Die einander doppelt conjugirten Elemente in reciproken Systemen

von **Joh. Keller.**

Ebene Systeme.

Das Gebiet unserer Untersuchungen sind zwei ineinanderliegende reciproke ebene Elementarsysteme. Bezeichnen $x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3; - x'_1, x'_2, x'_3; \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ beziehungsweise die projektivischen Coordinaten eines Punktes und einer Geraden der 2 Ebenen, so wird die Projektivität der beiden Systeme in der allgemeinsten Form ausgedrückt durch die zwei Gleichungen*)

$$1) \quad \begin{cases} m\,\xi'_i = \alpha_{i1}\,x_1 + \alpha_{i2}\,x_2 + \alpha_{i3}\,x_3 & (i = 1, 2, 3) \\ n\,\xi_k = \alpha_{1k}\,x'_1 + \alpha_{2k}\,x'_2 + \alpha_{3k}\,x'_3 & (k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

wobei m und n beliebige Parameter bezeichnen.

Sucht man die Punkte der ungestrichenen Ebene auf, die auf ihren entsprechenden Geraden der gestrichenen liegen, so findet man als ihren Ort einen Kegelschnitt, den Polkegelschnitt, von der Gleichung:

$$2) \quad \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})\,x_2x_3 + (\alpha_{31} + \alpha_{13})\,x_3x_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\,x_1x_2 = 0.$$

Ferner umhüllen die Geraden der gestrichenen Ebene, welche durch ihre entsprechenden Punkte der ungestrichenen gehen, ebenfalls einen Kegelschnitt, den Polarkegelschnitt, von der Gleichung:

$$3) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \alpha_{31}, & \xi_1 \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \alpha_{32}, & \xi_2 \\ \alpha_{13}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

*) Fiedler, Darst. Geom. u. Geom. d. Lage. Leipzig 1875. p. 598.

Diese zwei Kegelschnitte berühren einander doppelt und sie können geradezu als das Erzeugniss der 2 reciproken Systeme angesehen werden. Sie sind nicht nothwendig reell; ihre Reellität aber ist eine gegenseitige. Wenn sie imaginär sind, so werden sie durch die zwei Systeme vertreten, deren Projektivitätsbeziehung durch vier Paare entsprechender Elemente bestimmt wird. Alle Construktionen, die unter zu Hülfenahme der zwei Kegelschnitte sich mehr oder weniger einfacher gestalten würden, können dann ebenso sicher direct durch Vermittelung dieser Bestimmungselemente ausgeführt werden. Es ist hier noch am Platze zu bemerken, wenn in Gl. 1) die Voraussetzung eingeführt wird, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, dass dann diese allgemeine Reciprocität in die gewöhnliche Polar-Reciprocität übergeht; Pol- und Polarkegelschnitt vereinigen sich in die Directrix derselben.

Man kann nun einen Punkt P der zwei vereinigten reciproken Ebenen sowohl zum ersten als auch zum zweiten Systeme rechnen; dann entspricht ihm in beiderlei Sinn je eine Gerade; diese zwei Geraden, die im Allgemeinen von einander verschieden sind, schneiden sich in einem Punkte P^*, welcher der doppelt conjugirte Punkt zu P genannt werden soll. Analog entsprechen einer Geraden g in beiderlei Sinn der Beziehung zwei Punkte, deren Verbindungsgerade g^* die doppelte conjugirte Gerade zu g ist. Die Untersuchung dieser doppelt conjugirten Elemente bildet den Inhalt dieser Abhandlung und zwar wollen wir uns hier auf den Fall zweier doppelt conjugirten Punkte beschränken.

Sind A_2, A_3 (Fig. 1) die Berührungspunkte des Pol- und Polarkegelschnittes, α'_2, α'_3 die gemeinsamen Tangenten resp. in ihnen, ferner A_1 der Schnittpunkt der letzteren und α'_1 die Verbindungsgerade der ersteren, so erkennt man, dass die Elemente des Dreieckes $A_1 A_2 A_3$ solche sind, die sich reciprok involutorisch entsprechen, d. h.: zählt man die Punkte A_1, A_2, A_3 zur gestrichenen oder zur ungestrichenen Ebene, in beiderlei Sinn entsprechen ihnen resp. die Geraden $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ und umgekehrt; eine einfache analytische Untersuchung zeigt, dass diess auch die einzigen Elemente der Ebene von dieser besondern Eigenschaft sind. Auch wenn Pol- und Polarkegelschnitt imaginär sind, so sind doch immer A_1 und α'_1 reell. Wir setzen hiermit die Reellität der zwei Kegelschnitte und damit auch des ganzen Dreieckes $A_1 A_2 A_3$ voraus und wählen dasselbe zum Fundamentaldreieck, wodurch die Projektivitätsgleichungen der 2 Ebenen, sowie die Pol- und Polarkegelschnittsgleichung bedeutend vereinfacht werden. Die ersteren lauten:

$$4) \quad \begin{cases} m\,\xi'_1 = \alpha_{11}\,x_1\,;\; m\,\xi'_2 = \alpha_{23}\,x_3\,;\; m\,\xi'_3 = \alpha_{32}\,x_2 \\ n\,\xi_1 = \alpha_{11}\,x'_1\,;\; n\,\xi_2 = \alpha_{32}\,x'_3\,;\; n\,\xi_3 = \alpha_{23}\,x'_2\,; \end{cases}$$

die letzteren:

$$5) \quad \alpha_{11}\,x_1^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})\,x_2\,x_3 = 0;\quad \alpha_{23}\,a_{32}\,\xi_1^2 - \alpha_{11}(\alpha_{23} + \alpha_{32})\,\xi_2\xi_3 = 0$$

oder die Polarkegelschnittsgleichung in Punkt-Coordinaten:

$$\alpha_{11}\,(\alpha_{23} + \alpha_{32})\,x_1^2 + 4\,\alpha_{23}\,\alpha_{32}\,x_2 x_3 = 0.$$

Hieraus erkennt man deutlich die Beziehung der 2 Kegelschnitte zum Fundamentaldreieck.

Es habe nun ein Punkt P die Coordinaten y_1, y_2, y_3, so entsprechen ihm nach 4) in beiderlei Sinn der Beziehung die 2 Geraden

$$6) \quad \begin{cases} \alpha_{11}\,y_1\,x_1 + \alpha_{23}\,y_3\,x_2 + \alpha_{32}\,y_2\,x_3 = 0 \\ \alpha_{11}\,y_1\,x_1 + \alpha_{32}\,y_3\,x_2 + \alpha_{23}\,y_2\,x_3 = 0; \end{cases}$$

dieselben schneiden sich in dem doppelt conjugirten Punkte P^* von den Coordinaten:

$$y_1^* : y_2^* : y_3^* = -(\alpha_{23} + \alpha_{32})\,y_2\,y_3 : \alpha_{11}\,y_1\,y_2 : \alpha_{11}\,y_1\,y_3$$

oder wenn wir $-(\alpha_{23}+\alpha_{32})=m$ setzen

$$y_1^*:y_2^*:y_3^* = m\,y_2\,y_3 : \alpha_{11}\,y_1\,y_2 : \alpha_{11}\,y_1\,y_3$$

oder

$$7)\quad y_1^*:y_2^*:y_3^* = \frac{m}{y_1} : \frac{\alpha_{11}}{y_3} : \frac{\alpha_{11}}{y_2}\,.$$

Gleichung 7) drückt also die Beziehung aus, welche zwei conjugirte Punkte P und P^* mit einander verbindet. Wir wollen die Bezeichnung einführen, P repräsentire das erste, P^* das zweite System. — Zuerst ergibt sich, dass die Correspondenz zwischen P und P^* eine rationale ist, denn im Allgemeinen entspricht nicht nur einem Punkte des ersten Systems ein und nur ein Punkt des zweiten, sondern auch umgekehrt; ferner ist die Beziehung eine involutorische, denn rechnen wir y_i^* zum ersten System, entspricht ihm ein Punkt z_i^* von den Coordinaten

$$\begin{aligned} z_1^*:z_2^*:z_3^* &= m\,y_2^*\,y_3^* : \alpha_{11}\,y_1^*\,y_2^* : \alpha_{11}\,y_1^*\,y_3^* \\ &= m\,\alpha_{11}^2\,y_1^2\,y_2\,y_3 : m\,\alpha_{11}^2\,y_1\,y_2^2\,y_3 : m\,\alpha_{11}^2\,y_1\,y_2\,y_3^2 \\ &= y_1 : y_2 : y_3 \end{aligned}$$

d. h. der Punkt z_i^* fällt wieder mit dem Punkt y_i zusammen.

