Geometrische Mittheilungen

von

Wilh. Fiedler.

V. Ein neuer Weg zur Theorie der Kegelschnitte.

(Mit einer Figurentafel.)

Ich habe in der Centralprojection das Auge durch den Distanzkreis bestimmt, und es lag mir daher nahe, jeden reellen Punkt des Raumes durch den Kreis darzustellen, der die Länge seiner Normale zur Bildebene zum Radius und den Fusspunkt derselben zum Mittelpunkt hat; so dass ein beliebiger Kreis in der Bildebene die zwei Punkte repräsentirt, die in der Normale durch sein Centrum um den Betrag des Radius von ihr abstehen, zwei Punkte, die man wenn nöthig durch Festsetzung und Angabe eines Drehungssinnes unterscheiden wird. Ich habe mich dieser Darstellungsweise seit längerer Zeit gelegentlich bedient und hatte in den «Geometr. Mittheilungen» III und IV im 24. Band dieser «Vierteljahrsschrift» durch die Ableitung der Construction des Apollonischen Problems als Kegeldurchdringung Anlass dazu, die Idee und einige Hauptgrundlagen ihrer Entwickelung zu besprechen. Ich will heute in Kürze zeigen, wie sie nach darstellend geometrischer Methode zu einer Theorie der Kegelschnitte führt. Es ist erforderlich, über gerade und ebene Kreissysteme, sowie Büschel und Netze von Kreisen das Wesentliche vorauszuschicken. (1—9.)

1. Das Bild der Bahnlinie, welche ein Punkt im Raum durchläuft, ist nach unserer Grundvorstellung ein System von einfach unendlich vielen Kreisen in der Bildebene, deren Mittelpunkte die Orthogonalprojection der Bahnlinie auf dieselbe bilden und deren Radien als die Entfernungen der Punkte von dieser sich im Allgemeinen stetig ändern. Liegen die Mittelpunkte in einer Geraden, so werden Curven in der durch sie gehenden Normalebene zur Bildebene dargestellt; insbesondere gerade Linien in derselben durch Systeme von Kreisen, die einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt im Schnittpunkt der Geraden mit der Bildebene haben oder bei denen der Abstand des Mittelpunktes von diesem zum Radius in einem festen Verhältniss steht, gleich der Cotan. ihres Winkels zur Bildebene; noch specieller die unter 45° zur Bildebene geneigten Geraden durch die Kreise aus den Punkten ihres Grundrisses, die sich in jenem Schnittpunkte berühren. Es mag erwähnt werden, dass jedes solche Bild eigentlich zwei zur Bildebene orthogonalsymmetrische Linien repräsentirt, woran im Folgenden nur gelegentlich erinnert werden wird; wir wollen die zweite von der ersten durch den Stern und von beiden ihre gemeinschaftliche Orthogonalprojection als mit dem Strich unterscheiden.

2. Das lineare einfach unendliche System von Kreisen oder das Kreisbüschel repräsentirt (siehe p. 224 a. a. O.) eine zur Bildebene orthogonalsymmetrische gleichseitige Hyperbel oder vielmehr die beiden orthogonalsymmetrischen Hälften H und H^* derselben in der Normalebene durch die Centrale H', mit dem Mittelpunkt im Durchschnitt der letzteren mit der Potenzlinie (Fig. 1). Die schneidende oder Hauptaxe liegt in der Bildebene also in der Centrale H', wenn das Büschel Nullkreise oder Grenzpunkte enthält; sie sind die den Hälften H und H^*

gemeinsamen Scheitel. Die Hauptaxe liegt dagegen in der Normale zur Bildebene durch den Mittelpunkt, wenn das Büschel zwei reelle Grundpunkte in seiner Potenzlinie besitzt; der Kreis, welcher ihre Entfernung von einander zum Durchmesser hat, repräsentirt die Scheitel der Hyperbel, er ist der kleinste reelle Kreis im Büschel. Die Potenzlinie stellt die den unendlich fernen Punkten der Hyperbel entsprechenden unendlich grossen Kreise des Büschels dar.

Die Kreise mit einerlei Berührungspunkt bilden den Grenzfall zwischen beiden Arten der Büschel, die Grenzpunkte sind reell und vereinigt, die repräsentirende Hyperbel hat die Hauptaxe Null oder sie ist übergegangen in das Paar der 45° Linien durch den Berührungspunkt. Die Involution auf der Centrale, welche die Kreise des Büschels bestimmen, ist parabolisch; im allgemeinen Falle sind die Grenzpunkte ihre Doppelpunkte.

Wenn man in allen Kreisen des Büschels die Endpunkte der zur Centrale normalen Durchmesser markirt, so giebt ihre stetige Aufeinanderfolge die Umlegung der durch dasselbe repräsentirten gleichseitigen Hyperbel in die Bildebene (Fig. 1.). Denkt man dieselbe Hyperbel als Umlegung mit der durch ihre andere Axe gehenden Normalebene zur Tafel, so erhält man ein zweites Büschel von Kreisen, welches die Centrale und Potenzlinie des ersten zur Potenzlinie und Centrale respective hat. Der Scheitelkreis **S** des ersten ist der Orthogonalkreis $\mathbf{0}^0$ des zweiten Büschels. (Fig. 1.) Die Gleichung $Z^2 - X^2 = \pm \delta^2$ an der citirten Stelle sagt in der That mit $Z^2 = \delta^2 + X^2$ aus, dass der mit dem Radius δ um den Anfangspunkt beschriebene Kreis von den Kreisen des Büschels im Durchmesser und mit $Z^2 + \delta^2 = X^2$, dass er von denselben orthogonal geschnitten wird. Solche Büschel heissen conjugirt.

3. Wenn man die Darstellung des zur Bildebene ortho-

gonalsymmetrischen Linienpaares und der gleichseitigen Hyperbel in derselben Normalebene mit einander verbindet, so entspringen nach einander die Lehren vom Potenzkreis zweier Kreise und von der Abbildung durch reciproke Radien vectoren, sowie von der Potenz in Bezug auf einen Kreis; nämlich, um das nur kurz anzudeuten, die Sätze: Zu jedem Kreis des Büschels existirt ein zweiter Kreis desselben, der mit ihm einen gegebenen Punkt der Centrale zum äussern respective innern Aehnlichkeitspunkt hat — denn eine gerade Linie, welche die Hyperbel einmal schneidet, muss sie zum zweiten Mal treffen; liegt der besagte Aehnlichkeitspunkt auf der Peripherie des Kreises, so ist die Potenzlinie dieser zweite Kreis. Zu jedem beliebigen Paar von Kreisen aus Punkten der Centrale und einem ihrer Aehnlichkeitspunkte giebt es im Allgemeinen ein Paar von Kreisen im Büschel, die denselben Punkt zum gleichnamigen Aehnlichkeitspunkt haben — denn eine gerade Linie schneidet im Allgemeinen eine Hyperbel in zwei Punkten. Der um diesen Aehnlichkeitspunkt als Mittelpunkt beschriebene Kreis des Büschels ist für alle Paare der Kreise des Büschels, die jenen Aehnlichkeitspunkt haben, der entsprechende Potenzkreis und in Bezug auf ihn als Grundkreis reciproker Radien vectoren ist jeder Kreis eines solchen Paares im Büschel die Abbildung des anderen. (Siehe § 145 der «Analyt. Geom. der Kegelschnitte», Schluss.) Sein Radius ist die Ordinate der Hyperbel für jenen Aehnlichkeitspunkt. In Fig. 1 ist die Sehne zwischen den Punkten 1, 2 der Hyperbel H, H^* mit den nach beiden Umlegungen derselben diese Punkte repräsentirenden Kreisen, den zugehörigen Aehnlichkeitspunkten A_{12} und I^0_{12} und den entsprechenden Potenzkreisen P^A_{12} und P^{0I}_{12} verzeichnet. Vertauscht man den Punkt 1 mit seinem symmetrischen 1* in jeder der beiden Umlegungen, so erhält man mit der Geraden 1* 2 die Aehnlichkeitspunkte I_{12} und A_{12}^0 derselben repräsentirenden Kreispaare uud die zugehörigen Potenzkreise P_{12}^I und P_{12}^{0A}. Die Kreise P_{12}^I und P_{12}^{0I} schneiden sich orthogonal und die gemeinsame Sehne ist die Gerade A_{12} A_{12}^0; ebenso die Kreise P_{12}^A und P_{12}^{0I} mit der Sehne $A_{12}^0 I_{12}$. Die Kreise P_{12}^I, P_{12}^{0A} und ebenso P_{12}^A, P_{12}^{0A} schneiden sich in einem Durchmesser des letzten Kreises.

4. Das Büschel wird durch zwei Kreise bestimmt, ebenso die dargestellte Hyperbel durch die Endpunkte 1, 1* und 2, 2* ihrer zur Centrale normalen Durchmesser. Man construirt sofort linear die Asymptoten, somit den Mittelpunkt derselben und die Linie gleicher Potenzen im Büschel; für 3 als die eine 45° Richtung bestimmt man wie folgt die zugehörige Asymptote: Man verbindet den Schnitt von 11*, 2* 3 mit dem von 22*, 13 durch eine Gerade und erhält in ihrem Schnitt mit der Geraden 1* 2 einen Punkt der Asymptote, damit diese selbst, den Mittelpunkt etc. Die Ordinate der Hyperbel für den Aehnlichkeitspunkt A respective I beider Kreise giebt den Radius des Potenzkreises P^A respective P^I derselben. Aus dem Potenzkreis P als Grundkreis reciproker Radien und dem Kreise K_1 construirt man das Bild des letzteren K_2 nach dem gleichen Verfahren. (Fig. 4, 4*, 5.) Seien 2, 3 die Endpunkte des zur Centrale rechtwinkligen Durchmessers von P, und 1 ein Endpunkt des ihm parallelen Durchmessers von K_1, bezeichnen 4,5 die Richtungen der 45° Linien, so ziehe man den nach 1 gehenden Durchmesser des Potenzkreises und construire seinen Schnittpunkt 6 mit der gleichseitigen Hyperbel durch 1, 2, 3, 4, 5. Durch den Schnittpunkt von 34 mit 61 zieht man parallel zu 12 die Pascallinie p und durch ihren Schnitt mit 23 die 45° Linie 56; sie bestimmt 6 und damit den zur Centrale normalen Durch-

messer von K_2. Man bemerke, dass in den Fällen Fig. 4 und 4* der andere Potenzkreis — P^{I} bei 4, und P^{A} bei 4* — als mit dem Radius ri gedacht werden muss, um K_1, und K_2 als entsprechend zu erhalten, indess in Fig. 5 auch der Potenzkreis P^{I} als reeller Grundkreis reciproker Radien erscheint. Dem Falle des Radius ri entspricht eine Drehung um 90° zur Construction der Abbildung. (S. Art. 25.) Wenn sich die beiden Kreise K_1 und K_2 der Fig. 1 vereinigen, so dass die Durchmesserendpunkte 1 und 2, 1* und 2* zusammenfallen, so ist der zugehörige Aehnlichkeitspunkt A der Schnitt der entsprechenden Hyperbeltangenten und die zugehörige Hyperbelordinate giebt den Potenzkreis dieses Aehnlichkeitspunktes für jene vereinigten Kreise. Durch die Punkte 11* und den Schnittpunkt ihrer Hyperbeltangenten d. h. einen Punkt ihrer orthogonalen Symmetrieaxe, für den die Potenz gebildet werden soll, ist in der That die Hyperbel bestimmt. Bezeichnen wir (Fig. 2, 3) 1 durch 12, 1* durch 34, die 45° Richtungen mit 5, 6 und den Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten mit P, so ziehen wir 45 bis zum Schnitt mit 12, 61 bis zu dem mit 34 und verbinden beide durch p; ihr Schnitt mit 23 giebt einen Punkt der Asymptote 56, damit diese, den Mittelpunkt und die Potenzlinie des Büschels; durch diese aber den um P mit der Quadratwurzel der Potenz beschriebenen Kreis P (Fig. 2, 3). Liegt P ausserhalb des Kreises, so schneidet der Potenzkreis P ihn rechtwinklig und den Scheitelkreis der Hyperbel im Durchmesser (Fig. 2); liegt er innerhalb, so wird er von ihm und dem Orthogonalkreis im Durchmesser geschnitten (Fig. 3). Die Potenzkreise zweier Kreise halbiren die Winkel zwischen denselben (Fig. 1) oder machen mit beiden gleiche Winkel.

