. \tag{22}$$

Durch cykl. Vertauschung der ersten Indices erhält man die weitern Gruppen:

$$\left.\begin{array}{l} t_{21}\,t_{24},\ t_{22}\,t_{23},\ t_{35}\,t_{38},\ t_{36}\,t_{37},\ t_{15}\,t_{17},\ t_{16}\,t_{18};\\ t_{31}\,t_{34},\ t_{32}\,t_{33},\ t_{15}\,t_{18},\ t_{16}\,t_{17},\ t_{25}\,t_{27},\ t_{26}\,t_{28}. \end{array}\right\} \tag{22a}$$

Die 7 bis jetzt gefundenen Gruppen gehören zu je dreien einem Steiner'schen Systeme S_1 an, so zwar, dass zwei beliebig gewählt werden können, und die dritte durch sie bestimmt ist. Solcher Systeme S_1 erhält man 7 auf diese Weise.

Um weitere Gruppirungen zu erhalten, setzen wir weiter in 18) $\mu' = \infty$, $\mu'' = \mu_2$. Dann wird, nachdem man durch μ' wegdividirt hat:

$$g_0\,g_1\,t_{15}\,t_{16} - \left(g_0\,g_1\,\mu_2 + \frac{f}{l}\right)^2 \equiv g_0\,g_1\,g_2\,g_3 - \frac{f^2}{l^2} \equiv C\,.$$

So dass also C die Enveloppe ist der Reihen:

$$\left.\begin{array}{l} M \equiv g_0\,g_1\,\alpha^2 + 2\cdot\left(g_0\,g_1\,\mu_2 + \frac{f}{l}\right)\alpha + t_{15}\,t_{16} = 0;\\ U \equiv g_0\,t_{15}\,\beta^2 + 2\cdot\left(g_0\,g_1\,\mu_2 + \frac{f}{l}\right)\beta + g_1\,t_{16} = 0;\\ V \equiv g_0\,t_{16}\,\gamma^2 + 2\cdot\left(g_0\,g_1\,\mu_2 + \frac{f}{l}\right)\gamma + g_1\,t_{15} = 0, \end{array}\right\} \tag{23}$$

wo natürlich die variablen Parameter α, β, γ von denen in der Gl. 20) verschieden sind. Die Reihe $M = 0$ liefert eine schon bekannte Gruppe G. Ordnet man $U = 0$ nach Potenzen der Veränderlichen, so wird:

$$\left.\begin{aligned} U \equiv (a_{11}(\beta^2+1)+b_{11}\beta)\,X^2 + (a_{22}(\beta^2+1)+b_{22}\beta)\,Y^2 + \\ + (a_{33}(\beta^2+1)+b_{33}\beta)\,Z^2 + 2.(a_{23}(\beta^2+1)+b_{23}\beta)\,YZ + \\ + 2\,a_{31}(\beta^2-1)\,ZX + 2\,a_{12}(\beta^2-1)\,XY = 0\,, \end{aligned}\right\} 23_{a})$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$a_{11} = \frac{k}{a}\cdot\sqrt{\frac{\mu_2}{l}},\quad a_{22} = \frac{n}{a}\cdot\sqrt{\frac{\mu_2}{l}},\quad a_{33} = \frac{p}{a}\cdot\sqrt{\frac{\mu_2}{l}}\,,$$

$$b_{11} = -\frac{k^2+np}{a^2\,l},\quad b_{22} = \frac{n\,(n+p)}{a^2\,l},\quad b_{33} = \frac{p\,(n+p)}{a^2\,l}$$

$$a_{23} = \frac{n+p}{2\,a}\cdot\sqrt{\frac{\mu_2}{l}},\quad a_{31} = \frac{p+k}{2\,a}\cdot\sqrt{\frac{\mu_2}{l}},\quad a_{12} = \frac{k+n}{2\,a}\cdot\sqrt{\frac{\mu_2}{l}},$$

$$b_{23} = 2\,\mu_2.$$

Soll nun U in zwei Faktoren zerfallen, so muss:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\beta^2+1)+b_{11}\beta, & a_{12}(\beta^2-1) & a_{31}(\beta^2-1) \\ a_{12}(\beta^2-1), & a_{22}(\beta^2+1)+b_{22}\beta, & a_{23}(\beta^2+1)+b_{23}\beta \\ a_{31}(\beta^2-1), & a_{23}(\beta^2+1)+b_{23}\beta, & a_{33}(\beta^2+1)+b_{33}\beta \end{vmatrix} = 0 \text{ sein. } \quad 24)$$

Dividirt man jede Zeile durch β und rechnet nachher aus, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$\varphi\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2\varphi_1\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=0$$

wo φ und φ_1 ganze Funktionen sind; d. h. die Gleichung wird reciprok vom vierten Grade. Die Wurzeln derselben mögen sein

$$\beta_1,\quad \frac{1}{\beta_1},\quad \beta_2,\quad \frac{1}{\beta_2}\,. \qquad 24_{a})$$

Ist dann $\mathfrak{t}_i\,\mathfrak{t}_k$ das zu β_1, $\mathfrak{t}_l\,\mathfrak{t}_m$ hingegen das zu $\frac{1}{\beta_1}$ gehörige Doppeltangentenpaar in der Reihe U, so hat man aus 23):

$$\mathfrak{t}_i\,\mathfrak{t}_k \equiv g_0\,\mathfrak{t}_{15}\cdot\beta_1^2 + 2\cdot\left(g_0 g_1\,\mu_2 + \frac{f}{l}\right)\cdot\beta_1 + g_1\,\mathfrak{t}_{16},$$

$$\beta_1^2\cdot\mathfrak{t}_l\,\mathfrak{t}_m \equiv g_0\,\mathfrak{t}_{15} + 2\left(g_0 g_1\,\mu_2 + \frac{f}{l}\right)\cdot\beta_1 + g_1\,\mathfrak{t}_{16}\cdot\beta_1^2.$$

Also wird:

$$\mathfrak{t}_i\,\mathfrak{t}_k - \beta_1^2\cdot\mathfrak{t}_l\,\mathfrak{t}_m \equiv (\beta_1^2 - 1)\,(g_0\,\mathfrak{t}_{15} - g_1\,\mathfrak{t}_{16}).$$