Durch Addition und Subtraktion der zwei Gleichungen 6) ergeben sich die zwei neuen Gleichungen:

$$\begin{gathered} 2\,\alpha_{11}\,y_1\,x_1 + (\alpha_{23}+\alpha_{32})\,(y_3\,x_2 + y_2\,x_3) = 0 \\ y_3\,x_2 - y_2\,x_3 = 0. \end{gathered}$$

Dieselben stellen Gerade dar durch den Punkt P^*; die erstere ist die Polare des Punktes P in Bezug auf den Polkegelschnitt; die letztere geht durch A_1; P^* liegt daher mit P auf einer Geraden aus A_1 und ferner auf der Polaren von P in Bezug auf den Polkegelschnitt.

Specielle Lagen des Punktes P.

I. P liege in den Fundamentalecken A_1, A_2, A_3.

Dem Punkte A_1 entspricht in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung die Gerade $A_2 A_3$; also ist der entsprechende Punkt zu A_1 auf $A_2 A_3$ gelegen, dort aber unbestimmt; umgekehrt, irgend einem Punkte auf $A_2 A_3$ entspricht der Punkt A_1. Analog entspricht dem Punkte A_2 irgend ein Punkt auf der Geraden $A_1 A_2$ und dem Punkte A_3 irgend ein Punkt auf $A_1 A_3$ und umgekehrt. Bei dieser Correspondenz, die wir als eine Cremona'sche Transformation bezeichnen können, sind somit A_1, A_2, A_3 die drei Hauptpunkte und α'_1, α'_2, α'_3 die ihnen entsprechenden Geraden.

II. P liege auf dem Polkegelschnitt K.

Alsdann ist nach 5) $\alpha_{11} y_1{}^2 - m y_2 y_3 = 0$, somit $m = \frac{\alpha_{11} y_1{}^2}{y_2 y_3}$ und daher

$$\begin{aligned} y_1{}^* : y_2{}^* : y_3{}^* &= \frac{\alpha_{11} y_1{}^2}{y_2 y_3} y_2 y_3 : \alpha_{11} y_1 y_2 : \alpha_{11} y_1 y_3 \\ &= y_1 : y_2 : y_3 \end{aligned}$$

d. h. P^* fällt mit P zusammen, was auch geometrisch sofort klar ist, denn die zwei dem Punkte P in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung entsprechenden Geraden gehen durch ihn selbst hindurch; es sind die zwei durch ihn an den Polarkegelschnitt gehenden Tangenten.

III. P durchlaufe eine beliebige Gerade g.

Ist $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$ die Gleichung der Geraden, so ergiebt sich mittelst der Gleichung (7), dass die Punkte P_i^*, die den Punkten P_i der Geraden entsprechen, auf der Curve liegen von der Gleichung:

$$8) \quad \alpha_2 \alpha_{11} x_1 x_2 + \alpha_1 m x_2 x_3 + \alpha_3 \alpha_{11} x_3 x_1 = 0.$$

Dieselbe stellt einen Kegelschnitt dar, der durch die drei Hauptpunkte A_1, A_2, A_3 geht. Wir diskutiren nun diesen Kegelschnitt, indem wir specielle Lagen der Geraden g betrachten.

1) g gehe durch den Punkt A_1.

Dann zerfällt der ihr entsprechende Kegelschnitt in die Gerade $A_2 A_3$ und in g selbst, wie aus dem Früheren geometrisch oder auch aus Gleichung 8) sofort hervorgeht, wenn man dort $\alpha_1 = 0$ setzt. Die sich entsprechenden Punkte P_1, P_1^*; P_2, P_2^*; P_3, P_3^*; ... auf irgend einer Geraden durch A_1 bilden eine Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte der Geraden mit dem Polkegelschnitt sind. Die Involution ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem die Gerade den Polkegelschnitt schneidet, berührt oder gar nicht trifft. Da ein beliebiges Paar der Involution mit den Doppelpunkten eine harmonische Gruppe bildet, so folgt: Sucht man auf den Strahlen durch A_1 zu den ∞ fernen Punkten die entsprechenden, so liegen diese in den Mitten der Sehnen, welche der Polkegelschnitt auf diesen Geraden begrenzt. Da nun der ∞ fernen Geraden auch ein Kegelschnitt K^*_∞ entsprechen wird, der durch die Hauptpunkte geht, so folgt der Satz: Wenn man von einem beliebigen Punkte der Ebene aus Strahlen nach einem Kegelschnitt zieht und die Mitten der Sehnen nimmt, welche diese Geraden mit dem Kegelschnitt bestimmen, so liegen dieselben auf einem neuen Kegelschnitt, der durch den Scheitel des Strahlenbüschels geht und mit dem gegebenen Kegelschnitt entweder zwei, einen (Berührung) oder keinen reellen Punkt gemeinsam hat, je nachdem der angenommene Punkt ausserhalb, auf oder im Innern des gegebenen Kegelschnittes liegt. Für parallele

Strahlen degenerirt der Kegelschnitt in einen Durchmesser des gegebenen und in die ∞ ferne Gerade. Auf diesen Kegelschnitt K^*_∞ kommen wir bald wieder zurück.

2) g gehe durch den Punkt A_2.

Dann ist $\alpha_2 = 0$; führen wir diese Voraussetzung in der Gleichung 8) ein, so wird sie:

$$\alpha_1\, m\, x_2\, x_3 + \alpha_3\, \alpha_{11}\, x_1\, x_3 = 0$$

oder:

$$x_3 = 0;\ \alpha_1\, m\, x_2 + \alpha_3\, \alpha_{11}\, x_1 = 0.$$

Der Kegelschnitt degenerirt in die Gerade $A_1\, A_2$ und in eine Gerade durch A_3, welche keine andere ist, als die Verbindungslinie von A_3 mit dem zweiten Schnittpunkte von g mit dem Polkegelschnitt. Dem Strahlenbüschel g_i vom Scheitel A_2 entspricht also das Strahlenbüschel g_i^* vom Scheitel A_3; zu jedem Strahl g^* gehört dann eigentlich noch die Gerade $A_1 A_2$ als Rest des Kegelschnittes, welcher g entspricht. Die beiden Büschel der g_i und der g_i^* sind projektivisch; ihr Erzeugniss ist der Polkegelschnitt. Nehmen wir umgekehrt die Geraden $g_i^* \equiv l_i$ durch A_3 als Ausgangsstrahlen an, so entsprechen ihnen die Strahlen $g_i \equiv l_i^*$ durch A_2. Dem Strahle $A_2\, A_3$ entsprechen in beiderlei Sinn die Geraden $A_1\, A_3$ und $A_1 A_2$. Die Reihen entsprechender Punkte auf g und g^* sind perspektivisch; ihre Gegenpunkte Q^*, R liegen auf dem vorhin erwähnten Kegelschnitte K^*_∞.

Durch das Vorige ergibt sich jetzt eine einfache Construktion des entsprechenden Punktes zu einem beliebig gegebenen: Ist P der gegebene Punkt, so verbinde man ihn mit A_2 und nehme zu der Geraden PA_2 die entsprechende, dann schneidet der Strahl $A_1\, P$ aus dieser Geraden den entsprechenden Punkt P^* heraus; wie A_2, so kann man auch A_3 benutzen und erhält für die richtige Lage von P^* eine Probe.

3) g habe eine beliebige Lage.