5. Ein System von zweifach unendlich vielen Kreisen der Bildebene ist das Bild einer zu derselben orthogonal-

symmetrischen Fläche, wenn im Allgemeinen mit der infinitesimalen Annäherung der Mittelpunkte zweier Kreise auch die infinitesimale Annäherung ihrer Radien verbunden ist. Diese Fläche ist insbesondere ein Ebenenpaar, wenn alle Gruppen von je drei Kreisen des Systems eine gemeinsame Aehnlichkeitsaxe haben, die Spur der Ebenen in der Bildebene, deren Punkte die Kreise vom Radius Null im System liefern. Das Verhältniss zwischen dem Abstande des Mittelpunktes von der gemeinsamen Aehnlichkeitsaxe s und dem Radius des Kreises ist offenbar constant für alle Kreise des Systems; es ist die Cotan. des Winkels, den die Ebene mit der Bildebene einschliesst. (Vergl. Art. 1.) Weil durch drei Kreise drei Paare von Punkten 1, 1*; 2, 2*; 3, 3* dargestellt werden und drei Punkte eine Ebene bestimmen, so liefern jene vier Paare orthogonalsymmetrischer Ebenen, nämlich 123 und 1* 2* 3* mit der gemeinsamen Spur s, der die äusseren Aehnlichkeitspunkte A_{12}, A_{23}, A_{31} verbindenden Aehnlichkeitsaxe; 1* 23, 12*3* mit der Spur s_1 durch $I_{12}\,A_{23}\,I_{31}$; 12* 3, 1* 23* mit s_2 oder $I_{12}\,I_{23}\,A_{31}$ und 123*, 1*2*3 mit s_3 oder $A_{12}I_{23}I_{31}$. Drei Kreise haben also vier Aehnlichkeitsaxen. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, wo die Mittelpunkte in einer Geraden liegen und daher die sechs Punkte des Raumes 1 2 3 1* 2* 3* nur eine Ebene durch diese bestimmen; alle Kreise der Ebene, die ihre Mittelpunkte in dieser Geraden haben, gehören diesem System an.

Die Verbindung von Ebene und gerader Linie und die von zwei Ebenen führen zu folgenden Sätzen: In jedem System von Kreisen mit gemeinschaftlicher Aehnlichkeitsaxe giebt es immer einen Kreis, der mit zwei gegebenen dem System nicht angehörigen Kreisen einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt oder mit einem gegebenen dem System fremden Kreise einen vorgeschriebenen Aehnlichkeitspunkt hat. Er ist das Bild des Schnittpunktes der Ebene mit der Geraden durch zwei Punkte des Raumes oder durch einen Punkt nach einem Punkte der Bildebene. Weil zwei Ebenen eine gerade Linie gemein haben, so besitzen zwei Kreissysteme mit je einerlei Aehnlichkeitsaxe gemeinsam eine einfach unendliche Reihe von Kreisen mit einerlei Aehnlichkeitspunkt. Und nach der Verbindung von Ebene und Hyperbel: In einem beliebigen Büschel von Kreisen giebt es im Allgemeinen zu jedem Kreise einen zweiten, der mit ihm einen Aehnlichkeitspunkt in einer gegebenen Geraden hat oder einem durch dieselbe gehenden ebenen System angehört.

6. Die Kreise eines Netzes oder eines linearen Gebildes zweiter Stufe repräsentiren ein zur Bildebene orthogonalsymmetrisches gleichseitiges Rotationshyperboloid oder die beiden durch die Bildebene getrennten Hälften **H**, **H*** desselben (siehe pag. 224 Bd. 24). Es hat die Normale zur Bildebene im Radical- oder Potenz-Centrum des Systems zu seiner Axe und ist ein einfaches Hyperboloid, wenn der Orthogonalkreis **O** reell ist, der seinen Aequator oder Kehlkreis giebt (Fig. 6), und ein zweifaches, sobald derselbe nicht reell ist (Fig. 7); im letzteren Falle werden die Scheitel des zweifachen Hyperboloides durch den um das Potenzcentrum beschriebenen kleinsten Kreis **S** des Netzes repräsentirt, der alle andern Kreise desselben im Durchmesser schneidet, weil alle diese Kreise in den Büscheln enthalten sind, die den durch das Potenz-Centrum gehenden zur Bildebene normalen Querschnitten des Hyperboloids entsprechen; im Falle des einfachen Hyperboloides sind die Punkte des Orthogonalkreises die Kreise vom Radius Null im Netz, und zugleich die Berührungspunkte der Systeme von einfach unendlich vielen sich berührenden Kreisen desselben, welche den geraden

Erzeugenden in den durch die Tangenten des Kehlkreises gehenden Normalebenen zur Bildebene entsprechen.

Wenn die reelle Axe des gleichseitigen Rotationshyperboloids verschwindet, so wird dasselbe zum gleichseitigen oder rechtwinkligen Rotationskegel und seine Darstellung dasjenige specielle Netz (Fig. 8), dessen sämmtliche Kreise durch einen Punkt gehen, der zugleich sein Orthogonalkreis und sein kleinster oder Scheitelkreis ist. Den zur Bildebene symmetrischen Kegelseitenpaaren entsprechend theilt es sich in unendlich viele Reihen mit einerlei Berührungspunkt.

Solche Hyperboloide und solche Kegel — auch mit beliebigen Spitzen — durchdringen einander in Kegelschnitten, weil sie den unendlichfernen Querschnitt mit einander gemein haben; insbesondere zwei Hyperboloide und zwei Kegel mit Spitzen in der Bildebene in je einer zur Bildebene orthogonalsymmetrischen Hyperbel, während die Durchdringung zweier Kegel mit beliebigen Spitzen oder eines solchen Kegels mit einem Hyperboloid jeder beliebige Kegelschnitt werden kann. Auf specielle Fälle der Durchdringung von drei und mehr Kegeln etc. will ich nicht eintreten.

7. Allgemein ist jeder Kegel darstellbar durch einen Kreis, der seine Spitze repräsentirt, und seine Leitcurve in der Bildebene; seine Punkte erscheinen als diejenigen Kreise, die mit jenem der Spitze einen Aehnlichkeitspunkt in der Leitcurve haben. Für den Rotationskegel mit zur Bildebene normaler Axe sind der Kreis der Spitze und der Spurkreis concentrisch, und für den gleichseitigen oder rechtwinkligen Rotationskegel fallen sie zusammen; alle Punkte seines Mantels werden durch Kreise dargestellt, die diesen Kreis berühren. Die Kreise von einerlei Radius in diesem speciellen Netz repräsentiren

sentiren einen zur Bildebene parallelen Querschnitt. Man findet leicht die Kreise eines solchen Netzes, welche mit zwei willkürlich gewählten Kreisen einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt besitzen, etc.; ebenso in einem allgemeinen Netz: Die gerade Linie durch die zwei Punkte trifft das Netz-Hyperboloid in den zwei Punkten, welche sie darstellen. Die Ordinate des Aehnlichkeitspunktes im Netz-Hyperboloid oder -Kegel giebt den Radius des Potenzkreises für die beiden Kreise des Netzes, und den Grundkreis, in Bezug auf welchen der eine immer das Bild des andern nach der Methode der reciproken Radien vectoren ist; die Kreise des Netzes ordnen sich in zweifach unendlich viele Paare in Bezug auf einen solchen Grundkreis, den Sehnen durch seinen Mittelpunkt entsprechend; die unter 45° geneigten unter denselben liefern als das entsprechende Paar von Kreisen die Potenzlinie des Büschels und den durch den Fusspunkt der Ordinate gehenden Kreis — die Abbildung des Kreises in die Gerade. Und (Art. 3) man sieht leicht: Der Winkel zweier Kreise oder Geraden, etc. bleibt bei der Abbildung durch reciproke Radien erhalten. Aber ich will in dieser Untersuchung wesentlich nur vom Berühren der Kreise handeln und bemerke hier nur, dass die Lehre vom Schneiden unter constanten Winkeln daraus mit entspringt (Art. 22). Jedes Netz enthält ferner im Allgemeinen ein einfach unendliches System von Kreisen, die mit einem gegebenen Kreise eine vorgeschriebene Aehnlichkeitsaxe haben; sie stellen die Punkte des ebenen Querschnittes dar, welchen das Netzhyperboloid oder der Netzkegel mit der Ebene durch jene Axe und den durch den Kreis repräsentirten Punkt bestimmt; so dass also die Mittelpunkte jener Kreise in einem Kegelschnitt liegen müssen. Ebenso mit drei Kreisen; da aber drei Kreise vier Aehnlichkeitsaxen und vier Paare zur Bildebene orthogonalsymmetrische

Ebenen bestimmen, so giebt es im Netz vier einfach unendliche je einen Kegelschnitt darstellende Systeme von Kreisen, die mit den drei gegebenen dieselbe Aehnlichkeitsaxe haben.