Oder:

$$\mathfrak{t}_i\,\mathfrak{t}_k - \beta_1^2\,\mathfrak{t}_l\,\mathfrak{t}_m \equiv 2\cdot\frac{\beta^2-1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\mu_2}{l}}\cdot X\cdot\Big((n+k)Y + (p+k)Z\Big). \tag{26}$$

Das Analoge erhält man für die Wurzeln β_2, $\frac{1}{\beta_2}$. Es folgt daraus, dass das Vierseit der Doppeltangentenpaare $\mathfrak{t}_i\,\mathfrak{t}_k$ und $\mathfrak{t}_l\,\mathfrak{t}_m$ die Diagonalen

$$X = 0 \quad\text{und}\quad (n+k)\,Y + (p+k)\,Z = 0 \quad\text{hat.}$$

Diese Bemerkung genügt nun, ohne dass die Gl. 25) aufgelöst werden müssen, die Paare der Gruppe aus $U = 0$ zu bestimmen. Betrachtet man nämlich die Gleichungen:

$$\mathfrak{t}_{25} = 0 = mX + kY + pZ;$$
$$\mathfrak{t}_{37} = 0 = -\,mX + nY + kZ,$$

so folgt durch Addition:

$$(n+k)\,Y + (p+k)\,Z = 0.$$

Das Gleiche ergibt sich durch Addition der Gleichungen

$$\mathfrak{t}_{28} = 0 = -\,mX + kY + pZ;$$
$$\mathfrak{t}_{35} = 0 = mX + nY + kZ.$$

Subtrahirt man hingegen $\mathfrak{t}_{28} = 0$ von $\mathfrak{t}_{25} = 0$ oder

$t_{37} = 0$ von $t_{35} = 0$, so erhält man beide Mal als Resultat $X = 0$, d. h. *das Vierseit der Paare* $t_{25} t_{35}$, $t_{28} t_{37}$ *hat die Diagonalen* $X = 0$ *und* $(n+k)\, Y + (p+k)\, Z = 0$.

Nimmt man ferner:

$$t_{22} = 0 = \sqrt{\frac{c}{a} \cdot (n+k)} \cdot X + \sqrt{\frac{a}{c}\, (n-k)} \cdot Z;$$

$$t_{33} = 0 = \sqrt{\frac{b}{a}\, (p+k)} \cdot X - \sqrt{\frac{a}{b}\, (p-k)} \cdot Y;$$

multiplizirt dann die erste Gleichung mit $\sqrt{\frac{b}{a}\,(p+k)}$, die zweite mit $-\sqrt{\frac{c}{a}\,(n+k)}$ und addirt, so erhält man:

$$\sqrt{\frac{c}{b}\,(n+k)(p-k)} \cdot Y + \sqrt{\frac{b}{c}\,(n-k)(p+k)} \cdot Z = 0,$$

oder auch, wenn man mit $\sqrt{(n+k)(p+k)}$ multiplicirt und bemerkt, dass

$$n^2 - k^2 = 4\, a^2 c^2, \quad p^2 - k^2 = 4\, a^2 b^2$$

ist, und dann durch $2\, a \cdot \sqrt{bc}$ dividirt:

$$(n+k)\, Y + (p+k)\, Z = 0.$$

Verfährt man auf gleiche Weise mit den Gl.

$$t_{24} = 0 = \sqrt{\frac{c}{a}\,(n+k)} \cdot X - \sqrt{\frac{a}{c}\,(n-k)} \cdot Z;$$

$$t_{31} = 0 = \sqrt{\frac{b}{a}\,(p+k)}\ X = \sqrt{\frac{a}{b}\,(p-k)} \cdot Y,$$

so ergibt sich das gleiche Resultat. Da sich nun t_{22} und t_{24}, sowie t_{31} und t_{33} auf $X = 0$ schneiden, so folgt:

Das Vierseit der Paare $t_{22}\, t_{31}$, $t_{24}\, t_{33}$ *hat die Diagonalen* $X = 0$ *und* $(n+k)\, Y + (p+k)\, Z = 0$.

Folglich besteht die Gruppe G der Reihe $R = 0$ aus den Paaren:

$$g_0\, t_{15},\ g_1\, t_{16},\ t_{22}\, t_{31},\ t_{24}\, t_{33},\ t_{25}\, t_{35},\ t_{28}\, t_{37}\,. \tag{27}$$

Auf analoge Weise findet man die aus der Reihe $V = 0$ sich ergebende Gruppe der Paare:

$$g_0\, t_{16},\ g_1\, t_{15},\ t_{21}\, t_{32},\ t_{23}\, t_{34},\ t_{26}\, t_{36},\ t_{27}\, t_{38} \tag{28}$$

vermittelst der Diagonalen:

$$X = 0 \quad \text{und} \quad (n-k)\, Y + (p-k)\, Z = 0\,.$$

Substituirt man weiter in 18) $\mu' = \infty$, $\mu'' = -\dfrac{1}{\mu_2}$ oder $\mu' = 0$, $\mu'' = \mu_2$ oder endlich $\mu' = 0$, $\mu'' = -\dfrac{1}{\mu_2}$, so erhält man C als Enveloppe von 6 weitern Kegelschnittreihen. Die Gleichungen zur Bestimmung der Doppeltangentenpaare in diesen Reihen werden ähnlich wie 24) reciprok vom 4. Grade. Die weitere Rechnung ist von der eben durchgeführten nicht wesentlich verschieden, wesshalb bloss die Resultate angegeben werden sollen. Man erhält für