Der Kegelschnitt K^*, welcher einer beliebigen Lage von g entspricht, geht durch A_1, A_2, A_3 und es können von ihm beliebig viele weitere Punkte ermittelt werden. Mit Leichtigkeit ergeben sich die Tangenten in den drei Hauptpunkten an ihn: Die allgemeine Construktion des entsprechenden Punktes zu einem gegebenen lehrt sofort, dass die Tangente in A_1 an K^* durch den Schnittpunkt von $A_2 A_3$ mit g geht; dass ferner die Tangenten in A_2 und A_3 erhalten werden als die entsprechenden Geraden zu denjenigen, die resp. von A_3, A_2 aus nach den Schnittpunkten von $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ mit g gehen. Natürlich geht K^* auch durch die zwei Schnittpunkte von g mit dem Polkegelschnitt; wenn g den Polkegelschnitt berührt, so berührt ihn auch K^* an derselben Stelle. Diese Construktion erleidet keine Ausnahme für den Kegelschnitt K^*_∞, welcher der ∞ fernen Geraden entspricht; die Tangente in A_1 an ihn wird parallel zu $A_2 A_3$. Damit ist für irgend eine Gerade g der entsprechende Kegelschnitt mehr als genügend bestimmt.

Es ist noch von Interesse, über die Construktion der Tangente in einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes K^* Folgendes zu bemerken: Die Punkte auf g und die Tangenten in den entsprechenden Punkten auf K^* bilden zwei projektivische Systeme. Zu den drei Punkten I, II, III auf g sind nach Vorigem die drei entsprechenden Tangenten 1, 2, 3 in A_1, A_2, A_3 bekannt; schneiden wir nun diese Tangenten mit 1, so bilden die Schnittpunkte I′, II′, III′, mit I, II, III zwei projektivische Reihen, deren perspektivische Axe die Polare des Schnittpunktes I der Tangente in A_1 mit g in Bezug auf den Kegelschnitt K^* ist; weil nun dieser Schnittpunkt dieselbe Polare hat in Bezug auf den Polkegelschnitt und den Kegelschnitt K^*, so folgt, dass die zwei Schnittpunkte T_2 und T_3 der Tangenten in A_2 und A_3 an K^* mit dem Polkegelschnitt auf einer Geraden nach I liegen und dass die vorige Polare durch den Schnittpunkt von $A_2\,T_3$ mit $A_3\,T_2$ geht. Durch Vermittelung dieser Polare kann man aber die Tangente in einem beliebigen Punkte von K^* finden. — Den Tangenten an K^* in $P_1{}^*$, $P_2{}^*$, $P_3{}^*, \ldots$ entsprechen Kegelschnitte, welche durch A_1, A_2, A_3 gehen und die Gerade g resp. in $P_1, P_2, P_3, \ldots$ berühren. Darunter kommen vier Parabeln vor, die den vier gemeinsamen Tangenten von K^* und K^*_∞ entsprechen.

Die Kegelschnitte, welche den Geraden der Ebene entsprechen, müssen ein System von zweifacher Unendlichkeit bilden; da nun ein Kegelschnitt erst durch fünf von einander unabhängige Elemente bestimmt ist, so müssen alle diese Kegelschnitte drei gemeinsame Bestimmungselemente haben: Sie gehen durch die drei Hauptpunkte $A_1\,A_2\,A_3$. Um die Gesammtheit dieser Kegelschnitte genauer überblicken zu können, betrachten wir ein Strahlenbüschel vom Scheitel S (Fig. 2), dem ein Kegelschnittbüschel von den vier Grundpunkten A_1, A_2, A_3, S^* entspricht. Liegt S im Innern des Kegelschnittes K^*_∞, so trifft jeder Strahl des Büschels diesen Kegelschnitt in zwei reellen verschiedenen Punkten, deren entsprechende im Unendlichen liegen; also besteht in diesem Fall das Kegelschnittbüschel aus lauter Hyperbeln; unter ihnen kommt eine einzige gleichseitige vor, die dem Strahl entspricht, welcher S mit dem Pole P der Rechtwinkelinvolution von Strahlen aus A_1, übertragen auf den Kegelschnitt K^*_∞, verbindet. Liegt S in P selbst, so besteht das Kegelschnittbüschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln; der dem Punkte P entsprechende vierte Grundpunkt des Büschels ist der Höhenpunkt des Dreieckes $A_1 A_2 A_3$. Ferner gibt es in jedem der Kegelschnittbüschel höchstens zwei Hyperbeln von gegebenem Asymptotenwinkel, die in folgender Weise gefunden werden können: Wir bilden um den Punkt A_1 zwei gleichwinkelige projektivische Büschel $a, b, c, \ldots$; $a', b', c', \ldots$, so dass der Winkel zwischen je zwei entsprechenden Strahlen gleich dem gegebenen Asymptotenwinkel ist; verbinden wir jetzt die Schnittpunkte A, A'; B, B'; C, C'; ... entsprechender Strahlen mit dem Kegelschnitt K^*_∞, so umhüllen die Sehnen einen neuen Kegelschnitt, welcher K^*_∞ doppelt berührt; die zwei Tangenten von S aus an diesen Kegelschnitt liefern die zwei gesuchten Hyperbeln. Den drei Strahlen SA_1, SA_2, SA_3 entsprechen die degenerirten Kegelschnitte des Büschels. Wenn S auf K^*_∞ liegt, ist S^* im Unendlichen gelegen d. h. das Kegelschnittbüschel besteht aus Hyperbeln mit einer gemeinsamen Asymptotenrichtung; unter ihnen kommt eine einzige Parabel vor, die der Tangente in S an K^*_∞ entspricht. Ist S ausserhalb K^*_∞ gelegen, so enthält das entsprechende Kegelschnittbüschel unendlich viele Ellipsen und unendlich viele Hyperbeln, sowie stets noch zwei Parabeln. Dem Kreise K, welcher dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umschrieben werden kann, entspricht eine Gerade k^*, deren Richtung bestimmt wird durch den vierten Schnittpunkt des Kreises mit dem Kegelschnitt K^*_∞; ferner ist der Schnittpunkt der Kreistangente in A_1 mit $A_2 A_3$ ein weiterer Punkt von ihr. Es ist diese Gerade k^* die einzige in der Ebene, der ein Kreis entspricht; sie ist die Polare des Poles P in Bezug auf K^*_∞; denn K geht durch die zwei imaginären Kreispunkte der unendlich fernen Geraden; nach diesen gehen auch die Doppelstrahlen der Rechtwinkelinvolution um A_1 herum; diese Doppelstrahlen entsprechen sich aber selbst, folglich schneiden sie aus K^*_∞ die entsprechenden Punkte zu den imaginären Kreispunkten; ihre Verbindungslinie ist die Polare von P in Bezug auf K^*_∞.

IV. P bewege sich auf einem Kegelschnitte K.

Es ist:

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + 2\alpha_{23}x_2x_3 = 0$$

die Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes; durch Anwendung der Gleichung 7 entspricht demselben die Curve 4. Ordnung:

$$9)\quad \alpha_{11}m^2x_2^2x_3^2 + \alpha_{22}\alpha_{11}^2x_1^2x_2^2 + \alpha_{33}\alpha_{11}^2x_1^2x_3^2 + 2\alpha_{12}m\alpha_{11}x_1x_2^2x_3 + 2\alpha_{13}m\alpha_{11}x_1x_2x_3^2 + 2\alpha_{23}\alpha_{11}^2x_1^2x_2x_3 = 0.$$

Der Natur der Sache nach muss dieselbe zu den rationalen Curven 4. Ordnung gehören: Sie besitzt in den drei Hauptpunkten Doppelpunkte. Die Tangenten in denselben sind dargestellt durch die Gleichungen:

$$10)\quad \begin{cases} \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{23}x_2x_3 + \alpha_{33}x_3^2 = 0 & \text{Gl. des Tangentenpaares in } A_1 \\ \alpha_{22}\alpha_{11}^2x_1^2 + 2\alpha_{12}m\alpha_{11}x_1x_3 + \alpha_{11}m^2x_3^2 = 0 & \text{dto. dto.} \quad „\ A_2 \\ \alpha_{33}\alpha_{11}^2x_1^2 + 2\alpha_{13}m\alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{11}m^2x_2^2 = 0 & \text{dto. dto.} \quad „\ A_3 \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich: Je nachdem $\alpha_{23}^2 \gtreqless \alpha_{22}\alpha_{33}$, ist A_1 ein Doppelpunkt der Curve 4. Ordnung mit zwei reellen verschiedenen Tangenten, oder er ist eine Spitze oder isolirt; analog beziehen sich die Bedingungen $\alpha_{12}^2 \gtreqless \alpha_{11}\alpha_{22}$, $\alpha_{13}^2 \gtreqless \alpha_{11}\alpha_{33}$ resp. auf die Punkte A_2 und A_3. — Wir diskutiren nun diese Curve 4. Ordnung weiter, indem wir specielle Lagen des Kegelschnittes K annehmen.