8. Nach dem Vorigen bestimmen drei Kreise das Netz, da ihr Potenzcentrum den Fusspunkt der Axe des entsprechenden gleichseitigen Hyperboloids und der Orthogonalkreis oder der von allen drei Kreisen im Durchmesser geschnittene Kreis der Kehlkreis des einfachen respective der Repräsentant der Scheitelpunkte oder der Scheitelkreis des zweifachen Hyperboloids ist. Dieselben drei Kreise bestimmen daher auch vier Kegelschnitte im vorigen Sinne, das Problem des Apollonius mündet also ein in eine constructive Theorie der Kegelschnitte: Die Centra der Apollonischen Kreise liegen paarweis in den vier Perpendikeln vom Potenzcentrum auf die Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise und jede zwei solche Apollonischen Kreise bestimmen mit den drei gegebenen einen Kegelschnitt nach der folgenden Theorie; ihre Centra sind seine Brennpunkte und ihre Radien bestimmen seine Hauptaxenlänge. In Fig. 6 sind P_1, P_2, P_3 die Mittelpunkte der drei Kreise, K_1 und K_2 die beiden berührenden Kreise, deren Mittelpunkte in der vom Potenzcentrum auf die Aehnlichkeitsaxe s gehenden Normale liegen; der entstehende Kegelschnitt ist eine Ellipse mit der Summe ihrer Radien als Hauptaxenlänge. Natürlich gehören zu den drei gegebenen Kreisen drei Paare von Potenzkreisen P^A_{12}, P^I_{12}; P^A_{23}, P^I_{23}; P^A_{31}, P^I_{31}, von denen jedes der vier Tripel $\mathsf{P}^A_{12}\,\mathsf{P}^A_{23}\,\mathsf{P}^A_{31}$, $\mathsf{P}^A_{12}\,\mathsf{P}^I_{23}\,\mathsf{P}^I_{31}$, $\mathsf{P}^I_{12}\,\mathsf{P}^A_{23}\,\mathsf{P}^I_{31}$, $\mathsf{P}^I_{12}\,\mathsf{P}^I_{23}\,\mathsf{P}^A_{31}$ zu einem Büschel von Potenzkreisen gehört, welches dem Kreissystem des zugehörigen Kegelschnitts zugeordnet ist. Der Orthogonalkreis schneidet die P^A orthogonal, die P^I im Durchmesser, etc. (s. Art. 22) Endlich ist von

dem System der drei Kreise ein einzelner nicht dem Netze angehöriger Kreis abhängig, das Bild des Pols ihrer Ebene im Netzhyperboloid, sowie die vorigen Büschel der Potenzkreise die Bilder der Querschnitte desselben mit den durch die Aehnlichkeitsaxen s, s_3, s_1, s_2 respective gehenden Normalebenen zur Bildebene sind.

Die Abbildung durch reciproke Radien aus einem Punkte des Orthogonalkreises verwandelt drei beliebige Kreise des Netzes in concentrale Kreise, weil den Orthogonalkreis in eine Gerade. Specieller: Zwei Kreise, die sich nicht schneiden, werden durch reciproke Radien aus den zugehörigen Grenzpunkten in concentrische Kreise abgebildet.

9. Von den Kreisen des Netzes geht durch jeden Punkt der Bildebene ein Büschel, das Bild der zur Bildebene symmetrischen gleichseitigen Hyperbel, in welcher der gleichseitige Rotationskegel aus jenem Punkte der Bildebene als Spitze das Netzhyperboloid durchdringt.

Durch zwei Punkte geht ein Kreis des Netzes, den beiden zur Bildebene symmetrischen Punkten entsprechend, die das Netzhyperboloid und die beiden Rotationskegel aus jenen gemein haben.

Und drei Punkte bestimmen immer einen Kreis, das Bild der Schnittpunkte der drei von ihnen ausgehenden gleichseitigen Rotationskegel; je zwei derselben durchdringen sich in einer gleichseitigen Hyperbel durch die senkrechte Halbirungslinie der Scheiteldistanz oder liefern ein Büschel mit dieser Geraden als Axe; der Schnitt der drei senkrechten Halbirungslinien ist der Mittelpunkt des Kreises, der diesen drei Büscheln gemeinsam ist und die beiden Durchschnittspunkte der Kegel repräsentirt.

Diese Sätze erweitern sich offenbar auf Berührung mit festen Kreisen wie folgt: Ein beliebiger dem Netze nicht angehöriger Kreis wird durch zwei Systeme von einfach unendlich vielen Kreisen des Netzes berührt, deren Centra einen Kegelschnitt erfüllen und die eine feste Aehnlichkeitsaxe haben. Sie repräsentiren die Durchdringung des gleichseitigen Rotationshyperboloides vom Netz mit je einem der gleichseitigen Rotationskegel, welche der gegebene Kreis bestimmt, d. h. welche einen der von ihm repräsentirten Punkte zu Spitzen haben. Und alle diese Kreise berühren je noch einen zweiten festen Kreis, das Bild der Spitze des zweiten gleichseitigen Rotationskegels, der durch den Durchdringungskegelschnitt des ersten mit dem Hyperboloid hindurchgeht. Eine Ausnahme hiervon tritt nur in dem oben ausgeschlossenen Falle ein, wo der beliebige Kreis dem Netze angehört; wir haben dann die Durchdringung des aus einem Punkte des Netz-Hyperboloides beschriebenen gleichseitigen Rotationskegels mit demselben, einen Kegelschnitt mit Doppelpunkt: Im Falle des einfachen Hyperboloides das Paar seiner Geraden in der Tangentialebene im Scheitel; in dem des zweifachen die Spitze als unendlich kleine Ellipse allein. Im ersten Falle berühren die darstellenden Kreise den Grundkreis des Kegels in seinen Schnittpunkten mit dem Orthogonalkreis; im letzteren Falle giebt es keine solchen. Zwei beliebige dem Netze nicht angehörige Kreise werden im Allgemeinen von vier Kreisen des Netzes berührt; jene beiden Kreise repräsentiren zwei orthogonale Rotationskegel, die sich in einem Kegelschnitt durchdringen, der mit dem Netzhyperboloid höchstens vier reelle durch jene Kreise dargestellte Punkte gemeinsam haben kann; etc.

Es giebt ferner im Netz ein Büschel von Kreisen, die für einen gegebenen Punkt einerlei Potenz haben —

denn der Tangentenkegel aus diesem Punkte als einem Punkte der Hauptebene berührt in den Punkten einer Verticalebene also auf einer gleichseitigen Hyperbel, und die Ordinate des Punktes giebt die Quadratwurzel der Potenz; etc.

10. Bei der Hauptfigur der Betrachtungen des letzten Artikels will ich nun stehen bleiben. Sie kann gleichmässig angesehen werden als Durchdringung von Kegel und Hyperboloid, als solche von zwei Kegeln, und als ebener Querschnitt des Hyperboloids oder des Kegels und giebt die Theorie der Kegelschnitte auf Grund der Benutzung des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel, der beiden elementaren Specialformen derselben. Die Durchdringung von Kegel und Hyperboloid haben wir in der Hauptsache schon betrachtet; wir können die einfach unendlich vielen Kreise des gemeinsamen Systems in Paaren construirt denken, entweder (Art. 21) mittelst der Parallelschnitte zur Bildebene, wobei sie gleichen Radius erhalten, oder mittelst der Verticalschnitte durch die Kegelspitze, wobei ihre Berührungspunkte mit dem den Kegel darstellenden Kreise auf einem gegebenen Durchmesser desselben liegen. Immer wird ihre Gesammtheit im Falle des einfachen Hyperboloids vom Kehlkreis desselben orthogonal und im Falle des zweifachen Hyperboloids vom Scheitelkreis desselben im Durchmesser geschnitten. Hierauf wird später (Art. 21) noch zurück zu kommen sein; eine Erweiterung giebt Art. 22.

Wir betrachten die Figur weiter als Durchdringung von zwei gleichseitigen Rotationskegeln mit den Spitzen M_1 und M_2 (Fig. 9). Wenn das Netzhyperboloid und der eine Kegel M_1 gegeben sind, so erhält man den andern Kegel M_2 durch Betrachtung des Meridians von jenem, welcher durch M_1 geht; die beiden Kegelseiten, welche seine Ebene enthält, schneiden die Meridianhyperbel des ersteren ausser in ihren unendlich fernen Punkten noch je in einem Punkte A respective B; die durch AB gehende Normalebene zu diesem Meridian ist die Ebene des Kegelschnitts der Durchdringung. Wir denken den Meridian als Aufriss- und die Bildebene als Grundrissebene, die Schnittlinie beider als Axe x, so dass A und A'', B und B'' zusammenfallen, A' und B' in der Axe x liegen. Die zweiten 45° Linien durch A'' und B'' oder die Parallelen $A''\,M_2''$ und $B''\,M_2''$ zu $M_1''\,B''$ und $M_1''\,A''$ respective liefern dann die zweite Kegelspitze M_2 oder M_2'' und zugleich in x ihren Grundriss M_2', mit dem Kreise aus M_2' durch M_2'' als Darstellung. Wenn man im Schnittpunkte von $A''\,B''$ oder s_2 mit x die Normale zu dieser errichtet, so hat man die erste oder Horizontalspur — schreiben wir s — der Ebene des Kegelschnitts der Durchdringung gezeichnet und $A'\,B'$ ist die Hauptaxe seines Grundrisses.

11. Von diesem Grundriss ergiebt sich aber nach dem Vorhergehenden sofort Folgendes. Die gleichseitigen Rotationskegel M_1, M_2 werden durch die aus M_1', M_2' respective durch M_1'', M_2'' beschriebenen Kreise K_1 und K_2 der Bildebene repräsentirt, in der Art, dass die Projection P' eines Mantelpunktes P von K_1 oder K_2 Mittelpunkt eines diesen Punkt darstellenden und somit K_1 oder K_2 im Durchstosspunkt der zugehörigen Kegelerzeugenden berührenden Kreises K_P ist. Somit ist die Orthogonalprojection des Durchdringungskegelschnitts der Kegel auf die Bildebene der Ort der Centra von Kreisen, welche jene beiden Kreise — wir wollen sie die Leitkreise oder Grundkreise nennen, so wie jene Kreise K_P die erzeugenden Kreise — berühren. Und weil alle Punkte eines solchen Kegelmantels, welche mit seiner Spitze auf

derselben oder der entgegengesetzten Seite der Grundrissebene liegen, durch Kreise repräsentirt werden, die mit dem Grundkreis innere, respective äussere Berührung haben, so ist diese Berührung der erzeugenden Kreise mit den Grund- oder Leitkreisen von gleicher oder entgegengesetzter Art für den ganzen Durchdringungskegelschnitt. In Folge dessen ist für alle Punkte seines Grundrisses im Allgemeinen entweder die Summe oder die Differenz ihrer Abstände von den Mittelpunkten M_1', M_2' der Leitkreise constant, d. h. diese sind die Brennpunkte des Kegelschnittes, den derselbe bildet. Die Unterscheidung der einzelnen Fälle folgt nachher.