$$\mu' = \infty,\ \mu'' = -\frac{1}{\mu_2} \text{ die Gruppen:}$$

$$\left.\begin{array}{l}
g_0\, t_{17},\ g_1\, t_{18},\ t_{21}\, t_{33},\ t_{23}\, t_{31},\ t_{25}\, t_{38},\ t_{28}\, t_{36}\,.\\
g_0\, t_{18},\ g_1\, t_{17},\ t_{22}\, t_{34},\ t_{24}\, t_{32},\ t_{26}\, t_{37},\ t_{27}\, t_{35}\,.\\
\qquad \text{Für } \mu' = 0,\ \mu'' = \mu_2:\\
g_2\, t_{15},\ g_3\, t_{16},\ t_{21}\, t_{31},\ t_{23}\, t_{33},\ t_{26}\, t_{35},\ t_{27}\, t_{37}\,.\\
g_2\, t_{16},\ g_3\, t_{15},\ t_{22}\, t_{32},\ t_{24}\, t_{34},\ t_{28}\, t_{38},\ t_{25}\, t_{36}\,.\\
\qquad \text{Für } \mu' = 0,\ \mu'' = -\dfrac{1}{\mu_2}:\\
g_2\, t_{17},\ g_3\, t_{18},\ t_{22}\, t_{33},\ t_{24}\, t_{31},\ t_{26}\, t_{38},\ t_{27}\, t_{36}\,.\\
g_2\, t_{18},\ g_3\, t_{17},\ t_{21}\, t_{34},\ t_{23}\, t_{32},\ t_{25}\, t_{37},\ t_{28}\, t_{35}\,.
\end{array}\right\} \tag{29}$$

Endlich erhält man 16 weitere Gruppen durch cykl. Vertauschung der ersten Indices. In dieser Weise kann man nun fortfahren, C als Enveloppe von andern und andern Kegelschnittreihen darzustellen. Jede derselben liefert Paare einer neuen Steiner'schen Gruppe G, deren es bekanntlich im Ganzen 63 gibt.

Unter Benützung des bisher Gefundenen lässt sich indessen das Ziel auf einem kürzern Wege erreichen, indem man die Doppeltangenten nach dem von Hesse angegebenen und von H. Cayley [1]) eingehend discutirten Algorithmus bezeichnet. Dieser besteht kurz in Folgendem: Die Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung entsprechen den Verbindungslinien von 8 Schnittpunkten 1, 2, . . . 8 dreier Flächen zweiter Ordnung. Wir bezeichnen sie desshalb durch die Symbole 12, 13, . . . 78. Die Doppeltangentenpaare einer Steiner'schen Gruppe entsprechen dann entweder den Paaren von gegenüberliegenden Kanten in zwei Tetraedern, die sämmtliche 8 Punkte enthalten, oder den Paaren von Verbindungslinien von zweien der Punkte mit den 6 übrigen. Im ersten Fall wird also die Gruppe G durch ein Symbol von der Form

$$(1234 \cdot 5678) \equiv 12{,}34 \ ; \ 13{,}24 \ ; \ 14{,}23 \ ; \ 56{,}78 \ ; \ 57{,}68 \ ; \ 58{,}67 \ ;$$

im 2. hingegen durch ein Symbol von der Form

$$(12 \cdot 345678) \equiv 13{,}23 \ ; \ 14{,}24 \ ; \ 15{,}25 \ ; \ 16{,}26 \ ; \ 17{,}27 \ ; \ 18{,}28$$

bezeichnet. Von der ersten Art erhält man 35, von der zweiten 28, zusammen also die Gesammtzahl 63. Geometrisch unterscheiden sich diese Gruppen nicht.

[1]) Crelle's Journal t. 68. pag. 176. Vergl. auch Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven, 2. Aufl. pag. 285 und 286.

Mit Benützung der schon angegebenen Gruppirungen ergeben sich z. B. für die Doppeltangenten von C folgende Symbole:

$$\left.\begin{array}{llll}
g_0 = 13\,, & \mathfrak{t}_{11} = 12\,, & \mathfrak{t}_{21} = 15\,, & \mathfrak{t}_{31} = 16 \\
g_1 = 24\,, & \mathfrak{t}_{12} = 34\,, & \mathfrak{t}_{22} = 37\,, & \mathfrak{t}_{32} = 38 \\
g_2 = 57\,, & \mathfrak{t}_{13} = 56\,, & \mathfrak{t}_{23} = 26\,, & \mathfrak{t}_{33} = 25 \\
g_3 = 68\,, & \mathfrak{t}_{14} = 78\,, & \mathfrak{t}_{24} = 48\,, & \mathfrak{t}_{34} = 47 \\
 & \mathfrak{t}_{15} = 67\,, & \mathfrak{t}_{25} = 28\,, & \mathfrak{t}_{35} = 45 \\
 & \mathfrak{t}_{16} = 58\,, & \mathfrak{t}_{26} = 46\,, & \mathfrak{t}_{36} = 27 \\
 & \mathfrak{t}_{17} = 23\,, & \mathfrak{t}_{27} = 35\,, & \mathfrak{t}_{37} = 36 \\
 & \mathfrak{t}_{18} = 14\,, & \mathfrak{t}_{28} = 17\,, & \mathfrak{t}_{38} = 18
\end{array}\right\} \tag{30}$$

Ein beliebiges Paar bestimmt nun stets eine Gruppe G von der ersten oder zweiten Art der Bezeichnung, je nachdem die entsprechenden Geraden im Raume 4 oder 3 Punkte enthalten. Suchen wir z. B. die Gruppe auf, zu welcher das Paar $g_0\, \mathfrak{t}_{11} = 13, 12$ gehört, so ist diese offenbar gegeben durch das Symbol (23 . 145678) und enthält demnach die Paare:

$$g_0\, \mathfrak{t}_{11}\,,\; g_1\, \mathfrak{t}_{12}\,,\; \mathfrak{t}_{22}\, \mathfrak{t}_{36}\,,\; \mathfrak{t}_{23}\, \mathfrak{t}_{37}\,,\; \mathfrak{t}_{25}\, \mathfrak{t}_{32}\,,\; \mathfrak{t}_{27}\, \mathfrak{t}_{33}\,.$$