1) Der Kegelschnitt gehe durch die drei Hauptpunkte.

Dann sind $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$; die Curve 4. Ordnung zerfällt in die drei Hauptgeraden $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ und es bleibt nach 9) noch die Gerade übrig:

$$11)\quad \alpha_{23}\,\alpha_{11}\,x_1 + \alpha_{12}\,m\,x_2 + \alpha_{13}\,m\,x_3 = 0.$$

Diese Beziehung ist durch das Vorige bereits erledigt; die Tangenten des Kegelschnittes in A_1, A_2, A_3 liefern die Schnittpunkte der Geraden mit $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ resp.

2) Der Kegelschnitt gehe durch die 2 Hauptpunkte A_2, A_3.

Dann sind $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ und die Gleichung 9) reducirt sich auf:

$$12)\quad x_2 x_3 (\alpha_{11} m^2 x_2 x_3 + 2\,\alpha_{12} m \alpha_{11} x_1 x_2 + 2\,\alpha_{13} m \alpha_{11} x_1 x_3 + 2\,\alpha_{23}\,\alpha_{11}^2 x_1^2) = 0.$$

Von der Curve 4. Ordnung sondern sich also die beiden Geraden α'_2 und α'_3 ab und es bleibt noch ein Kegelschnitt übrig, der ebenfalls durch die zwei Hauptpunkte A_2, A_3 geht; z. B. dem Polkegelschnitt entspricht eine Curve 4. Ordnung, die sich aus ihm selbst und den zwei Geraden α'_2, α'_3 zusammensetzt. Der Kegelschnitt 12) mag der entsprechende Kegelschnitt K^* zu dem gegebenen K genannt werden. Die Schnittpunkte von K mit α'_2 und α'_3 liefern die Tangenten an K^* resp. in A_2 und A_3. Durch A_2 und A_3 gehen dreifach unendlich viele Kegelschnitte; unter ihnen gibt es solche, die sich selbst entsprechen und die auf folgende Weise leicht gefunden werden können: Wir nehmen irgend zwei entsprechende Punkte P und P^*, dann entspricht jeder Kegelschnitt des Büschels von den vier Grundpunkten A_2, A_3, P, P^* sich selbst und zwar ist ein solcher Kegelschnitt in involutorischer Central-Collineation mit sich selbst in Bezug auf A_1 als Centrum und der Polaren von A_1 in Bezug auf ihn als Axe: Denn ein Kegelschnitt durch $A_1\,A_2$, P, P^*

trifft den Polkegelschnitt noch in zwei weiteren Punkten S_1 und S_2, die sich selbst entsprechen und durch welche somit der entsprechende Kegelschnitt K^* auch geht; K^* hat also mit K 6 Punkte gemeinsam, fällt daher mit ihm zusammen. Ein analytischer Beweis für die Sache wäre sehr leicht erbringlich und derselbe würde alles Bedenken namentlich in dem Falle wegheben, wenn S_1 und S_2 imaginär sind. Die Gerade $S_1 S_2$ ist die Polare von A_1 in Bezug auf einen solchen sich selbst entsprechenden Kegelschnitt und folglich schneiden sich die Tangenten in S_1, S_2 an den Kegelschnitt in A_1. Nehmen wir P auf K^*_∞ an, so liegt sein entsprechender Punkt P^* im Unendlichen; durch P gehen somit unendlich viele Hyperbeln, die sich selbst entsprechen, darunter auch eine gleichseitige, die leicht durch Vermittelung des Poles P der Rechtwinkelinvolution aus A_1, übertragen auf K^*_∞, gefunden wird; ebenso gehen durch P zwei sich selbst entsprechende Hyperbeln von gegebenem Asymptotenwinkel; endlich geht durch P eine sich selbst entsprechende Parabel. Dem Kreisbüschel durch A_2, A_3 entspricht das Kegelschnittbüschel durch $A_2 A_3$ und durch die zwei imaginären Schnittpunkte von k^* mit K^*_∞; im Allgemeinen gibt es somit darunter keinen sich selbst entsprechenden Kreis.

3) Der Kegelschnitt gehe durch die zwei Hauptpunkte A_1, A_2.

Einem Kegelschnitt durch A_1, A_2 entspricht eine Curve 4. Ordnung, welche in die 2 Geraden α'_1, α'_2 und in einen Kegelschnitt durch A_1, A_3 zerfällt; diesen Kegelschnitt nennen wir den entsprechenden zu dem gegebenen. Irgend ein Kegelschnitt durch A_1, A_2 wird aus dem Polkegelschnitt mindestens noch einen reellen Punkt S heraus-schneiden; diesen halten wir fest, und betrachten die Kegelschnitte, welche durch A_1, A_2, S gehen und in A_1 eine bestimmte Tangente t_1 besitzen; denselben entsprechen die Kegelschnitte durch A_1, A_3, S und durch den Schnittpunkt T_1 der Tangente t_1 in A_1 an K mit α'_1. Dem degenerirten Kegelschnitt $A_2\,S$, t_1 entspricht der degenerirte Kegelschnitt $A_3\,S$, $A_1\,T_1$; ferner dem degenerirten Kegelschnitt $A_2\,A_1$, $S\,A_1$ der degenerirte Kegelschnitt $T_1\,A_3$, $S\,A_1$; im ersten Büschel kommt jetzt kein degenerirter Kegelschnitt mehr vor, wohl aber im zweiten, nämlich das Geradenpaar $A_1\,A_3$, $T_1\,S$; demselben entspricht im ersten Büschel ein wirklicher Kegelschnitt, nämlich derjenige, der durch A_3 geht. Je nachdem ein Kegelschnitt durch $A_1\,(t_1)$, A_2, S den Kegelschnitt K^*_∞ ausser in A_1, A_2 noch in zwei reellen und verschiedenen, in zwei zusammenfallenden oder in zwei imaginären Punkten schneidet, ist der entsprechende Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Die Parabeln und gleichseitigen Hyperbeln können analog wie früher gefunden werden. Durch Drehung der Tangente t_1 um A_1 erhalten wir alle Kegelschnitte durch A_1, A_2, S in Büschel geordnet und durch Veränderung des Punktes S auf dem Polkegelschnitt alle Kegelschnitte durch A_1, A_2 in Netze gruppirt. Unter ihnen kommen zweifach unendlich viele Kegelschnitte vor, denen gleichseitige Hyperbeln und ebenso zweifach unendlich viele Kegelschnitte, denen Parabeln entsprechen. Den Kreisen durch A_1, A_2 entsprechen die Kegelschnitte des Büschels von den zwei reellen Grundpunkten A_1, A_3, dessen zwei andere Grundpunkte imaginär, nämlich die imaginären Schnittpunkte von k^* mit K^*_∞ sind. — Damit ist auch die umgekehrte Beziehung erledigt: Den Kegelschnitten durch A_1, A_3 entsprechen die durch A_1, A_2.

4) Der Kegelschnitt K gehe nur durch den Hauptpunkt A_1.