Ich erörtere zunächst die Darstellung der Durchdringung. Aus den Kreisen K_1, K_2 als Repräsentanten der Kegel M_1, M_2 respective M_1, M_2* erhalten wir den Grundriss ihrer Durchdringung mittels Hilfsebenen durch die Verbindungslinie der Kegelspitzen $M_1 M_2$ im ersten und $M_1 M_2$* im zweiten Falle; Ebenen also, deren Horizontalspuren durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Kreise als den horizontalen Durchstosspunkt der Verbindungslinie der Spitzen $M_1 M_2$ im ersten Falle und durch den innern Aehnlichkeitspunkt I derselben als Durchstosspunkt von $M_1 M_2$* im zweiten Falle gehen. Diese Ebenen theilen sich in Paare, welche zur Aufrissebene orthogonalsymmetrisch sind, der Durchdringungskegelschnitt erscheint daher im Aufriss als gerade Linie, im Grundriss als orthogonalsymmetrisch für die Gerade x oder $M_1' M_2'$ als Axe. Wenn A_1, B_1, respective A_2, B_2 die Durchmesserendpunkte der Kreise K_1, K_2 in der Symmetrieaxe x sind, so liefern die Schnittpunkte der Umrisserzeugenden $A_1 M_1''$, $B_2 M_2''$ und $B_1 M_1''$, $A_2 M_2''$ die Endpunkte A'', B'' des Aufrisses und damit in $A'' B''$ diesen selbst, die Verticalspur s_2 und damit auch die Horizontalspur s seiner Ebene; die zugehörigen Grundrisse A', B' in x sind die Endpunkte des in der Symmetrieaxe liegenden Durchmessers oder der Hauptaxe des Grundrisses.

Wenn $M_2{}^*$ an die Stelle von M_2 tritt, so sind die Schnitte von $A_1\,M_1{}''$, $A_2\,M^*{}_2{}''$ und von $B_1\,M_1{}^{*''}$, $B_2\,M_2{}^{*''}$ die Endpunkte $A^{*''}$, $B^{*''}$ des Aufrisses, ihre Verbindungslinie die Verticalspur der Ebene des Durchdringungskegelschnittes; die Horizontalspur derselben ist die nämliche wie vorhin, weil sie zugleich die Chordale oder Potenzlinie der Grundkreise ist.

12. Ist nun — für den ersten Fall — h eine durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Grundkreis gehende Gerade (Fig. 10), also die Horizontalspur einer Hilfsebene, so begegnen sich die Radien $M_1{}'\,H_1{}'$, $M_2{}'\,H_2{}'$ ihrer in der Aehnlichkeit für A nicht entsprechenden Schnittpunkte $H_1{}'$, $H_2{}'$ mit den Grundkreisen K_1, K_2 oder kurz die nicht parallelen Radien derselben in einem Punkte P' des Grundrisses vom Durchdringungskegelschnitt, und die zugehörigen Tangenten $H_1{}'\,S$, $H_2{}'\,S$ von K_1, respective K_2 liefern den horizontalen Durchstosspunkt S seiner entsprechenden Tangente, so dass die Gerade $P'S$ diese selbst ist. Da $P'H_1{}' = P'H_2{}'$ ist, so sind $\varDelta\, H_1{}'\,P'\,H_2{}'$ und also auch $\varDelta\, H_1{}'\,S\,H_2{}'$ gleichschenklig, die Gerade $P'\,S$ ist die gemeinsame Höhe beider und hälftet daher rechtwinklig die Grundlinie $H_1{}'\,H_2{}'$; der Durchstosspunkt S ist ihr Schnitt mit der Spur s. Der um P' durch $H_1{}'$ und $H_2{}'$ beschriebene Kreis ist der erzeugende Kreis für den Punkt P', beide Grundkreise in $H_1{}'$ respective $H_2{}'$ berührend, und ist zugleich der Repräsentant des Punktes P der Durchdringung in der Punkt-Kreis-Abbildung. Die Geraden $P'H_1{}'$, $P'H_2{}'$ sind seine Brennstrahlen oder Radien vectoren. Die zugehörige Tan-

gente $P'S$ halbirt den Winkel zwischen den letzteren. Man erkennt auch aus der Figur leicht den Satz: Die orthogonalsymmetrischen Punkte zum Mittelpunkte des einen Grundkreises z. B. M_1' in Bezug auf die Tangenten des Kegelschnittes liegen in einem mit der Hauptaxe als Radius um den Mittelpunkt des andern M_2' beschriebenen Kreise (Fig. 10). Und die bezüglichen Punkte in den Tangenten oder die Fusspunkte der Perpendikel von einem Brennpunkt auf die Tangenten liegen in demjenigen Kreise, der die Hauptaxe zum Durchmesser hat (Fig. 10).

Dieselbe Hilfsebene h liefert zwei Punkte P' mit parallelen Tangenten; ihre Verbindungslinie ist ein Durchmesser vom Grundriss des Durchdringungskegelschnitts; im Schnitt desselben mit x oder $A' B'$ liegt sein Mittelpunkt.

Wird h um A durch alle Lagen gedreht, in denen es immer beide Grundkreise trifft, so entstehen nacheinander alle Punkte des Kegelschnittes. In der Grenzlage der gemeinsamen Tangenten der Grundkreise aus A — falls solche existiren — fallen die in der Aehnlichkeit für A correspondirenden Punkte der Kreise mit den nicht correspondirenden zusammen, die zugehörigen Radien sind parallel und liefern die unendlich fernen Punkte des Grundrisses, die gemeinsamen Tangenten selbst sind die ihnen entsprechenden erzeugenden Kreise, die vom Mittelpunkt ausgehenden Normalen derselben die zugehörigen Tangenten d. h. die Asymptoten.

13. Wir können nun leicht die verschiedenen Hauptfälle übersehen, welche die Construction aus Grundkreisen von endlichen Radien r_1, r_2 liefert. Wenn dieselben

1) aussereinander liegen, so entstehen für die Kegelspitzen auf einerlei und für die auf verschiedener Seite der Bildebene oder für den äusseren Aehnlichkeitspunkt A und den inneren I, also für die gleichstimmige respective ungleichstimmige Aehnlichkeit und die gleichartige respective ungleichartige Berührung der erzeugenden Kreise mit den beiden Grundkreisen confocale Hyperbeln mit den Hauptaxenlängen $(r_1 - r_2)$ respective $(r_1 + r_2)$. Fig. 9 giebt die Construction der ersteren, von der zweiten nur die der Scheitel A^* und B^* und der Asymptoten. Mit $r_1 = r_2 = r$ geht die erste Hyperbel in die Chordale oder Potenzlinie der Grundkreise über, die erzeugenden Kreise bilden, wir wollen sagen, ein Büschel mit zwei Grundkreisen statt zwei Grundpunkten, die Durchdringung selbst ist eine zu der die Spitzen M_1, M_2 enthaltenden Parallelen zur Bildebene symmetrische gleichseitige Hyperbel. Die zweite der ungleichartigen Berührung entsprechende Hyperbel hat die Hauptaxenlänge $2r$.

Berühren sich insbesondere die Grundkreise von aussen, so erhält man für den äusseren Aehnlichkeitspunkt und mit gleichartiger Berührung eine Hyperbel von der Hauptaxenlänge $r_1 - r_2$ und für den inneren mit ungleichartiger das von den Centren nach aussen gehende Stück der Centrale, eine Hyperbel, bei der die Brennpunkte mit den Scheiteln zusammenfallen. Im Falle gleicher Radien wird zugleich die erstere Hyperbel zur gemeinsamen Tangente der Grundkreise in ihrem Berührungspunkt mit verschwindender Hauptaxe oder mit in der Mitte zwischen den Brennpunkten vereinigten Scheiteln.

Wenn sich 2) die Grundkreise schneiden (Fig. 10), so entspringt der Benutzung des äusseren Aehnlichkeitspunktes mit gleichstimmiger Aehnlichkeit und gleichartiger

Berührung der erzeugenden Kreise eine Hyperbel von der Hauptaxenlänge $(r_1 - r_2)$ (die Figur giebt sie an, ihre Scheitel A und B und ihre Asymptoten) und derjenigen des inneren Aehnlichkeitspunktes oder der ungleichstimmigen Aehnlichkeit und ungleichartigen Berührung eine confocale Ellipse mit der Hauptaxenlänge $(r_1 + r_2)$; die Figur 10 giebt die Scheitel A^*, B^*, den Durchmesser $P' P'$ aus der Hilfsebene h mit den erzeugenden Kreisen und Tangenten, den Hauptkreis und den mit $(r_1 + r_2)$ um M_2' beschriebenen Kreis der symmetrischen zu M_1' für die Tangenten. Im Falle $r_1 = r_2 = r$ wird die erstere Curve zur Potenzlinie in gleicher Bedeutung wie unter 1) und die letztere hat die Hauptaxenlänge $2r$.

Bei innerer Berührung der Grundkreise liefert der Berührungspunkt als äusserer Aehnlichkeitspunkt mit gleichstimmiger Aehnlichkeit und gleichartiger Berührung die Centrale mit den Brennpunkten, der innere Aehnlichkeitspunkt mit der ungleichartigen Berührung und ungleichstimmigen Aehnlichkeit eine Ellipse von der Axenlänge gleich $(r_1 + r_2)$.

Liegen endlich die Grundkreise 3) in einander, so giebt (Fig. 11) der äussere Aehnlichkeitspunkt oder die gleichstimmige Aehnlichkeit und gleichartige Berührung der erzeugenden Kreise eine Ellipse mit der Axenlänge $(r_1 - r_2)$ und der innere Aehnlichkeitspunkt oder die ungleichstimmige Aehnlichkeit und ungleichartige Berührung eine Ellipse von der Axenlänge $(r_1 + r_2)$. In diesen letzteren beiden Fällen ist Gleichheit der Radien nach der Natur der Sache unmöglich. Der hierher gehörende Fall concentrischer Kreise liefert, wie sofort ersichtlich, im Falle des Mittelpunktes als äusseren respective innern Aehnlichkeitspunktes oder für die Kegelspitzen auf einerlei oder verschiedener Seite der Bildebene mit gleichartig respective ungleichartig berührenden erzeugenden Kreisen zwei concentrische Kreise vom Durchmesser gleich der Differenz respective gleich der Summe der Radien.