Durch cykl. Vertauschung der ersten Indices ergeben sich daraus die weitern Gruppen:

$$g_0\, \mathfrak{t}_{21}\,,\; g_2\, \mathfrak{t}_{22}\,,\; \mathfrak{t}_{32}\, \mathfrak{t}_{16}\,,\; \mathfrak{t}_{33}\, \mathfrak{t}_{17}\,,\; \mathfrak{t}_{35}\, \mathfrak{t}_{12}\,,\; \mathfrak{t}_{37}\, \mathfrak{t}_{13}$$

$$g_0\, \mathfrak{t}_{31}\,,\; g_3\, \mathfrak{t}_{32}\,,\; \mathfrak{t}_{12}\, \mathfrak{t}_{26}\,,\; \mathfrak{t}_{13}\, \mathfrak{t}_{27}\,,\; \mathfrak{t}_{15}\, \mathfrak{t}_{22}\,,\; \mathfrak{t}_{17}\, \mathfrak{t}_{23}$$

denen die resp. Symbole (35 . 124678) und (36 . 124578) entsprechen. Ob man also von einer bekannten Gruppe ausgehend die ersten Indices cykl. vertauscht oder den gefundenen Algorithmus direkt anwendet, in beiden Fällen ergeben sich die nämlichen Resultate. Damit ist die Anwendbarkeit der Hesse'schen Bezeichnung evident. Da Herr Cayley, wie schon bemerkt, dieselbe eingehend discutirt hat, so gehen wir auf die weitern Combinationen der Doppeltangenten nach ihrer gegenseitigen Lage und derjenigen ihrer Berührungspunkte nicht weiter ein.

§ 6.

Steiner hat auf zwei Curven dritter Ordnung und dritter Klasse aufmerksam gemacht, die zu den Doppeltangenten einer Gruppe G in inniger Beziehung stehn. Die erste (G_3) geht durch die Diagonalpunkte der Vierecke, welche durch die Berührungspunkte der Paare einer Gruppe gebildet werden. Sie ist die Hesse'sche Curve des Kegelschnittnetzes, zu welchem sämmtliche 6 Paare der Gruppe nebst den 15 Kegelschnitten durch die Berührungspunkte von je zwei Paaren gehören. Die zweite (K_3) berührt die Seiten der erwähnten Vierecke und ist die Cayley'sche Curve des Netzes. Aus den Gleichungen von irgend drei Paaren einer Gruppe G lassen sich also die Gleichungen von G_3 und K_3 ableiten. Sind nämlich $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ die Gleichungen von irgend drei Kegelschnitten des Netzes, und sind U_1, U_2, U_3 etc. die Ableitungen von U etc. nach den drei Coordinaten, so ist:

$$G_3 \equiv \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Curve G_3. Die Gleichung von K_3 erhält man, indem man die Bedingung aufstellt, dass eine Gerade g von der Gleichung

$$u X + v Y + w Z = 0$$

die Kegelschnitte $U=0$, $V=0$, $W=0$ etc. des Netzes in Punktepaaren einer Involution schneidet.

Wählen wir z. B. die Gruppe:

$$g_0 g_1 \ , \ g_2 g_3 \ , \ \mathfrak{t}_{11} \mathfrak{t}_{12} \ , \ \mathfrak{t}_{13} \mathfrak{t}_{14} \ , \ \mathfrak{t}_{15} \mathfrak{t}_{16} \ , \ \mathfrak{t}_{17} \mathfrak{t}_{18} \ ,$$

so ist z. B.

$$g_0 g_1 = 0 = - X^2 + Y^2 + 2\,YZ + Z^2;$$

$$\mathfrak{t}_{11}\mathfrak{t}_{12} = 0 = c^2 Y^2 + mYZ + b^2 Z^2;$$

$$\mathfrak{t}_{13}\mathfrak{t}_{14} = 0 = c^2 Y^2 - mYZ + b^2 Z^2.$$

Also wird:

$$G_3 = 0 = \begin{vmatrix} -2X, & 2(Y+Z) & , 2(Y+Z) \\ 0 & , 2c^2 Y + mZ & , mY + 2b^2 Z \\ 0 & , 2c^2 Y - mZ & , -mY + 2b^2 Z \end{vmatrix}$$

Oder:

$$G_3 = 0 = X \cdot (cY + bZ) \cdot (cY - bZ) \qquad 31)$$

d. h. G_3 zerfällt in die Seite $X=0$ des Coordinatendreiecks und in die beiden Halbirungslinien des gegenüberliegenden Winkels.

Bestimmt man ferner, um die Gleichung von K_3 zu erhalten, aus

$$uX + vY + wZ \quad 0$$

$$X = - \frac{vY + wZ}{u}$$

und setzt diesen Werth in die Gleichungen der obigen Paare ein, so erhält man für die Schnittpunktepaare der Geraden mit den Paaren $g_0 g_1$, $\mathfrak{t}_{11} \mathfrak{t}_{12}$, $\mathfrak{t}_{13} \mathfrak{t}_{14}$:

$$(u^2 - v^2)\, Y^2 + 2 \cdot (u^2 - vw)\, YZ = (u^2 - w^2)\, Z^2 = 0;$$

$$c^2 u^2 \ Y^2 + m u^2 \cdot YZ + b^2 u^2 Z^2 = 0;$$

$$c^2 u^2 \ Y^2 - m u^2 \cdot YZ + b^2 u^2 Z^2 = 0.$$

Sollen die drei Schnittpunktepaare eine Involution bilden, so muss

$$\begin{vmatrix} u^2-v^2 , & 2(u^2-vw) , & u^2-w^2 \\ c^2u^2 , & mu^2 , & b^2u^2 \\ c^2u^2 , & -mu^2 , & b^2u^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ sein.}$$

Oder nachdem man durch den fremden Faktor u^3 wegdividirt hat, findet man die Gleichung für K_3:

$$K_3 = 0 = u \cdot \left[(b^2-c^2)u^2 - b^2v^2 + c^2w^2\right] = 0; \qquad 32)$$

d. h. K_3 zerfällt in die Ecke $u = 0$ des Coordinatendreiecks und in einen Kegelschnitt, der das Coordinatendreieck zum Tripel hat. Die Gleichung dieses Kegelschnittes lautet in Punktcoordinaten

$$b^2c^2X^2 - (b^2-c^2)\cdot(cY+bZ)\cdot(cY-bZ) = 0. \quad 32a)$$

Er berührt also die Halbirungslinien des Winkels A des Coordinatendreiecks in ihren Schnittpunkten mit der Seite BC desselben[1]). Da der Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade g_0 zur Tangente hat, so ist er also eine Parabel, deren Leitlinie durch A geht (denn in A schneiden sich zwei senkrechte Tangenten) und deren Brennpunkt im Höhenfusspunkt auf der Seite BC des Coordinatendreiecks liegt, und welche die Geraden g_1, g_2, g_3 zu Tangenten hat. Analoge Resultate ergeben sich für die Gruppen der Paare $g_0 g_2$ und $g_0 g_3$. Lässt man den Werth von λ variiren, so sind demnach alle Doppeltangenten der zugehörigen Curven C entweder Tangenten der Kegelschnitte

$$(b^2-c^2)\,u^2 - b^2v^2 + c^2w^2 = 0;$$
$$(c^2-a^2)\,v^2 - c^2w^2 + a^2u^2 = 0;$$
$$(a^2-b^2)\,w^2 - a^2u^2 + b^2v^2 = 0;$$