Die entsprechende Curve 4. Ordnung, ausgedrückt durch Gleichung 9, zerfällt dann in die Gerade a'_1 und in eine Curve 3. Ordnung (Fig. 4) von der Gleichung:

$$13)\quad a_{22}\alpha_{11}x_1x_2^2 + a_{33}\alpha_{11}x_1x_3^2 + 2a_{12}m\,x_2^2x_3 + 2a_{13}m\,x_2x_3^2 + 2a_{23}\alpha_{11}x_1x_2x_3 = 0.$$

Dieselbe hat in A_1 einen Doppelpunkt; nach 10) ist das Tangentenpaar in demselben ausgedrückt durch die Gleichung:

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

und die Tangenten in A_2, A_3 durch die Gleichungen:

$$a_{22}\alpha_{11}x_1 + 2a_{12}m\,x_3 = 0$$
$$a_{33}\alpha_{11}x_1 + 2a_{13}m\,x_2 = 0.$$

A_1 ist ein Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten, eine Spitze oder ein isolirter Doppelpunkt, je nachdem $a_{23}^2 \gtreqless a_{22}a_{33}$ ist. Die allgemeine Construktion des entsprechenden Punktes zu einem gegebenen zeigt, dass die zwei Schnittpunkte von A_2A_3 mit dem gegebenen Kegelschnitt mit A_1 verbunden die Tangenten in A_1 an die Curve 3. Ordnung geben; man sieht: Je nachdem A_2, A_3 den gegebenen Kegelschnitt schneidet, berührt oder gar nicht trifft, ist A_1 ein Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten, eine Spitze oder isolirt. Die Tangenten in A_2 und A_3 erhalten wir als die entsprechenden Geraden zu denjenigen, welche resp. A_3 und A_2 mit den Schnittpunkten von A_1A_2, A_1A_3 mit dem gegebenen Kegelschnitt verbinden. Diejenigen Punkte des Kegelschnittes, die auf K^*_∞ liegen, verwandeln sich in unendlich ferne Punkte; unsere Curve 3. Ordnung erhält somit einen hyperbolischen Ast, 3 hyperbolische Aeste, einen hyperbolischen und einen parabolischen Ast oder endlich die unendlich ferne Gerade zur Inflexionstangente, je nachdem der gegebene Kegelschnitt den Kegelschnitt K^*_∞ ausser in A_1 resp. noch in einem reellen Punkte schneidet, oder in drei reellen, oder in einem reellen Punkte schneidet und in einem andern berührt oder in einem Punkte osculirt. Wenn wir somit Rücksicht nehmen wollen auf die Natur des Doppelpunktes und auf die unendlich fernen Elemente, so können wir folgende 12 verschiedenen Curven 3. Ordnung hervorbringen:

1) Reeller Knoten und 1 hyperbol. Ast
2) „ „ „ 3 „ Aeste
3) „ „ „ 1 „ und 1 parabol. Ast
4) „ „ „ die unendlich ferne Gerade z. Inflexionstang.

5) Spitze und 1 hyperbol. Ast
6) „ „ 3 „ Aeste
7) „ „ 1 „ und 1 parabol. Ast
8) „ „ die unendlich ferne Gerade zur Inflexionstangente.

9) Isolirter Doppelpunkt und 1 hyperbol. Ast
10) „ „ „ 3 „ Aeste
11) „ „ „ 1 „ und 1 parabol. Ast
12) „ „ „ die unendlich ferne Gerade z. Inflextg.

Von diesen zwölf Fällen ist der erste in Fig. 4 gezeichnet; die Verbindungslinie von A_1 mit dem Schnittpunkte von K mit K^*_∞ gibt die Asymptotenrichtung. Nicht bloss die Tangenten in den Hauptpunkten, sondern auch die Tangente in einem beliebigen Punkte der Curve 3. Ordnung kann construirt werden: Sei P ein beliebiger Punkt des gegebenen Kegelschnittes und P^* sein entsprechender auf der Curve 3. Ordnung, so bestimmen A_1, A_2, A_3, P und die Tangente in P an den Kegelschnitt einen neuen Kegelschnitt, dem eine Gerade entspricht, die Tangente in P^* an die Curve 3. Ordnung.

Führen wir den Kegelschnitt statt durch A_1 durch A_2 oder A_3, so entspricht ihm ebenfalls eine Curve 3.

Ordnung, die in A_3, resp. in A_2 einen Doppelpunkt hat; diese Curven verhalten sich im Uebrigen ganz analog den vorigen. In Fig. 5 ist eine C_3 gezeichnet, die in A_3 einen Doppelpunkt und sonst 3 hyperbolische Aeste besitzt; in Fig. 6 eine, die in A_2 eine Spitze und die ∞ ferne Gerade zur Inflexionstangente hat. Im letzteren Fall ist der Punkt P, der die Inflexion im Unendlichen liefern soll, auf K^*_∞ beliebig angenommen worden; der Kegelschnitt K ist alsdann so zu wählen, dass er K^*_∞ in P osculirt, durch A_3 geht und $A_1 A_2$ berührt; solcher Kegelschnitte gibt es im Allgemeinen zwei, die man mittelst Collineation aus K^*_∞ ableiten kann: für P als Collineationscentrum und PA_3 als Collineationsaxe: Man zieht von dem Schnittpunkte der Geraden $A_3 P$ mit $A_1\, A_2$ an K^*_∞ die zwei möglichen Tangenten und nimmt zu den Berührungspunkten derselben die entsprechend collinearen; dieselben liegen auf $A_1\, A_2$ und sind die Berührungspunkte der zwei möglichen Kegelschnitte K mit $A_1\, A_2$. Es mag noch bemerkt werden, dass je zwei der Schnittpunkte des gegebenen Kegelschnittes mit der ihm entsprechenden Curve 3. Ordnung auf einem Strahl aus A_1 liegen (siehe Fig. 5), weil sich dieselben involutorisch entsprechen. Bei den Schnittpunkten des gegebenen Kegelschnittes mit dem Polkegelschnitt fallen je diese zwei Schnittpunkte zusammen.

5) Der Kegelschnitt K gehe durch keinen der 3 Hauptpunkte.

Dann entspricht ihm eine Curve 4. Ordnung C^*_4, die in den 3 Hauptpunkten Doppelpunkte hat. Die Gleichung dieser Curve, sowie die Gleichungen der Tangenten in den Doppelpunkten sammt den Bedingungen ihres Reellseins sind früher schon in Gleichung 9) und 10) aufgestellt worden. Die Construction der Tangenten in den Doppelpunkten, sowie in einem beliebigen Punkte der Curve 4. Ordnung ist analog derjenigen der Curve 3. Ordnung. Nimmt man ausser auf die Natur der drei Doppelpunkte noch Rücksicht auf die unendlich fernen Elemente, so kann man folgende verschiedene Curven 4. Ordnung erhalten:

I.	3	reelle	Knoten		
II.	2	„	„	1 Spitze	
III.	2	„	„	1 isolirter Doppelpunkt	
IV.	1	reeller	„	2 Spitzen	
V.	1	„	„	2 isolirte Doppelpunkte	
VI.	1	„	„	1 Spitze,	1 isolirter Doppelpunkt
VII.	0	reelle	„	3 Spitzen	
VIII.	0	„	„	2 „	1 isolirter Doppelpunkt
IX.	0	„	„	1 Spitze	2 isolirte Doppelpunkte
X.	0	„	„		3 „ „

Jeder dieser 10 Hauptfälle kann dann noch folgende verschiedene unendlich ferne Elemente haben:

1)	4	hyperbolische	Aeste	
2)	2	„	„	
3)	0	„	„	
4)	2	„	„	1 parabolischer Ast
5)	0	„	„	2 parabolische Aeste
6)	1	„	„	die unendlich ferne Gerade zur Inflextg.
7)	0	„	„	1 Berührung 3. Ord. im Unendlichen.

In Fig. 8 ist der Hauptfall I mit 2 hyperbolischen und 1 parabolischen Ast gezeichnet; in Fig. 7 Hauptfall VI mit keinem reellen unendlich fernen Element.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Tangenten von A_1 aus an den gegebenen Kegelschnitt K sich selbst entsprechen, also auch Tangenten an die entsprechende Curve 3. oder 4. Ordnung sind und dass den Tangenten von A_2 und A_3 aus an K resp. die Tangenten von A_3 und A_2 aus an die C^* correspondiren; dass man ferner die Inflexionstangenten dieser Curven 3. Ordnung, sowie auch die Inflexions- und Doppeltangenten der Curven 4. Ordnung finden könnte als die entsprechenden Geraden zu den Kegelschnitten, welche durch A_1, A_2, A_3 gehen und den gegebenen Kegelschnitt osculiren resp. doppelt berühren.