14. Wir können nun zu der betrachteten Kegeldurchdringung das einzige existirende gleichseitige Rotationshyperboloid mit der Bildebene als Hauptebene construiren, welches dieselbe enthält. Sein Meridian in der durch die Axe AB gehenden Normalebene zur Bildebene ist die gleichseitige Hyperbel durch die Scheitel A und B, die die Axe x zur einen Axe hat, und dessen Umklappung in die Bildebene die durch A'', B'' und ihre für x orthogonalsymmetrischen Punkte bestimmte gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten wie in Art. 4 construirt werden. Die Normale zur Bildebene in ihrem Mittelpunkt ist die Axe des Hyperboloids; ist die in x liegende Axenlänge reell, so ist das Hyperboloid ein einfaches, der über der Axe als Durchmesser beschriebene Kreis, der Potenzkreis der Grundkreise für den bei der Construction benutzten Aehnlichkeitspunkt, sein Kehlkreis **O**, natürlich auch der Orthogonalkreis der sämmtlichen erzeugenden Kreise des Kegelschnittes nach Art. 5; im andern Falle ist das Hyperboloid ein zweifaches, der Potenzkreis des benutzten Aehnlichkeitspunktes ist sein Scheitelkreis **S** und schneidet alle erzeugenden Kreise des Kegelschnittes im Durchmesser. Nur im ersten Falle giebt es unter den erzeugenden Kreisen des Kegelschnittes solche, die einander berühren, ihre Berührungspunkte liegen im Kehlkreis oder Orthogonalkreis und sind Kreise vom Radius Null im Netz. Wir constituiren eine betreffende Raumanschauung durch die Bemerkung, dass der betrachtete und der zu ihm in Bezug auf

die Bildebene orthogonalsymmetrische Kegelschnitt — der durch die gleichzeitige Vertauschung der Kegelspitzen M_1, M_2 mit ihren symmetrischen M_1^*, M_2^* entsteht — auf demselben Hyperboloid liegen und dieselbe Darstellung haben; und dass dann berührende Paare erzeugender Kreise Punkte auf derselben geraden Erzeugenden des Hyperboloids sind, von denen der eine im ersten und der andere im zweiten Kegelschnitt liegt. Ich erinnere gelegentlich dieser Andeutung auch an den Ausnahmefall des Art. 9. (S. jedoch Art. 21).

15. Ich will nun die einzelnen Fälle in der Reihenfolge von vorhin für dieses Hyperboloid characterisiren.

Bei aussereinander liegenden Grundkreisen 1) und Kegelspitzen auf derselben Seite der Ebene oder gleichstimmiger Aehnlichkeit erhalten wir ein einfaches Hyperboloid oder den Potenzkreis P^A des äusseren Aehnlichkeitspunktes als Kehlkreis und Orthogonalkreis O; bei ungleichstimmiger Aehnlichkeit ein zweifaches Hyperboloid mit dem Potenzkreis P^I als Scheitelkreis S. Für gleiche Radien insbesondere wird die Potenzlinie der Grundkreise zum Kehl-Orthogonal- und Potenzkreis P^A, der Potenzkreis P^I zum Scheitelkreis des zweifachen Hyperboloids durch die Hyperbel von der Hauptaxe $2r$. Im Falle der von aussen berührenden Grundkreise ist der Potenzkreis P^A Kehlkreis des Hyperboloids durch die entstandene Hyperbel; der Potenzkreis P^I ist ein Punkt, das zugehörige Hyperboloid zugleich einfach und zweifach, nämlich ein Kegel; jener Punktkreis schneidet alle erzeugenden Kreise aus den Punkten der Centrale zugleich orthogonal und im Durchmesser.

Wenn sich 2) die Grundkreise schneiden, so ist sowohl das Hyperboloid durch die Hyperbel als das durch die Ellipse einfach, die Potenzkreise P^A und P^I der Grundkreise sind Kehl- und Orthogonalkreise O, O^* derselben (Fig. 10).

Sind die Radien dabei gleich, so wird P^{A} zur Potenzlinie derselben, P^{I} bleibt Kehl- und Orthogonalkreis für das die Ellipse enthaltende Netz-Hyperboloid.

Berühren sich die Kreise von innen, so entsteht im Falle des äusseren Aehnlichkeitspunktes dieser selbst als Potenzkreis P^{A}, Kehl- und Scheitelkreis O, S, d. h. ein Kegel, und im Falle des inneren Aehnlichkeitspunktes der Potenzkreis P^{I} als Kehl- und Orthogonalkreis O^* des einfachen Hyperboloids durch die erzeugte Ellipse.

Liegen 3) die Grundkreise in einander, so ist der Potenzkreis P^{A} Scheitelkreis S des zweifachen Hyperboloids durch die erste Ellipse und der Potenzkreis P^{I} Kehlkreis O^* des einfachen Hyperboloids durch die zweite (Fig.11). Concentrische Kreise liefern P^{A} als Scheitelkreis S eines zweifachen und P^{I} als Kehlkreis O^* eines einfachen Hyperboloids.

16. So liefern also zwei Kreise K_1, K_2 allgemein als Grundrisse der Durchdringung ihrer Kegel M_1, M_2 oder M_1, $M_2{}^*$ zwei confocale Kegelschnitte und als durch dieselben gehend zwei gleichseitige Rotationshyperboloide, die die Bildebene zur Hauptebene haben. Diese Hyperboloide durchdringen einander in einer zur Bildebene symmetrischen gleichseitigen Hyperbel in der durch die Spur s der beiden Kegelschnittebenen gehenden Normalebene zur Bildebene, deren Darstellung ein Kreisbüschel ist, welches mit den erzeugenden Kreisen des einen wie des andern Kegelschnittes zu je einem Netz gehört oder dessen Kreise die Orthogonalkreise beider orthogonal, die Scheitelkreise aber im Durchmesser schneiden; es hat die Schnittpunkte der Grundkreise zu Nullkreisen oder Grenzpunkten (S. Art. 22); der Mittelpunkt eines beliebigen Kreises in diesem Büschel ist Durchstosspunkt von zwei Tangenten und von unendlich vielen

Sekanten eines jeden der Kegelschnitte, also auch für die Paare der zugehörigen erzeugenden Kreise gleichnamiger Aehnlichkeitspunkt; der zugehörige Kreis des Büschels selbst ist der Grundkreis reciproker Radien, für welchen jeder der einen solchen Berührungspunkt darstellenden Kreise sich selbst entspricht, und für welchen jedes die Schnittpunkte einer Sekante darstellende Paar von erzeugenden Kreisen des Kegelschnittes einander entspricht oder er ist der gemeinsame gleichartige Potenzkreis aller dieser einfach unendlich vielen Paare.

Die vorigen Bemerkungen gehören im Grunde schon zu der Untersuchung der Kegelschnitte als ebener Querschnitte von Hyperboloiden, auf die ich weiterhin kurz zurück kommen muss. Jedoch ist derselben auch hier als eines Grenzfalles nothwendig zu erwähnen. Wir haben nämlich noch des Falles der Grundkreise mit nicht endlichem Radius zu gedenken und erinnern, dass ein Grundkreis mit dem Radius Null einen gleichseitigen Rotationskegel aus einem Punkte der Bildebene und mit zu ihr normaler Axe darstellt, indess ein Grundkreis mit unendlich grossem Radius also eine gerade Linie als Kegel eine durch dieselbe gehende zur Bildebene unter 45° geneigte Ebene liefert.

17. Damit treten folgende fünf Fälle in unsere Betrachtung ein: 1) und 2) Grundkreis K_1 mit Radius Null oder mit Radius Unendlich bei endlichem Radius des Grundkreises K_2. 3) und 4) Grundkreis K_1 mit Radius Null oder mit Radius Unendlich bei verschwindendem Radius von K_2. 5) Grundkreis K_1 und K_2 von unendlich grossem Radius. Und man sieht, dass diese fünf Fälle der Reihe nach entsprechen der Durchdringung eines gleichseitigen Rotationskegels mit Spitze in der Bildebene mit einem beliebigen

Kegel dieser Art; einer 45° Ebene mit einem beliebigen Kegel; zweier Kegel aus Punkten der Bildebene; einer 45° Ebene mit einem Kegel aus einem Punkte der Bildebene; zweier 45° Ebenen mit parallelen Spuren. Ich unterdrücke die leicht zu bildenden Figuren.

Unter diesen Fällen sind die letzten vier wirkliche Specialfälle und mögen daher hier vor dem ersten besprochen werden. Zwei Grundkreise vom Radius Null liefern die ihre Centraldistanz senkrecht hälftende Gerade als Centrale eines Kreisbüschels, welches ihre Centra zu reellen Grundpunkten hat — eine gleichseitige zur Bildebene orthogonalsymmetrische und sie nicht schneidende Hyperbel (Fall 3).

Ist der eine Grundkreis vom Radius Unendlich, so entsteht als Grenzfall die Parabel, der Querschnitt einer 45° Ebene mit einem Kegel unserer Art, Fälle 2 und 4; wir werden sehen, dass der eine dieser Fälle immer in den andern übergeführt werden kann.

Sind die Radien beider Grundkreise unendlich gross (Fall 5), so projicirt sich der Durchschnitt der zugehörigen 45° Ebenen als die zu den Spuren beider parallele Mittellinie derselben und als die unendlich ferne Gerade.

18. Bekanntlich ändert sich die Orthogonalprojection einer Raumfigur auf eine Ebene nicht, wenn diese so parallel sich selbst verschoben wird, dass jeder ihrer Punkte in der durch ihn gehenden Normale der Ebene fortschreitet. Also ändert sich auch der von uns betrachtete Grundriss des Durchdringungskegelschnittes von zwei Kegeln M_1, M_2 respective M_1, $M_2{}^*$ nicht, wenn man die Bildebene in dieser Weise verschiebt, ohne dass die Kegel selbst ihre Lage ändern. Wohl aber ändern sich dabei die Grundkreise, die darstellenden Kreise der Kegelspitzen; für die Lage der Spitzen auf einerlei Seite der Bildebene nehmen die Radien

beider gleichzeitig um gleich viel ab oder zu, indess für die Lage auf verschiedenen Seiten der Bildebene der eine so viel wächst als der andere abnimmt, so dass in der That (vergl. Art. 13) im ersten Falle die Differenz im zweiten Falle die Summe derselben unverändert bleibt. Dieselben Brennpunkte und die nämliche Axenlänge liefern denselben Kegelschnitt. Man wird das leicht construirend verfolgen. Wir lernen also, dass ein Kegelschnitt unendlich viele Paare von Grundkreisen hat, welche für gleichstimmige Aehnlichkeit und gleichartige Berührung constante Differenz und für ungleichstimmige Aehnlichkeit und ungleichartige Berührung constante Summe der Radien besitzen. Grundkreise, die sich nicht schneiden, gehen auf unendlich viele Arten in schneidende Grundkreise über; die Schnittpunkte sind axensymmetrische Paare von Punkten des Kegelschnittes, den sie erzeugen — siehe da die elementare Construction des Kegelschnitts aus den Brennpunkten und der Länge der Hauptaxe. Es ist klar, dass unter den unendlich vielen Grundkreis-Paaren zwei Paare vorkommen, wo der eine vom Radius Null ist, während der andere die Axenlänge zum Radius hat; entsprechend den beiden Verschiebungslagen der Bildebene, wo dieselbe durch die Spitze des einen und wo sie durch die Spitze des andern Kegels geht. Die damit eintretenden Aenderungen der Construction sind sehr einfach.