---

[1]) Bekanntlich berühren sich im Allgemeinen die Curven G_3 und K_3 in 9 Punkten.

oder sie gehn durch eine der Ecken $u=0$, $v=0$, $w=0$ des Coordinatendreiecks. Man hat also den Satz:

Die Doppeltangenten aller Curven C von der Gl. 5) umhüllen bei veränderlichem λ eine Curve 9^{ter} Klasse. Dieselbe zerfällt in drei Punkte und drei Kegelschnitte, nämlich in die Ecken des Coordinatendreiecks und in drei Parabeln, welche die Seiten des dem Coordinatendreieck parallel eingeschriebenen Dreiecks berühren, und welche die Fusspunkte der drei Höhen des Fundamentaldreiecks zu ihren resp. Brennpunkten haben [1].

Irgend eine Tangente dieser Curve 9. Klasse kann als Doppeltangente einer durch sie eindeutig bestimmten Curve C des Büschels gewählt werden. Die übrigen Doppeltangenten von C lassen sich dann, wie wir später zeigen werden, nebst ihren Berührungspunkten vermittelst Zirkel und Lineal construiren.

Wir erhalten ferner für die Gruppe der Paare $\mathfrak{t}_{11}\ \mathfrak{t}_{14}$, $\mathfrak{t}_{12}\ \mathfrak{t}_{13}$:

$$\left.\begin{aligned} G_3 &= 0 = X\cdot(cY+ibZ)\,(cY-ibZ)\ ,\ i=\sqrt{-1} \\ K_3 &= 0 = u\left[\left((b^2+c^2)k^2+4a^2b^2c^2\right)u^2 - m^2(b^2v^2+c^2w^2)\right] \end{aligned}\right\}\quad 33)$$

d. h. G_3 zerfällt in die Seite $X=0$ und zwei imaginäre

[1]) Bekanntlich geht der einem Dreiseit von Parabeltangenten umschriebene Kreis durch den Brennpunkt. Wendet man diess auf das Dreiseit g_1, g_2, g_3 an, so folgt der bekannte Satz: *In einem Dreieck liegen die Fusspunkte der drei Höhen und die Mitten der Seiten in einem und demselben Kreise.* Da ferner die Scheiteltangente einer Parabel der Ort ist für die Fusspunkte der Senkrechten aus dem Brennpunkte auf die Tangenten, so folgt: *In einem Dreieck liegen die Fusspunkte der Senkrechten von einem Höhenfusspunkt auf die Halbirungslinien des gegenüberliegenden Winkels und auf die Verbindungslinien der Seitenmitten in einer und derselben Geraden.*

Geraden aus der gegenüberliegenden Ecke des Coordinatendreiecks. K_3 hingegen zerfällt in die Ecke $u = 0$ des Fundamentaldreiecks und in einem Kegelschnitt, welcher dieses zum Tripel harmonischer Pole besitzt. Analoge Resultate erhält man für die Gruppen der Paare $t_{21}\, t_{24}$ und $t_{31}\, t_{34}$.

Endlich erhält man für die Gruppen des Paares $t_{11}\, t_{13}$:

$$\left.\begin{array}{l} G_3 = 0 = X \cdot Y \cdot Z; \\ K_3 = 0 = u \cdot v \cdot w; \end{array}\right\} \qquad 34)$$

d. h. die Curve G_3 zerfällt in drei Gerade, die Seiten des Fundamentaldreiecks, und K_3 zerfällt in drei Punkte, die Ecken des Fundamentaldreiecks. Für die übrigen Gruppen ergibt sich nichts Besonderes. Wir erhalten also den Satz:

Von den 63 Curven G_3 zerfallen 7 in je drei Gerade, und zwar drei derselben je in eine Seite des Tangentendreiseits der ähnlichen Kegelschnitte und die Halbirungslinien des gegenüberliegenden Winkels; drei in eine Seite und zwei imaginäre Geraden durch die gegenüberliegende Ecke, und endlich eine in drei Seiten des Tangentendreiseits. Von den 63 Curven K_3 zerfallen 6 in Punkt und Kegelschnitt, nämlich je in eine Ecke des Tangentendreiseits und einen Kegelschnitt, welcher das Dreiseit zum Tripel hat. Die Tangenten aus der Ecke an die Kegelschnitte bilden nebst der resp. Berührungssehne die zu K_3 zugeordnete Curve G_3. Endlich zerfällt eine der Curven K_3 in 3 Punkte, die Ecken des Tangentendreiseits.

§ 7.

Jede Curve vierter Ordnung lässt, wie Hesse gezeigt hat, 63 Systeme von Berührungscurven zweiter und 64

Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung zu. Es soll noch kurz angegeben werden, wie die Gleichungen derselben im vorliegenden Falle aufgestellt werden können. Da die Berührungspunkte von zwei Doppeltangentenpaaren einer Gruppe G auf einem Kegelschnitte liegen, so lässt sich stets eine Funktion K zweiter Ordnung in den Coordinaten eindeutig so bestimmen, dass für $t_1 \,.\, t_2 = 0$ und $t_3 \,.\, t_4 = 0$ als den Gleichungen von zwei Paaren einer Gruppe C identisch gilt:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 - K^2 = \varrho \cdot C \tag{35}$$

wo ϱ eine Constante ist. Es ist dann für τ als variabeln Parameter,

$$t_1\, t_2\, \tau^2 + 2\, K \cdot \tau + t_3\, t_4 = 0 \tag{36}$$

die Gleichung eines Systems von Berührungskegelschnitten, zu welchem auch die 4 übrigen Paare der Gruppe G gehören. Zu jeder Gruppe G gehört also ein bestimmtes System. In jedem derselben gibt es 12 Kegelschnitte, welche die Curve C in einem Punkte P vierpunktig und in zwei andern Q, R zweipunktig berühren. Die Punkte P sind die Schnittpunkte von C mit G_3. Solche Punkte P sind also z. B. die Schnittpunkte von C mit den Seiten uud den Halbirungslinien der Winkel des Coordinatendreiecks.