Wie die Curven beschaffen sind, welche Curven von höherer als der 2. Ordnung entsprechen, übersieht man von jetzt ab leicht. Einer Curve der n. Ordnung entspricht eine solche von der Ordnung $2n$; diese hat A_1, A_2, A_3 zu $n$fachen Punkten mit leicht angebbaren Tangenten und kann in Gerade und Curven niedriger Ordnung zerfallen, je nach besonderer Beschaffenheit und Lage der gegebenen Curve n. Ordnung. — Es ist jetzt von grösserem Interesse, zu zeigen, wie eine allbekannte Beziehung als Specialfall aus dieser allgemeinen Beziehung hervorgeht, nämlich der Fall der reciproken Radien.

Specialfall der reciproken Radien.

Der Polkegelschnitt sei ein Kreis und die Gerade $A_2 A_3$ die ∞ ferne.

Das sich involutorisch entsprechende Dreieck $A_1 A_2 A_3$ besteht in diesem Fall aus dem Mittelpunkt des Kreises und den 2 unendlich fernen imaginären Kreispunkten. Um die Transformationsgleichungen für zwei sich entsprechende Punkte abzuleiten, gehen wir aus von den Gleichungen der allgemeinen Reciprocität:

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
\xi'_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
\xi'_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
\end{aligned}$$

und specialisiren dieselben für den Fall, wo der Ecke A_1

die gegenüberliegende Seite a_1 des Fundamentaldreieckes entspricht; den zwei andern Fundamentalecken A_2, A_3 entsprechen alsdann zwei Gerade durch A_1. Die Coordinaten von A_1, A_2, A_3 sind durch folgende Tabelle dargestellt:

	x_1	x_2	x_3
A_1	$\frac{h_1}{e_1}$	0	0
A_2	0	$\frac{h_2}{e_2}$	0
A_3	0	0	$\frac{h_3}{e_3}$

wobei h_i die von A_i ausgehende Höhe und e_i den senkrechten Abstand des Einheitspunktes von der Seite a_i des Fundamentaldreieckes bezeichnen. Hieraus ergeben sich für die entsprechenden Seiten a_1, a_2, a_3 folgende Coordinaten:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
a_1	$a_{11}\frac{h_1}{e_1}$	$a_{21}\frac{h_1}{e_1}$	$a_{31}\frac{h_1}{e_1}$
a_2	$a_{12}\frac{h_2}{e_2}$	$a_{22}\frac{h_2}{e_2}$	$a_{32}\frac{h_3}{e_3}$
a_3	$a_{13}\frac{h_3}{e_3}$	$a_{23}\frac{h_3}{e_3}$	$a_{33}\frac{h_3}{e_3}$

Nun besteht aber infolge unserer Voraussetzungen folgende Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
a_1	$\frac{h_1}{z_1}$	0	0
a_2	0	α_2	β_2
a_2	0	α_3	β_3

Daraus folgt: $a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{13} = 0$ und demnach lauten die Gleichungen der Reciprocität:

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= a_{11}\, x_1 \\ \xi'_2 &= a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \\ \xi'_3 &= a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3. \end{aligned}$$

Die zwei Geraden, welche einem Punkte P von den Coordinaten y_i in doppelter Auffassung entsprechen, haben somit die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}\, y_1\, x_1 + (a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, x_2 + (a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, x_3 &= 0 \\ a_{11}\, y_1\, x_1 + (a_{22}\, y_2 + a_{32}\, y_3)\, x_2 + (a_{23}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, x_3 &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus ergeben sich als die Coordinaten des dem Punkte P doppelt-conjugirten Punktes P^* folgende Werthe:

$$x_1{}^* : x_2{}^* : x_3{}^* = [a_{22}y_2{}^2 + (a_{23} + a_{32})\, y_2 y_3 + a_{33} y_3{}^2] : - a_{11} y_2 : - a_{11} y_3.$$

Indem wir nun weiter annehmen, a_1 sei die ∞ ferne Gerade, führen wir rechtwinkelige Cartesische Coordinaten ein und setzen daher:

$$\frac{x_2{}^*}{x_1{}^*} = x^*; \quad \frac{x_3{}^*}{x_1{}^*} = y^*$$

dann bekommen wir:

$$x^* = \frac{-a_{11}\, x}{a_{22}\, x^2 + (a_{23} + a_{32})\, xy + a_{33}\, y^2}$$

$$y^* = \frac{-a_{11}\, y}{a_{22}\, x^2 + (a_{23} + a_{32})\, xy + a_{33}\, y^2}.$$

Die Gleichung des Polkegelschnittes lautet in diesem Falle:

$$a_{11} + a_{22}\, x^2 + a_{33}\, y^2 + (a_{23} + a_{32})\, xy = 0.$$

Derselbe hat den Coordinatenanfangspunkt zum Mittelpunkte; soll er in einen Kreis übergehen vom Radius r, so muss:

$$a_{23} + a_{32} = 0; \; a_{22} = a_{33}; \; \frac{a_{11}}{a_{22}} = -r^2 \text{ sein.}$$

Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= r^2 \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y^* &= r^2 \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\}$$ und diess sind die Transformationsgleichungen der Theorie der reciproken Radien.

Wir sehen, dass die Theorie der reciproken Radien aus der Theorie zweier doppelt conjugirten Punkte in der allgemeinen Reciprocität hervorgeht, wenn wir annehmen, der Polkegelschnitt sei ein Kreis und A_1 sein Mittelpunkt.

Wir werden nur noch kurz zeigen, wie der Zusammenhang zwischen zwei entsprechenden Punkten in der Theorie der reciproken Radien als Specialfall aus unserer allgemeinen Beziehung hervorgeht:

Dem Mittelpunkt des Kreises (Fig. 9) entsprechen alle Punkte der ∞ fernen Geraden. Die Geraden durch A_1 entsprechen sich selbst; auf einer solchen bilden die entsprechenden Punkte zwei involutorische Reihen, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte mit dem Kreise sind. Wir finden also zu jedem Punkte den entsprechenden als den 4. harmonischen zu ihm in Bezug auf die Schnittpunkte des entsprechenden Radius mit dem Kreise; derselbe wird natürlich durch die Polare des angenommenen Punktes in Bezug auf den Kreis herausgeschnitten. Daraus folgt, dass das Innere des Kreises auf den äussern Theil der Ebene abgebildet wird und umgekehrt. Einer beliebigen Geraden g entspricht ein Kreis durch A_1 mit einer Tangente in A_1 parallel zu g. Fällen wir von A_1 das Perpendikel auf g und bestimmen zu dem Fusspunkte P die Polare p, so schneidet dieselbe den entsprechenden Punkt P^* zu P heraus, $A_1 P^*$ ist dann der Durchmesser des der Geraden g entsprechenden Kreises; daraus folgt: Allen Geraden g, die einen zum Polkreis concentrischen Kreis umhüllen, entsprechen congruente Kreise, deren Mittelpunkte ebenfalls auf einem Kreise vom Mittelpunkte A_1 liegen. Einem Strahlenbüschel vom Scheitel P entspricht ein Kreisbüschel mit den zwei Grundpunkten A_1, P^*. Dem Strahl $A_1 P$ entspricht der grösste und dem Lothe in P auf $A_1 P$ der kleinste Kreis des Büschels. Parallelen Geraden entsprechen Kreise, deren Mittelpunkte auf dem zu ihnen normalen Durchmesser liegen und welche den zu ihnen parallelen Durchmesser in A_1 berühren, etc. Einem Kegelschnitte durch $A_2 A_3$ entspricht wieder ein solcher, d. h. einem Kreise entspricht wieder ein Kreis. Der Polkreis entspricht sich selbst Punkt für Punkt. Soll ein anderer Kreis der Ebene sich selbst entsprechen, so dass alle Strahlen durch A_1 aus ihm zwei entsprechende Punkte schneiden, so muss er nur durch zwei entsprechende Punkte gelegt werden; er schneidet somit den Polkreis stets reell und die Tangenten in den Schnittpunkten gehen durch A_1, d. h. er schneidet den Polkreis orthogonal und ist somit bestimmt, sobald wir seinen Mittelpunkt annehmen. Durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen unendlich viele Kreise, die sich selbst entsprechen, nämlich alle die, welche durch ihn und seinen entsprechenden Punkt gehen und die folglich ein Büschel bilden. Weil nun durch Transformation mittelst reciproker Radien der Winkel zwischen zwei Curven nicht geändert wird, so folgt, dass die Kreise des Büschels, welches zum vorigen conjugirt ist, sich unter einander entsprechen. Einem Strahlenbüschel entspricht, wie vorhin schon erwähnt worden, ein Kreisbüschel mit zwei reellen Grundpunkten; den concentrischen Kreisen, welche das Strahlenbüschel orthogonal schneiden, entspricht das zum vorigen conjugirte Kreisbüschel mit nicht reellen Grundpunkten.