19. Ist also dem entsprechend ein Grundkreis K_1 und ein Brennpunkt K_2 gegeben, so ist evident, dass der letztere als punktförmiger Leitkreis zugleich der innere und äussere Aehnlichkeitspunkt A, I und auch Potenzkreis P^A und P^I ist; d. h. die beiden nun entstehenden Kegelschnitte sind identisch. Geht man aber von den Kreisen K_1 und K_2 mit beiderseits endlichen Radien aus und macht

durch Verschiebung nach M_2 respective $M_2{}^*$ den Radius von K_2 in beiden möglichen Arten verschwinden, so dass K_1 das erste Mal die Differenz $(r_1 - r_2)$ und das andere Mal die Summe $(r_1 + r_2)$ zum Radius erhält, so bleiben die Hyperbel dort und die Ellipse hier im Grundriss unverändert, verschieben sich aber, wenn die Projectionsebene fest gedacht wird, im Raume parallel sich selbst so, dass sie nun statt auf zwei verschiedenen Hyperboloiden auf einem und demselben zur Bildebene orthogonalsymmetrischen gleichseitigen Rotationskegel mit dem Brennpunkt als Mittelpunkt gelegen sind. Die Spuren beider Kegelschnittebenen, die vorher in s vereinigt waren, sind in verschiedene Gerade s_0 und $s_0{}^*$ auseinander gerückt; auf der ersteren liegt für jedes Paar der erzeugenden Kreise der Hyperbel ein innerer, auf $s_0{}^*$ für jedes Paar der Ellipse ein äusserer Aehnlichkeitspunkt; sie sind die dem Brennpunkt K_2 entsprechenden Directrixen der Kegelschnitte.

Die Parabel aus 45° Ebene und Kegel mit beliebiger Spitze oder aus Linie und Grundkreis kann durch Parallelverschiebung der Bildebene nach dieser Spitze in den Durchschnitt der 45° Ebene mit einem Kegel aus der Bildebene oder aus Linie und Punkt verwandelt werden; die gerade Linie hat sich dabei um den Radius des Grundkreises verschoben und ist wie der letztere zum Brennpunkt ihrerseits zur Directrix der Parabel geworden. Die Parabel erscheint als Ort vom Mittelpunkt eines Kreises, der eine feste Gerade berührt und durch einen festen Punkt geht; die zugehörige Tangente erscheint als senkrecht Halbirende der Strecke vom Berührungspunkte mit jener zu diesem; die Gerade ist der Ort der orthogonalsymmetrischen des Brennpuntes in Bezug auf die Tangente der Parabel.

20. Damit wende ich mich endlich zur Betrachtung des Kegelschnittes als Querschnitt seiner Ebene mit dem gleichseitigen Rotationskegel respective Hyperboloid und beginne anschliessend an das Vorige mit dem ersteren. Manches hierher Gehörige ist in dem Vorigen schon enthalten und ich habe nur das noch nicht Erwähnte hier beizufügen. Die Spur s der Ebene sahen wir als Ort der Aehnlichkeitspunkte der erzeugenden Kreise des Kegelschnitts in Paaren; die Halbmesser eines solchen Paares stehen also im Verhältniss der Abstände ihrer Centra von s oder das Verhältniss vom Radius eines erzeugenden Kreises zum Abstand seines Mittelpunktes von s ist constant — nämlich gleich der Tangente des Neigungswinkels der Ebene des Kegelschnittes zur Bildebene (Art. 5).

Der Querschnitt des geraden Kreiskegels mit einer Ebene ist die Centralprojection seines Basiskreises aus seiner Spitze auf diese Ebene (siehe die Mittheilung III, Bd. 24 dieser Vierteljahrschr. p. 190), seine Orthogonalprojection auf die Basisebene ist daher insbesondere centrisch collinear mit dem Basiskreis für den Mittelpunkt M' desselben als Centrum, die Spur s der Ebene als Collineationsaxe und die Spur der durch die Kegelspitze gehenden Parallelen zur Schnittebene als Gegenaxe r im System des Kreises. Für den Kegelschnitt aus den Grundkreisen K_1 und K_2 oder den Kegeln M_1 und M_2 hat man daher Collineation mit diesen Kreisen für s als Collineationsaxe und M_1', respective M_2' als Collineationscentrum und die Spuren r_1, respective r_2 der besagten Parallelebenen durch M_1 und M_2 als Gegenaxen; sie sind die

Polaren des bei der Construction benutzten Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf die Grundkreise. Zieht man also einen Aehnlichkeitsstrahl h durch denselben, der die Grundkreise in Punkten H_1', H_2' schneidet, so markiren wir seine Schnittpunkte mit den Axen s, r_1 und r_2 und ziehen durch den ersteren die Parallele zu den Strahlen, welche die letzteren respective mit M_1' und M_2' verbinden; sie ist der jenem Aehnlichkeitsstrahl correspondirende Durchmesser des Kegelschnittes. Die Strahlen von M_1' respective M_2' nach den zugehörigen H_1', H_2' schneiden ihn in den bezüglichen Punkten des Kegelschnitts. Die zugehörigen Tangenten der Grundkreise liefern durch ihre paarweis zusammenfallenden Schnitte mit s Punkte der entsprechenden Kegelschnittstangenten. Natürlich kann man auch die Gegenaxen q im System des Kegelschnitts zur Construction benutzen, die zu M_1', M_2' entsprechenden Directrixen. Dem auf der Axe x normalen Aehnlichkeitsstrahl entspricht die Nebenaxe des Kegelschnitts. Der Mittelpunkt desselben ist in beiden Collineationen des Kegelschnittes mit seinen Leitkreisen der correspondirende des benutzten Aehnlichkeitspunktes. In Fig. 11 M_I für I; die zugehörigen Gegenaxen sind r_1, $r_2{}^*$; für die letztere ist die Construction des Durchmessers P' P' zum Aehnlichkeitsstrahl h eingetragen: Verschwindungspunkt R^*, Parallelstrahl M_2' R^*. Ist der eine Grundkreis zum Punkt reducirt, so ist die Axe s der Collineation zwischen dem Kegelschnitt und dem andern Grundkreis die Polare jenes Punktes im Kegelschnitt oder die dem Brennpunkt zugehörige Directrix. Die Tangente des Neigungswinkels der Schnittebene zur Bildebene wird zur Excentricität. Dass man durch diese Collineation insbesondere die zahlreichen Sätze über Winkel am Brennpunkt aus den entsprechenden Sätzen der Kreislehre abliest, ist zur Genüge bekannt; ich darf auf mein Werk: «Die darstellende Geom.» (2. Aufl.) Art. 35 verweisen, nicht blos für das Vorerwähnte, sondern für die Herleitung der allgemeinen projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte aus der Centralprojection. Man liest aber z. B. auch aus Fig. 10 den Satz ab: Der Schnittpunkt T' der Tangente in einem Punkte P' des Kegelschnitts mit der einen Scheiteltangente $B^{*\prime}\, U'$ ist die Mitte des Abschnittes von ihrem Scheitel bis zu ihrem Schnittpunkt U' mit dem Verbindungsstrahl des Punktes P' mit dem andern Scheitel $A^{*\prime}$. Derselbe überträgt sich durch Affinität sofort auf einen beliebigen den Kegelschnitt schneidenden Durchmesser. Er ergiebt sich aus der Perspective des Kreises M_1 mit A^*, B^*, T, U, wo die eingezeichneten Hilfslinien ihn beweisen. Man kann leicht in demselben den Brianchon'schen Satz wieder erkennen und sieht so die nahen Beziehungen der Projectivitätstheorie zu unserer Methode; $\mathbf{B}$ ist der Brianchonpunkt für das Sechsseit der Tangenten in $A^{*\prime}$, $B^{*\prime}$ und P' und $B^{*\prime}\, T'$ und $T'\, U'$ sind gleich als Projectionen der Strecke $\mathbf{B}\, P'$ aus zwei Punkten der Tangente in $A^{*\prime}$ auf die in $B^{*\prime}$.

21. Betrachten wir den Kegelschnitt als Schnitt einer Ebene mit einem gleichseitigen Rotationshyperboloid, so würde seine Construction durch Hilfsebenen erfolgen, welche Parallelkreis- oder Meridianebenen desselben sind, und im Falle des einfachen Rotationshyperboloids besonders bequem auch durch die Tangentialebenen desselben in Punkten des Kehlkreises.

Wir denken die Hauptebene des Hyperboloids als Grundrissebene und die zu ihr und der Schnittebene normale Meridianebene desselben als Aufrissebene; das Hyperboloid ist durch den Kehlkreis **O** oder durch den Scheitelkreis **S** und die Ebene durch ihre Spuren gegeben. Benutzt man Parallelkreisebenen zur Construction, so erhält man den Kegelschnitt als den Ort der Mittelpunkte derjenigen Paare gleicher Kreise im Netz, welche eine vorgeschriebene Richtung zum Aehnlichkeitspunkt haben und bei denen das Verhältniss der Radien zum Abstand der Centrale von einer festen gegebenen Parallelen constant ist.

Bei der Benutzung von Meridianebenen ergiebt sich der Kegelschnitt als Ort der Mittelpunkte solcher Paare von Kreisen des Netzes, welche je einem der gleichen Büschel angehören, deren Centralen die Durchmesser des Kehl- respective Scheitelkreises sind, die ihren einen Aehnlichkeitspunkt in einer festen Geraden haben und ein constantes Verhältniss des Radius zum Abstande des Mittelpunktes von dieser Geraden besitzen. Die gleichen Büschel des Netzes sind die Bilder der Meridiane.

Denken wir endlich insbesondere das Netz mit reellem Orthogonalkreis **O**, Fig. 12, also das einfache Hyperboloid, so liefern die Tangentialebenen desselben in Punkten dieses seines Kehlkreises seine geraden Erzeugenden in Paaren, dargestellt durch die Systeme der Kreise, die sich in jenem Punkte des Orthogonalkreises nach dem Radius desselben berühren; in jedem solchen System giebt es zwei Kreise, Bilder der Schnittpunkte des betreffenden Paares gerader Erzeugenden mit der Schnittebene, welche einen Aehnlichkeitspunkt in der Spur der letzteren und ein constantes Verhältniss ihrer Radien zu den Abständen ihrer Mittelpunkte von dieser Linie haben. Man sieht, dass der Kegelschnitt hierbei durch die Paare seiner erzeugenden Kreise construirt wird, welche einander berühren. (Vergl. Art. 14.) Der besondere Fall, wo das Hyperboloid zum Kegel aus der Bildebene wird, macht die Construction durch Meridiane und durch die Tangentialebenen im Kehlkreis identisch.