Aus Gl. 35) folgt ferner identisch:

$$t_1\,(t_2 t_3 t_4 - 2K \,.\, s + t_1\, s^2) - (K - t_1\, s)^2 \equiv t_1 t_2 t_3 t_4 - K^2 \equiv \varrho C. \tag{37}$$

Ist dann s ein linearer Ausdruck in den Coordinaten, so ist

$$t_2\, t_3\, t_4 - 2\, Ks + t_1\, s^2 = 0 \tag{38}$$

die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, welche die Curve C nebst der Doppeltangente t_1 in den Punkten berührt, in welchen sie von dem Kegelschnitte

$$K - \mathfrak{t}_1 \cdot s = 0 \tag{39}$$

geschnitten wird. Da s drei willkürliche Constanten enthält, so ergibt sich durch Variation derselben aus 38) die Gleichung eines dreifach unendlichen Systems von Berührungscurven dritter Ordnung, welche nach 39) der Doppeltangente $\mathfrak{t}_1$ in der Art zugeordnet sind, dass ein beliebiger Kegelschnitt durch die Berührungspunkte von $\mathfrak{t}_1$ die Curve C in 6 Punkten schneidet, in welchen sie von einer Curve des Systems 38) berührt wird.

Solcher Systeme gibt es also 28. Wählt man speziell g_0 als charakterisirende Doppeltangente, so werden die Kegelschnitte 39) zu *Kreisen*. Also: *Irgend ein Kreis schneidet die Curve C ausser in den unendlich fernen Kreispunkten in sechs weitern Punkten, in welchen sie von einer bestimmten Curve dritter Ordnung berührt wird.*

Um auf andere Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung zu kommen, setzen wir in 18) $\mu' = 0$, $\mu'' = \mu_1$, dann wird:

$$g_2\, g_3\, \mathfrak{t}_{11}\, \mathfrak{t}_{12} - \left(\frac{f}{l} \cdot \mu_1 + g_2\, g_3\right)^2 \equiv \mu_1^2 \cdot C\,.$$

Da nun nach 6)

$$\frac{f}{l} \cdot \mu_1 \equiv \frac{1}{2} (\mathfrak{t}_{11}\, \mathfrak{t}_{12} - g_0\, g_1\, \mu_1^2 - g_2\, g_3) \quad \text{ist,}$$

so wird:

$$4\,\mu_1^2\, C \equiv 2\, g_2\, g_3\, \mathfrak{t}_{11}\, \mathfrak{t}_{12} + 2\,\mu_1^2\, \mathfrak{t}_{11}\, \mathfrak{t}_{12}\, g_0\, g_1 + 2\,\mu_1^2\, g_0\, g_1 . g_2\, g_3 - \\ - g_2^2\, g_3^2 - \mathfrak{t}_{11}^2\, \mathfrak{t}_{12}^2 - \mu_1^4\, g_0^2\, g_1^2$$

Oder:

$$-4\,\mu_1^2 . C \equiv \begin{vmatrix} 0 & \mu_1\, g_0, & g_2, & \mathfrak{t}_{11} \\ \mu_1\, g_0, & 0, & \mathfrak{t}_{12}, & g_3 \\ g_2, & \mathfrak{t}_{12}, & 0, & \mu_1\, g_1 \\ \mathfrak{t}_{11}, & g_3, & \mu_1\, g_1, & 0 \end{vmatrix} \tag{40}$$

Diess ist Gleichungsform der Curve vierter Ordnung, welche Hesse seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat. Bezeichnet man nach 30) die Doppeltangenten von C durch die Symbole des Hesse'schen Algorithmus und wendet auf die Determinante 40) zweiseitige Substitutionen von der Form (1234 . 5678) an, welche darin bestehen, dass man ein Symbol von zwei Zeichen einer Gruppe (z. B. 12) ersetzt durch das Symbol (34) der andern beiden Zeichen, während man ein Symbol von zwei Zeichen aus beiden Gruppen (z. B. 15) unverändert lässt, so erhält man aus 40) noch 35 weitere Determinantendarstellungen, die, wie Hesse gezeigt hat, von einander unabhängig sind, d. h. nicht durch lineare Substitutionen in einander übergeführt werden können. Ist dann D eine dieser Determinanten, $\binom{\alpha}{\alpha}$ die mit 4 Grössen α_i geänderte, $\binom{\alpha}{\gamma}$ die mit 4 Grössen α_i und 4 Grössen γ_i vertikal und horizontal gesäumte, und endlich $\binom{\alpha\gamma}{\alpha\gamma}$ die mit dem doppelten Saum der α_i und γ_i versehene Determinante, so gilt identisch[1]):

$$\binom{\alpha}{\alpha} \cdot \binom{\gamma}{\gamma} - \binom{\alpha}{\gamma}^2 = \binom{\alpha\ \gamma}{\alpha\ \gamma} \cdot D\,. \tag{41}$$

$D = 0$ ist die Gleichung der Curve C, $\binom{\alpha}{\alpha} = 0$ und $\binom{\gamma}{\gamma} = 0$ die Gleichungen von zwei Curven dritter Ordnung, welche die Curve C, sowie den Kegelschnitt von der Gleichung $\binom{\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = 0$ in den Punkten berühren, in welchen sie von der Curve dritter Ordnung $\binom{\alpha}{\gamma} = 0$ geschnitten werden.

---

[1]) Hesse, Crelle's Journal t. 49. pag. 243. Vergl. auch Salmon-Fiedler, „Höhere moderne Algebra". 2. Aufl. pag. 42.