Einem beliebigen Kegelschnitte durch A_1 entspricht eine Curve 3. Ordnung mit Doppelpunkt in A_1, die durch die imaginären Kreispunkte geht. Der Doppelpunkt in A_1 hat zwei reelle Tangenten, oder zusammenfallende oder imaginäre, je nachdem der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist. Dem Kegelschnitt:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 0$$

entspricht die Curve 3. Ordnung:

$$(dx + ey)(x^2 + y^2) + r^2(ax^2 + by^2 + cxy) = 0.$$

Endlich entspricht einem beliebigen Kegelschnitt eine Curve 4. Ordnung, die A_1 zum reellen und die imaginären Kreispunkte zu imaginären Doppelpunkten hat.

Räumliche Systeme.

Die Beziehung zwischen zwei allgemeinen reciproken räumlichen Elementarsystemen ist bestimmt durch die Festsetzung von fünf Elementen des einen Systems, die fünf bestimmten Elementen des andern Systems projektivisch entsprechen, so dass keine vier Elemente des einen Systems einem ebenen Gebilde angehören. Man zeigt, dass ein sich involutorisch entsprechendes Tetraeder existirt, so beschaffen, dass jeder Ecke eine Ebene desselben entspricht und zwar in beiderlei Sinn der Beziehung, ob man den Punkt zu dem einen oder zu dem andern Systeme rechnet; jede Ecke liegt zudem auf der ihr entsprechenden Ebene.

Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken dieses Tetraeders (Fig. 10) und es entspreche im vorigen Sinne der Ecke A_1

die Ebene $A_1\ A_2\ A_4 \equiv \mathrm{A}_1$, so ist hierdurch die Zuordnung der drei übrigen Elementenpaare bereits bestimmt: z. B. dem Punkte A_2 kann dann nur entweder die Ebene $A_2 A_1 A_3$ oder $A_2 A_3 A_4$ entsprechen; die letztere ist es nicht, denn der Punkt A_2 liegt auf der Ebene A_1, also muss die entsprechende Ebene A_2 durch A_1 gehen; etc. Einer beliebigen Geraden im Raume, als Punktreihe aufgefasst, entspricht wieder eine Gerade, als Scheitelkante des Büschels von Ebenen, die den Punkten der Reihe entsprechen; so correspondiren die Kanten des windschiefen Vierseits $A_1 A_2 A_3 A_4 A_1$ des vorigen Tetraeders sich selbst, während die zwei gegenüberliegenden Kanten $A_1\ A_3$, $A_2\ A_4$ sich gegenseitig entsprechen. Bei dem Nachweise der Existenz dieses Tetraeders ergiebt sich, dass diese zwei Gegenkanten unter allen Umständen reell sind. Es gibt ferner ein einfaches Hyperboloid, die Polfläche P, dessen Punkte dadurch ausgezeichnet sind, dass durch jeden die zwei ihm in beiderlei Sinn der Beziehung entsprechenden Ebenen gehen; und ebenso ein einfaches Hyperboloid, die Polarfläche Π, dessen Tangentialebenen die zwei ihnen entsprechenden Punkte enthalten. Diese beiden Hyperboloide enthalten das windschiefe Vierseit $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_1$ und berühren somit die Ebenen des Tetraeders in den Ecken desselben. Setzen wir die Reellität des ganzen Tetraeders und damit auch der beiden Hyperboloide voraus, so können wir dasselbe zum Fundamentaltetraeder wählen, dann wird die Beziehung der zwei reciproken Systeme analytisch ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\text{I.}\ \begin{cases} m\,\xi'_1 = a_{13}x_3;\ m\,\xi'_2 = a_{24}x_4;\ m\,\xi'_3 = a_{31}x_1;\ m\,\xi'_4 = a_{42}x_2; \\ n\,\xi_1 \ = a_{31}x'_3;\ n\,\xi_2 \ = a_{42}x'_4;\ n\,\xi_3 \ = a_{13}x'_1;\ n\,\xi_4 \ = a_{24}x'_2; \end{cases}$$

und die Gleichungen der Pol- und Polarfläche lauten:

$$\text{II.}\ \begin{cases} P \equiv (a_{13} + a_{31})\,x_1x_3 + (a_{24} + a_{42})\,x_2x_4 = 0 \\ \Pi \equiv a_{24}a_{42}\,(a_{13} + a_{31})\,\xi_1\xi_3 + a_{13}a_{31}(a_{24} + a_{42})\,\xi_2\,\xi_4 = 0 \end{cases}$$

Einem beliebigen Punkte P von den Coordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 entsprechen daher nach der Gleichnng I) in beiderlei Sinn der Beziehung die zwei Ebenen:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} a_{13}y_3x_1 + a_{24}y_4x_2 + a_{34}y_1x_3 + a_{42}y_2x_4 = 0 \\ a_{31}y_3x_1 + a_{42}y_4x_2 + a_{13}y_1x_3 + a_{24}y_2x_4 = 0. \end{cases}$$

Dieselben schneiden sich in einer Geraden p^*, die wir die doppelt conjugirte Gerade zu dem Punkte P nennen. Durch Addition und Subtraktion der zwei Gleichungen III. ergeben sich die zwei neuen Gleichungen:

$$(a_{13} + a_{31})(y_3x_1 + y_1x_3) + (a_{24} + a_{42})(y_4x_2 + y_2x_4) = 0$$
$$(a_{13} - a_{31})(y_3x_1 - y_1x_3) + (a_{24} - a_{42})(y_4x_2 - y_2x_4) = 0.$$

Dieselben stellen zwei Ebenen dar, die durch p^* gehen; die erstere ist die Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Polfläche und die letztere enthält die Schnittlinie der zwei Ebenen:

$$y_3x_1 - y_1x_3 = 0; \; y_4x_2 - y_2x_4 = 0.$$

Diese Gerade ist die gemeinsame Transversale t_y aus P zu den zwei Gegenkanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ des sich involutorisch entsprechenden Tetraeders; es liegen somit diese Transversale und p^* in derselben Ebene und schneiden sich daher in einem Punkte P^*, der auch in der Polarebene von P in Bezug auf die Polfläche gelegen ist; die Untersuchung der Abhängigkeitsverhältnisse der zwei Punkte P und P^* bildet den zweiten Theil unserer Abhandlung als räumliches Analogon zum ersten.

Der entsprechende Punkt P^* zu P ist der Schnittpunkt der drei Ebenen:

$$y_3x_1 - y_1x_3 = 0$$
$$y_4x_2 - y_2x_4 = 0$$
$$a_{13}y_3x_1 + a_{24}y_4x_2 + a_{31}y_1x_3 + a_{42}y_2x_4 = 0.$$

Hieraus ergeben sich für die Coordinaten x_i des Punktes P^* folgende Werthe:

$$\text{IV.}\quad\begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = k\, y_1y_2y_4 : \lambda\, y_1y_2y_3 : k\, y_2y_3y_4 : \lambda\, y_1y_3y_4 \\ \text{oder auch:} \\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \dfrac{k}{y_3} : \dfrac{\lambda}{y_4} : \dfrac{k}{y_1} : \dfrac{\lambda}{y_2}, \end{cases}$$

wobei $k = a_{24} + a_{42}$, $\lambda = -(a_{13} + a_{31})$ bedeuten.

Wie in der Ebene, so ist auch hier die Beziehung zwischen P und P^* eine involutorische.