In der Fig. 12 sind für den Kehlkreis **0**, Mittelpunkt I und den Querschnitt AB (Neigung α zur Bildebene) die erzeugenden Kreise construirt, die sich in Q auf **0** nach dem Radius IQ berühren. Die Ebene beider Erzeugenden hat die Spur QS und in (g), (l) sind ihre Umklappungen mit dieser Ebene eingetragen; zugleich ist (d) die Umklappung der Schnittlinie dieser Ebene mit der Querschnittebene; diess liefert die Mittelpunkte P' der erzeugenden Kreise mit Berührung in Q. Die Durchstosspunkte S_t der zugehörigen Kegelschnitt-Tangenten sind die Schnitte der Spur s mit der Sehne des Orthogonalkreises, die dem erzeugenden Kreis angehört. Es wäre leicht, die Reihe der berührenden Kreise fortzusetzen mit S^*, etc. Man sieht, das Problem vom Ring der Kreise gehört zu den sogenannten Schliessungsproblemen; es fordert, ein Polygon zu construiren, welches dem Kegelschnitt AB eingeschrieben und dem Potenzkreis $\mathbf{P}^{\mathrm{I}}$ oder dem Orthogonalkreis umgeschrieben ist. Diess erhöht das Interesse der elementaren Lösung. In der Figur sind auch die beiden Kegel M_1 und M_2 (eigentlich M_2^*) eingetragen oder die Brennpunkte bestimmt.

Ich habe damit das Verfahren nach der neuen Methode systematisch gezeigt, ohne alle selbst naheliegenden Consequenzen derselben ziehen zu wollen. Die Beziehungen zweier Kegelschnitte zu einander, insbesondere die Lehre vom Krümmungskreis, die hier wieder einschlägt, unterdrücke ich an diesem Orte.

22. Aber ich darf eine Gruppe von Sätzen nicht ganz unerwähnt lassen, die sich auf das Schneiden der Kreise

unter bestimmten Winkeln bezieht, und im Grunde nur eine andere Auffassung des schon früher Entwickelten bildet; in besonderem Anschluss an Art. 8, mit dessen Inhalt ich der entwickelten Theorie vorgreifen musste. In der That die Berührung der Kreise und das Orthogonalsein derselben, wobei wir bis jetzt allein verweilten, sind nur die Grenzfälle des Schneidens unter bestimmten Winkeln. Die Theorie desselben entspringt aus einer Zusammenfassung des Vorhergehenden.

Drei Punkte 1, 2, 3 — man vergleiche etwa Fig. 6 in Verbindung mit Fig. 12 und führe darnach die Construction nach den folgenden Angaben selbst vollständig durch — bestimmen eine Ebene mit der entsprechenden Aehnlichkeitsaxe s der repräsentirenden Kreise als Spur (Art. 5); sie bestimmen auch ein gleichseitiges Rotationshyperboloid mit der Bildebene als Hauptebene, welches das Potenz-Centrum der repräsentirenden Kreise zum Fusspunkt der Axe und den Orthogonalkreis **O** zum Kehlkreis (so in den Figuren) respective den Scheitelkreis **S** zum repräsentirenden Kreis seiner Scheitel hat. Dieselben drei Punkte bestimmen ferner einen Kegelschnitt, die Durchdringung dieses Hyperboloids mit jener Ebene und in Folge dessen endlich zwei durch diesen Kegelschnitt gehende gleichseitige Rotationskegel mit zur Bildebene normaler Axe, deren gemeinsame Hauptebene die Axe des Hyperboloids enthält und zur Spur s normal ist, dargestellt durch die beiden Leitkreise der Projection jenes Kegelschnitts auf die Bildebene, diejenigen zwei Apollonischen Kreise, deren Centra in der Normale jener Aehnlichkeitsaxe aus dem Potenz-Centrum liegen (Art. 8). Diese Apollonischen Kreise bestimmen ein Büschel von Kreisen, welches conjugirt ist (Art. 2) zu demjenigen Büschel von Kreisen, das den Querschnitt der zur Bildebene normalen Ebene durch s mit dem Hyperboloid repräsentirt (Art. 16, 8, 4). Die Kreise desselben schneiden die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln. (Für eine analytische Behandlung vergleiche man «Analytische Geometrie der Kegelschnitte» von Salmon-Fiedler, 4. Aufl., «Nachträge» p. 2.) Man findet daher den Kreis, welcher vier gegebene unter gleichen Winkeln schneidet, als den Orthogonalkreis der Potenzkreise von drei Paaren aus den vier gegebenen Kreisen. Und in umgekehrter vom Büschel der Leitkreise ausgehender Auffassung: Die Kreise, welche zwei feste Kreise unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, berühren auch zwei feste Kreise ihres Büschels und schneiden jeden andern Kreis desselben unter festem Winkel. Man sieht, dass damit das Problem, einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise unter vorgeschriebenen Winkeln schneidet, lösbar wird durch Reduction auf das Problem des Apollonius. Zu diesem Problem selbst füge ich als offenbare Consequenz des Entwickelten die Bemerkung hinzu, dass die vier Kegelschnitte des Art. 8 (Fig. 6 enthält einen derselben), deren Brennpunkte die Centra conjugirter Apollonischer Kreise sind und die sämmtlich durch die Centra der drei gegebenen Kreise gehen, eben desshalb sich noch zu zwei in sechs reellen Punkten schneiden müssen, die einzeln auf den geraden Linien $P_1 A_{23}$, $P_1 I_{23}$, $P_2 A_{31}$, etc. liegen und die Centra von sechs die Durchschnittspunkte im Raum repräsentirenden Kreisen sind, von denen jeder die vier zugehörigen Apollonischen Kreise berührt; dass ausserdem die acht Centra der Apollonischen Kreise sechsmal zu vier in Kegelschnitten liegen, welche in Paaren confocal sind mit den Centren von je zweien der gegebenen Kreise als Brennpunkten. Aus den Beziehungen der Berührungspunkte zum Potenz-Centrum ersieht man dann noch, dass die Gruppen der Centra in zwei solchen confocalen Kegelschnitten projectivisch sind; etc.

Die sechs Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise sind Potenz-Centra für je vier der Apollonischen Kreise und daher Mittelpunkte der durch je zwölf ihrer Grenzpunkte in Paaren gehenden Orthogonal- respective Scheitel-Kreise dieser Gruppen, auch Convergenzpunkte von je drei involutorischen Strahlenpaaren der zugehörigen Potenzlinien; etc.

23. Es kann bei dem alten Reichthum der Theorie der Kegelschnitte nicht überraschen, dass der grössere Theil des hier Entwickelten nicht neu ist; aber die Form der Entwicklung und der Weg der Entdeckung sind vollständig neu, soviel ich weiss; und es ist natürlich, dass der neue Weg zu neuen Aussichten und Einsichten führt, während das Hauptbild nicht verändert wird. Dieser Natur der Sache zufolge darf ich aber nicht schliessen, ohne diejenigen Quellen hervorzuheben, welche nach meiner Nachforschung hauptsächlich nahe Bezüge zu den hier gefundenen Ergebnissen besitzen. Sie knüpfen sich an die grossen Bahnbrecher der neueren geometrischen Entwicklung, an Poncelet, Steiner und Plücker.

Zuerst Poncelet. Im ersten Bande des 1862 veröffentlichten Werkes « Applications d'analyse et de géométrie comprenant la matière de sept cahiers manuscrits rédigés a Saratoff (1813 à 1814)» etc. finden wir im 1^er^ cahier « Lemmes de géométrie synthétique » Propos. XV, p. 48: Ein beliebiger Kegelschnitt kann als der Ort des Centrums eines Kreises von veränderlicher Grösse betrachtet werden, welcher stets zwei gegebene Kreise berührt oder einen gegebenen Kreis berührt und einen gegebenen Punkt enthält; und Probl. XIV, p. 53 verlangt, die Durchschnittspunkte einer geraden Linie und eines Kegelschnitts zu construiren, der aus Grundkreis und Brennpunkt nach dem vorhergehenden Satz bestimmt ist. Damit schliesst das Heft, in welchem vorangehen die Lehren von den Aehnlichkeitspunkten und -Axen, den Potenzlinien und Potenzpunkten der Kreise in Paaren und in Tripeln, sowie ihre Anwendung auf das Problem des Apollonius. Das VII^e cahier «Resumé» fügt in diesem Stücke nichts hinzu und das «Traité de propriété projectives des figures» von 1822 beginnt sogleich mit den durch die Centralprojection entspringenden Verallgemeinerungen.

Anderseits besitzen wir seit 1867 im ersten Bande von J. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie «Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung auf Grund von Universitätsvorträgen etc., bearb. von Dr. F. Geiser in § 9 «Gemeinsamer Ursprung der Kegelschnitte» p. 36-41 die Darstellung derselben Kegelschnitt-Enstehung und auf p. 39 sofort auch die Behandlung derselben Aufgabe von der Bestimmung der Schnittpunkte mit einer Geraden. Auch der Inhalt des vorausgehenden Kapitels (§§ 1—6) vom Kreis ist fast der gleiche wie bei Poncelet — eine gewiss interessante Coincidenz, da diese Theorie wohl kaum weiter zurückgeht in der Geschichte der Lehre von den Kegelschnitten. Und für den frühen Besitz Steiner's zeugt der im Band 2 von Crelle's Journal p. 192 von ihm gegebene Lehrsatz: «Wenn in einer Ebene zwei beliebige Kreise gegeben sind, so giebt es unzählig viele andere Kreise, von denen jeder jene beiden berührt; ihre Mittelpunkte liegen in einem Kegelschnitt. Für das Folgende ist es zweckmässig, auch die Fortsetzung a. a. O. zu citiren. Dreht man jeden Kreis der genannten Schaar um einen seiner Durchmesser, so erhält man eine Schaar von Kugeln und es giebt eine zweite Kugelschaar von der jede alle Kugeln der ersten berührt und deren Mittelpunkte ebenfalls in einem Kegelschnitt liegen — nach heutigem Sprachgebrauch kurz dem Focalkegelschnitt des ersten. Nimmt man in der ersten Kugelschaar eine Reihe sich der Ordnung nach berührender Kugeln an, so wird, wenn dieselbe nach einem oder mehreren Umläufen in sich zurückkehrt, auch in der zweiten Kugelschaar eine solche commensurable Reihe existiren; und zwar findet dies dann für jede Wahl der ersten Kugel statt. Dabei ist für n, n^* als die Anzahlen der Kugeln in der Reihe und u, u^* als die Zahl der Umläufe derselben immer $\frac{u}{n} + \frac{u^*}{n^*} = \frac{1}{2}$. (Siehe Bd. 1, p. 272 einen Specialfall.)»

24. Ich will, ehe ich auf Steiner's Abhandlungen vom November 1825 und vom März 1826 (Bd. 1 von «Crelle's Journal») eingehe, gleich hier erwähnen, dass diese Erzeugung aus zwei Grund- oder Leit-Kreisen eine ziemlich eingehende Entwicklung gefunden hat in «Grundlinien der neueren ebenen Geometrie von Chr. Paulus», Stuttg. 1853, im VI. Buche «Entwicklung der Kegelschnitte» p. 153—180 oder §§ 86—102, welchem, wieder fast genau demPoncelet-Steiner'schen Plan entsprechend, vorausgehen: V. Buch «Der Kreis» p. 110—152 mit den drei letzten Abschnitten «Aehnlichkeit, Potenzialität der Kreise, Kreisberührungen». Sie sind zu vergleichen, wenn man sehen will, wie sich ohne die Abbildungsidee die Sache gestaltet.