Von den 4 Constanten α_i resp. γ_i kann jeweilen eine durch Division gleich der Einheit gemacht werden. Lässt man die andern variiren, so stellt also 41) die Gleichung eines dreifach unendlichen Systems von Berührungscurven dritter Ordnung dar, von einer von den durch 38) gegebenen verschiedenen Art. Solcher Systeme erhält man also 36, was mit den 28 aus 38) erhaltenen zusammen 64 ausmacht. Da die Curven $\binom{\alpha}{\alpha} = 0$ und $\binom{\gamma}{\gamma} = 0$ ausser C noch den Kegelschnitt $\binom{\alpha\,\gamma}{\alpha\,\gamma} = 0$ berühren, so erhält man, im Falle jede derselben in drei Gerade zerfällt, 6 Doppeltangenten, welche ein Brianchon'sches Sechsseit bilden. Solcher Sechsseite findet man, wie Hesse gezeigt hat, 1008. Aus den Curven des Systems 38) ergeben sich bei Zerfallen in Gerade Pascal'sche Sechsecke, deren Anzahl 5040 beträgt. Dieselben können im vorliegenden Fall unter Anwendung des Hesse'schen Algorithmus sofort angegeben werden[1]).

§ 8.

Zum Schlusse soll nun noch angegeben werden, wie für eine gegebene Curve C die Doppeltangenten nebst den Berührungspunkten construirt werden können. Wir denken uns den Werth von λ bestimmt dadurch, dass wir eine beliebige Tangente

$$uX + vY + wZ = 0$$

des Kegelschnitts

$$K_1 \equiv (b^2 - c^2)\, u^2 - b^2\, v^2 + c^2\, w^2 = 0$$

[1]) S. die von Cayley in Salmon-Fiedler, „Höhere Curven“ geg. Tabelle pag. 286.

als eine Doppeltangente von C, z. B.

$$t_{15} = 0 = kX + nY + pZ$$

festsetzen; dadurch wird nämlich die Grösse $\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$ eindeutig bestimmt, also auch die Curve C. Mit t_{15} sind zugleich auch t_{16}, t_{17} und t_{18} gegeben als zweite Tangenten an den Kegelschnitt K_1 aus den Schnittpunkten der Seiten des Fundamentaldreiecks mit t_{15}. Zur weitern Construction benützen wir folgenden Satz:

Durch die Scheitel von zwei Paaren $t_1\,t_2$, $t_3\,t_4$ einer Steiner'schen Gruppe G, gehn die Diagonalen der 16 Vierseite, welche man erhält, indem man jedes der vier übrigen Paare der Gruppe $t_1\,t_3$, $t_2\,t_4$ mit jedem der vier übrigen Paare der Gruppe $t_1\,t_4$, $t_2\,t_3$ combinirt.[1])

Gemäss diesem Satze gehn die Diagonalen der Vierseite, gebildet aus den Paaren $g_0\,g_2$, $g_1\,g_3$ mit den Paaren $t_{15}\,t_{18}$, $t_{16}\,t_{17}$ durch die Scheitel der Paare $t_{25}\,t_{28}$, $t_{26}\,t_{27}$, welche zudem noch auf der Seite $X = 0$ des Fundamentaldreiecks liegen müssen, also mehrfach bestimmt sind. Legt man von diesen Punkten aus Tangenten an den Kegelschnitt

$$K_2 \equiv (c^2 - a^2)\,v^2 - c^2w^2 + a^2u^2 = 0\,,$$

so sind diess die Doppeltangenten t_{25}, t_{28}, t_{26}, t_{27}. Dieselben sind entweder alle reell oder alle imaginär, je nachdem die obigen Scheitel innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts K_2 fallen. Auf analoge Weise construirt man die Doppeltangenten t_{35}, t_{36}, t_{37}, t_{38} als Tangenten des Kegelschnitts

$$K_3 \equiv (a^2 - b^2)\,w^2 - a^2u^2 + b^2v^2\,.$$

---

[1]) Vergl. Salmon-Fiedler, Höhere Curven, pag. 281.

Haben die bisherigen Constructionen überall auf reelle Lösungen geführt, so sind nun die durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Doppeltangenten entweder alle reell oder alle imaginär. Um sie zu construiren bemerken wir, dass durch die Scheitel der Paare $g_0 t_{15}$, $g_1 t_{16}$ die Diagonalen der Vierseite gehn, welche die Paare $t_{11} t_{12}$, $t_{13} t_{14}$ mit den Paaren $t_{26} t_{36}$, $t_{27} t_{38}$ bilden (27) u. (28). Zieht man nun z. B. durch den Scheitel von $g_0 t_{15}$ Strahlen nach dem Paare $t_{26} t_{36}$, so entstehen auf t_{26} und t_{36} zwei perspektivische Reihen, die aus der Ecke A des Fundamentaldreiecks in zwei concentrischen projektivischen Büscheln projicirt werden. Da nun die Paare t_{11} t_{12} und t_{13} t_{14} harmonisch sind zu den Halbirungslinien des Winkels A, so construirt man sie also als gemeinschaftliche Paare der beiden projektivischen Büschel mit der durch die Halbirungslinien von A als Doppelstrahlen bestimmten Involution. Die Construction liefert entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Paare. Auf ähnliche Weise erhält man die Paare t_{21} t_{22}, $t_{23} t_{24}$ resp. $t_{31} t_{32}$, $t_{33} t_{34}$. Sie lassen sich indessen auch linear aus den construirten Paaren ableiten. In der That ersieht man aus den drei Gruppen:

$$t_{11}\,t_{13}\ ,\ t_{21}\,t_{23}\ ,\ t_{12}\,t_{14}\ ,\ t_{22}\,t_{24}\ ,\ t_{31}\,t_{33}\ ,\ t_{32}\,t_{34}\,;$$

$$t_{11}\,t_{21}\ ,\ t_{13}\,t_{23}\ ,\ g_1\,t_{35}\ ,\ g_2\,t_{36}\ ,\ t_{16}\,t_{25}\ ,\ t_{17}\,t_{27}\,;$$

$$t_{11}\,t_{23}\ ,\ t_{13}\,t_{21}\ ,\ g_0\,t_{37}\ ,\ g_1\,t_{38}\ ,\ t_{15}\,t_{28}\ ,\ t_{18}\,t_{26}\,,$$

dass die Diagonalen der Vierseite des Paares t_{12} t_{14} mit den Paaren g_1 t_{35}, g_2 t_{36} , t_{16} t_{25} , t_{17} t_{27} durch die Scheitel der Paare $t_{11} t_{23}$, $t_{13} t_{21}$ gehn, wodurch also t_{23} und t_{21} bestimmt sind, also auch t_{22} und t_{24}. In entsprechender Weise erhält man die Doppeltangenten t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34} linear aus den übrigen.