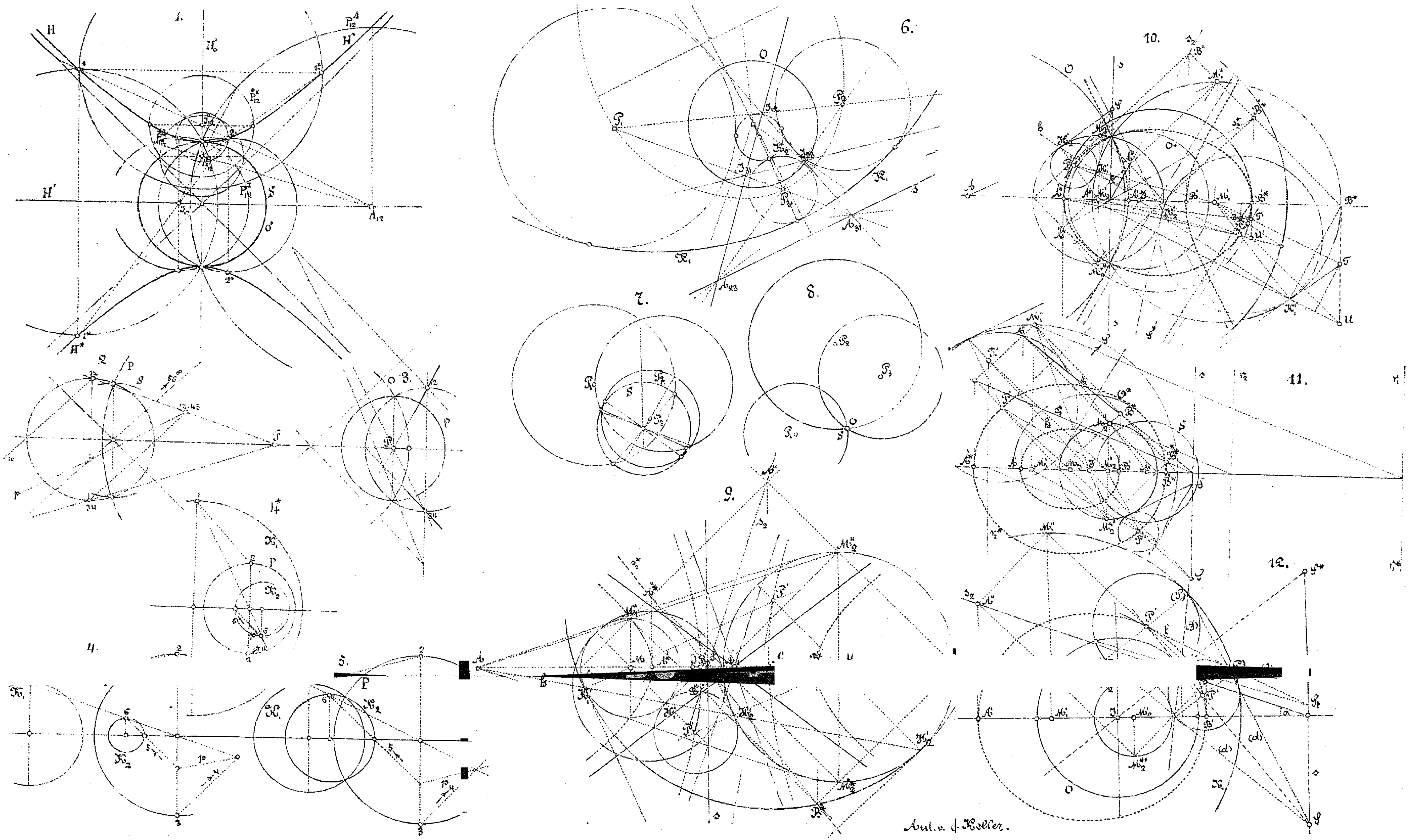
Ich ziehe die bezeichneten Steiner'schen Abhandlungen heran, um an ihren Inhalt kurz zu erinnern und einige specielle Berührungen mit dem Vorigen hervorzuheben. In der ersten «Geom. Sätze», p. 38—52 finden wir die fundamentalen Sätze von den perspectivischen Dreiecken und Tetraedern und ihre Anwendung auf die Durchdringung von Kegeln in ebenen Curven mit Erweiterung auf Flächen zweiten Grades und Rückwärtsanwendung dessen auf Kegelschnitte.

Die zweite «Einige geom. Betrachtungen», p. 161—184, 252—288, handelt von der Potenz bei Kreisen in einer Ebene, von den Aehnlichkeitspunkten und Aehnlichkeitslinien bei solchen Kreisen, von der gemeinschaftlichen Potenz von Kreisen und den Potenzkreisen derselben. Ich citire von da die ganz hierher gehörenden Sätze: «Alle Kreise, von denen jeder zwei gegebene gleichartig (ungleichartig) berührt, haben den äusseren (inneren) Aehnlichkeitspunkt derselben zum Punkt der gleichen Potenzen; ihre Potenzlinien in Paaren gehen durch diesen Punkt. Sie haben die Potenzlinie der gegebenen Kreise zur gemeinschaftlichen Aehnlichkeitslinie.» Man sieht, der zugehörige Kegelschnitt wird nicht erwähnt. (Vergl. Art. 10—15.) Dann folgt (p. 178) die Verallgemeinerung und geometrische Lösung der Malfatti'schen Aufgabe, auf die ich hier nicht eintrete. Die Fortsetzung bringt hauptsächlich die Verallgemeinerung eines von Pappus überlieferten alten Satzes, und ihr Inhalt steht, wie man nun sieht, mit unserer Kegelschnitttheorie in engster, bisher unbeachteter Verbindung. (Vergl. Art. 14, zweite Hälfte und Art. 21 Schluss; dazu das Citat nach Steiner am Schluss des Art. 23.) Der Satz am Schluss des Art. 20 oben findet sich in der Note Steiner's auf p. 279 a. a. O. unter 1) und wird sofort auf Flächen zweiten Grades erweitert. Auf den Inhalt des Art. 22 brauche ich nicht weiter einzutreten. Nimmt man hinzu, dass diese Steiner'schen Abhandlungen dem sachverständigen Leser überall die Vermuthung aufdrängen, dass auch die Theorie der Abbildung durch reciproke Radien ihrem Autor schon um jene Zeit bekannt gewesen sei — die ich hier so natürlich als enthalten in der Schöpfung des Begriffs der gemeinsamen Potenz zweier Kreise aufgewiesen habe — so ist die Verbindung dieser wichtigen Arbeiten mit meinem heutigen Thema hinreichend offenbar. Und es ist nur noch Plücker's Antheil an demselben zu besprechen.

25. Schon im ersten Bande von «Analytisch-geometrische Entwicklungen von J. Plücker» (Essen 1828) von 1827 finden wir zahlreiche Coincidenzen, von denen nur einiges Wenige hervorgehoben werden mag. Der Abschnitt «Zur Theorie des Kreises» hat in No. 195 den Satz (p. 106) «Wenn beliebig viele Kreise zwei gegebene feste Kreise auf dieselbe Weise berühren, so ist das Verhältniss des Radius zum Abstande des Mittelpunktes von der Chordale der festen Kreise ein constantes»; und in No. 196 den, dass die Aehnlichkeitspunkte auf der Chordale der gegebenen Kreise liegen. Schon vorher enthalten No. 184 und No. 185 die Lehre von den Potenzkreisen zu drei Kreisen in Paaren (obwohl nicht erschöpfend) und zwar an erster Stelle in folgender, offenbar die Theorie der reciproken Radien enthaltender Fassung: «Wenn ein Kreis gegeben und ein zweiter beliebig angenommen wird, so befinden sich die zugeordneten Pole aller Punkte, die auf dem Umfange des letztern liegen, auf dem Umfange eines dritten Kreises. Alle drei Kreise haben dieselbe Chordale und der Mittelpunkt des ersten ist einer der Symmetral- (Aehnlichkeits-) Punkte der beiden andern. Wenn der beliebig angenommene Kreis durch den Mittelpunkt des gegebenen geht, so geht der dritte Kreis in eine Gerade über, die Chordale der beiden ersten; und umgekehrt, die zugeordneten Pole aller Punkte einer geraden Linie liegen auf dem Umfange eines Kreises, der durch den Mittelpunkt des gegebenen geht. Ferner — und diess ist in etwas zu berichtigen und führt damit (Art. 4) auf den wichtigen Umstand, dass bei reciproken Radien die Drehung der Figur um 180° genügt, um die Construction für imaginären Grundkreis vom Radius ri an dem Grundkreis

mit dem reellen Radius r machen zu dürfen — wenn zwei Kreise gegeben sind, so giebt es zwei andre Kreise, für welche sie conjugirt sind; je nachdem sie sich schneiden, berühren oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben, sind diese Kreise beide reell, einer derselben geht in einen Punkt über oder wird imaginär.» Plücker hat auch die Abbildung durch reciproke Radien als «neues Uebertragungsprincip» zuerst veröffentlicht in Bd. 11 von Crelle's Journal p. 219 bis 225 (1831). Vorher und später von No. 212 ab findet sich in den «Analytisch-geom. Entwicklungen» die Theorie der Kreise unter gleichen Winkeln, die in No. 217 zu Constructionen entwickelt wird.

Im zweiten Bande desselben Werkes (1831) finden wir in No. 578 z. B. die Lösung des Problems «Einen Kegelschnitt durch drei Punkte und einen Brennpunkt zu bestimmen», welche sich mit anderen auch aus unserer Theorie ergiebt: Man beschreibt die Kreise aus den drei Punkten durch den Brennpunkt und bestimmt ihre Aehnlichkeitsaxen; sie sind die dem Brennpunkt entsprechenden Directricen der vier gesuchten Kegelschnitte. (Vergl. Figur 6 unter Zuziehung von Art. 16.) Diess darf genügen. Die weitere Vergleichung wird das Gesagte bestätigen, aber ich hoffe, dass sie auch geeignet ist, die Nützlichkeit meiner Abbildungsidee zu zeigen, welche so Vieles und scheinbar so Entlegenes in eine höchst einfache Anschauung zusammenfasst und nach einheitlicher Methode, der Methode der darstellenden Geometrie, daraus hervorgehen lässt. In dieser Verbindung ist sie nicht bloss ein Princip zur Entdeckung einer Fülle von Sätzen, sondern sie führt auch zur Aufstellung derjenigen Begriffe, durch welche der planimetrische Beweis der entdeckten Sätze am besten geführt werden kann.



Aut. v. J. Keller.