Um endlich noch die Berührungspunkte der Doppeltangenten mit C zu construiren, gehn wir zurück zu Gl. 18), welche wir in die Form bringen können:

$$M_1 \cdot M_2 - M_{12}{}^2 \equiv (\mu' - \mu'')^2 \cdot C\,,$$

wo:

$$M_1 \equiv g_0 g_1 \mu'^2 + 2\,\frac{f}{l} \cdot \mu' + g_2 g_3\,;$$

$$M_2 \equiv g_0 g_1 \mu''^2 + 2\,\frac{f}{l} \cdot \mu'' + g_2 g_3\,;$$

$$M_{12} \equiv g_0 g_1\, \mu' \mu'' + \frac{f}{l}\,(\mu' + \mu'') + g_2 g_3\,,$$

so dass also:

$$M_1 + M_2 - 2\,M_{12} \equiv (\mu' - \mu'')^2 \cdot g_0 g_1$$

oder

$$M_1 - 2\,M_{12} \equiv (\mu' - \mu'')^2 \cdot g_0 g_1 - M_2 \equiv M' \text{ ist.} \qquad 42)$$

Der Kegelschnitt M' geht durch die Schnittpunkte von M_1 mit M_{12} d. h. durch die Berührungspunkte von M_1 und ferner durch die Schnittpunkte von $g_0\, g_1$ und M_2, welche als beliebige Kegelschnitte der Reihen gelten können.

Wir haben demnach:

Die Berührungspunkte eines beliebigen Kegelschnittes der Reihe, deren Enveloppe C ist, und die Schnittpunkte von zwei beliebigen andern Kegelschnitten der Reihe liegen auf ein und demselben Kegelschnitt.

Daraus folgt weiter:

In einer Steiner'schen Gruppe G liegen die Berührungspunkte eines Paares mit den Schnittpunkten von zwei andern Paaren auf einem und demselben Kegelschnitt.

Kennt man also die Berührungspunkte einer Doppeltangente t_1 eines Paares $t_1\, t_2$, so geht durch dieselben und die Schnittpunkte von zwei beliebigen Paaren der durch t_1 t_2 bestimmten Gruppe G ein bestimmter Kegelschnitt, der auf t_2 die Berührungspunkte mit C ausschneidet. Nun kennen wir aber die Berührungspunkte von g_0, g_1, g_2, g_3, also lassen sich diejenigen der übrigen mit Zirkel und Lineal finden, wie schon früher bemerkt wurde. Am einfachsten wird die Construction, wenn man g_0 als die eine Doppeltangente des Paares wählt, indem dann alle Hülfskegelschnitte zu *Kreisen* werden. g_0 kommt in 27 Gruppen G vor. Die 5 Paare jeder Gruppe, welche g_0 nicht enthalten, lassen sich 10 mal zu zweien combiniren, also hat man:

Die Curve C besitzt ausser der unendlich fernen Geraden der Ebene noch 27 im Endlichen gelegene Doppeltangenten. Dieselben schneiden sich in 351 Punkten, welche in einer bestimmten Weise 270 mal zu je vieren auf einem Kreise liegen. Je 10 dieser Kreise schneiden sich in den Berührungspunkten einer und derselben Doppeltangente.

Wendet man diesen Satz auf die Paare $g_2 g_3$, t_{11} t_{12} an, so erhält man folgenden elementaren Satz:

Verbindet man in einem Dreieck ABC die Mitte der Seite BC mit den Mitten der beiden andern Seiten durch die Geraden g_2, g_3 und zieht aus der Ecke A zwei Gerade t_{11} t_{12}, welche mit den Seiten AB, AC verkehrt gleiche Winkel bilden, so schneiden sich diese Geradenpaare in vier Punkten eines Kreises. Der Mittelpunkt dieses letztern liegt auf dem aus A auf BC gefällten Höhenperpendikel. Aendert man die Strahlen aus A, so bilden alle solchen Kreise einen Kreisbüschel, der die Verbindungslinie g_1 der Mitten von AB und AC zur gemeinsamen Potenzlinie hat.

Die Berührungspunkte sämmtlicher 28 Doppeltangenten liegen nach 18) auf bestimmte Weise zu je 8 auf einem Kegelschnitt, deren im Ganzen $\frac{63 \cdot 15}{3} = 315$ vorhanden sind. Diejenigen, welche durch die Berührungspunkte von g_0 gehn, sind *Kreise*, von denen es $\frac{27 \cdot 5}{3} = 45$ gibt. Man hat also:

Die Berührungspunkte der 27 im Endlichen gelegenen Doppeltangenten von C liegen auf bestimmte Weise 45 mal zu je sechs auf einem Kreise.

Notizen.

Zusätzliche Bemerkungen zu „Geometrische Mittheilungen V". In Art. 18 der vorgenannten Abhandlung p. 241 f. habe ich den Einfluss erläutert, welchen die Parallelverschiebung der Bildebene nach ihren Normalen auf die Darstellung des Kegelschnittes ausübt, in dem sich zwei orthogonale Rotationskegel durchdringen, deren Axen zur Bildebene normal sind; ich habe aber dort in Ermangelung einer zugehörigen Figur, für welche die beigegebene Tafel keinen Raum bot, und um die Abhandlung nicht noch mehr zu verlängern, die ohnediess den vorgesteckten Umfang überschritt, mich mit dem nächstliegenden Hauptresultate begnügt, der Existenz unendlich vieler Paare von Grundkreisen des Kegelschnittes, welche constante Differenz oder Summe der Radien besitzen. Auf einiges weitere dahin Gehörige hätte ich mich sehr gern bei den literarischen Parallelen am Schluss der Abhandlung bezogen; und weil ich glaube, dass es durch die Anknüpfung an die vorhandenen Figuren hinreichend deutlich gemacht werden kann, so benutze ich die Gelegenheit, dasselbe mit einigen weitern Anmerkungen nun doch hier nachzutragen.