Specielle Lagen des Punktes P.

I. P liege in einer Ecke, resp. in einer Ebene des Fundamentaltetraeders.

Nehmen wir z. B. an, P liege in A_1, so entspricht diesem Punkt in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung die Ebene A_1 und folglich ist die doppelt conjugirte Gerade in derselben unbestimmt; die Transversale t_y durch A_1 zu A_1A_3, A_2A_4 liegt ebenfalls in A_1 und ist auch unbestimmt; es entspricht daher der Fundamentalecke A_1 irgend ein Punkt der Ebene A_1 und umgekehrt, irgend einem Punkte der Ebene A_1 entspricht der Punkt A_1; analog verhalten sich die drei andern Fundamentalecken gegenüber den ihnen entsprechenden Fundamentalebenen.

II. P liege in einer Tetraederkante.

Liegt P auf einer Kante des windschiefen Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$, so entsprechen ihm alle Punkte derselben Kante, er entspricht sich somit auch selbst; gehört aber P einer der Gegenkanten A_1A_3, A_2A_4 an, so entsprechen ihm alle Punkte der resp. anderen Kante.

III. P liege auf der Polfläche.

Dann gehen die zwei ihm entsprechenden Ebenen durch ihn selbst hindurch, also auch die Schnittlinie p^*;

diese wird daher von der Transversalen t_y in P selbst getroffen, d. h. die Punkte der Polfläche entsprechen sich selbst.

IV. *P* liege auf einer beliebigen Ebene E.

Sei $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$ die Gleichung dieser Ebene, dann entspricht ihr infolge der Gleichung IV eine Fläche 3. Ordnung F_3 von der Gleichung:

$$\text{V.} \quad \alpha_1 \, k \, x_1 x_2 x_4 + \alpha_2 \, \lambda \, x_1 x_2 x_3 + \alpha_3 \, k \, x_2 x_3 x_4 + \alpha_4 \, \lambda \, x_1 x_3 x_4 = 0.$$

Dieselbe ist die bekannte rationale Fläche 3. Ordnung; sie enthält die sechs Kanten des Fundamentaltetraeders und besitzt daher in den vier Ecken derselben Knotenpunkte. Sie hat mit der Polfläche das windschiefe Vierseit $A_1 A_2 A_3 A_4$ gemeinsam und ausserdem noch einen Kegelschnitt, der durch die gegebene Ebene E aus der Polfläche geschnitten wird. Die Tangentenkegel 2. Grades dieser F_3 in den 4 Knotenpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 haben resp. die Gleichungen:

$$\text{VI.} \quad \begin{cases} \alpha_2 \, \lambda \, x_2 x_3 + \alpha_1 k \, x_2 x_4 + \alpha_4 \, \lambda \, x_3 x_4 = 0 \\ \alpha_2 \, \lambda \, x_1 x_3 + \alpha_1 k \, x_1 x_4 + \alpha_3 \, k \, x_3 x_4 = 0 \\ \alpha_2 \, \lambda \, x_1 x_2 + \alpha_4 \lambda \, x_1 x_4 + \alpha_3 \, k \, x_2 x_4 = 0 \\ \alpha_1 \, k \, x_1 x_2 + \alpha_4 \, \lambda \, x_1 x_3 + \alpha_3 \, k \, x_2 x_3 = 0 \end{cases}$$

Specielle Lagen der Ebene E.

1) E *enthalte eine Kante des windschiefen Vierseits* $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Geht z. B. E durch die Kante $A_1 A_2$, so sind in ihrer Gleichung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ zu setzen und die Gleichung der F_3 lautet daher:

$$x_3 x_4 \, (\alpha_4 \, \lambda \, x_1 + \alpha_3 \, k \, x_2) = 0.$$

Sie zerfällt somit in drei Ebenen, von denen zwei die Fundamentalebenen A_1, A_2 sind, d. h. die Ebenen, welche den Ecken A_1, A_2 entsprechen; die dritte Ebene $E^* \equiv \alpha_4 \lambda x_1$

$+ \alpha_3 k x_2 = 0$ geht durch die Gegenkante $A_3 A_4$. Zwei solche Ebenen, wie E und E* nennen wir «entsprechende Ebenen». Während E das Ebenenbüschel von der Scheitelkante $A_1 A_2$ durchläuft, beschreibt E* ein dazu projektivisches Büschel von der Scheitelkante $A_3 A_4$; je zwei entsprechende Ebenen durchschneiden sich in einer Erzeugenden der Polfläche und diese entsteht somit als Erzeugniss dieser zwei Ebenenbüschel. Den zwei Ebenen A_1, A_2 entsprechen in diesem Sinn die zwei Ebenen A_4, resp. A_3. — Man sieht, wie man zu einer gegebenen Ebene E die entsprechende E* construiren kann: E schneidet die Polfläche ausser in $A_1 A_2$ noch in einer zweiten Erzeugenden, die $A_3 A_4$ trifft, und diese bestimmt mit der letzteren die Ebene E*. Entsprechend verhält es sich mit den Ebenenbüscheln durch die drei andern Kanten des windschiefen Vierecks.

2) E enthalte eine der zwei Gegenkanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$.

Geht E durch die Kante $A_2 A_4$, so sind $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ zu setzen und die Gleichung der entsprechenden F_3 lautet:

$$x_2 x_4 (\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3) = 0.$$

F_3 zerfällt somit auch da in drei Ebenen: in die zwei Ebenen, welche den zwei Ecken A_2, A_4 entsprechen, und in die gegebene Ebene; die gegebene Ebene entspricht sich somit selbst, was auch von vorneherein schon geometrisch klar ist. Analog verhält es sich mit den Ebenen durch $A_1 A_3$.

Nach diesem können wir jetzt zu einem beliebigen Punkte sehr leicht seinen entsprechenden construiren: Wir legen von dem Punkte aus eine Ebene etwa nach der Kante $A_1 A_2$, construiren dazu die entsprechende; wo diese die Transversale t durch P zu $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ schneidet, ist der entsprechende Punkt P^*. Es ist evident, dass man durch P^* ausser der Transversalen t nicht bloss eine, sondern vier Ebenen mit derselben Leichtigkeit angeben kann.

3) E gehe nur durch eine Fundamentalecke z. B. durch A_1.

Dann ist $\alpha_1 = 0$ und somit

$$F_3 \equiv x_3 (\alpha_2 \lambda x_1 x_2 + \alpha_3 k x_2 x_4 + \alpha_4 \lambda x_1 x_4) = 0.$$

F_3 zerfällt somit in die Fundamentalebene A_1, die der Ecke A_1 entspricht und in einen Kegel zweiten Grades von der Spitze A_3, der die drei durch A_3 gehenden Kanten des Fundamentaltetraeders enthält. Die gegebene Ebene schneidet die Polfläche in einem durch A_1 gehenden Kegelschnitt; verbinden wir die Punkte desselben mit A_3, erhalten wir die Erzeugenden des vorigen Kegels. Diese Erzeugenden entsprechen den Strahlen der Ebene E durch A_1, denn ein solcher Strahl bestimmt mit $A_1 A_2$ und $A_1 A_4$ zwei Ebenen, denen zwei Ebenen resp. durch $A_3 A_4$, $A_3 A_2$ entsprechen und deren Schnittlinie die entsprechende Gerade zu der Schnittlinie der zwei erstern Ebenen ist. Es entspricht somit überhaupt dem Strahlenbündel vom Scheitel A_1 das Strahlenbündel vom Scheitel A_3; zwei entsprechende Strahlen schneiden sich auf der Polfläche. Wie die Ecken A_1, A_3, so verhalten sich auch gegenseitig die Ecken A_2, A_4. Man findet jetzt auch leicht, was einer beliebigen eine der sechs Kanten des Tetraeders schneidenden Geraden entspricht: Schneidet g z. B. die Kante $A_1 A_2$, so bestimmt sie mit $A_1 A_2$ eine Ebene, der eine Ebene durch $A_3 A_4$ entspricht; mit A_3 bestimmt g eine Ebene, der ein Kegel zweiten Grades von der Spitze A_1 correspondirt; dieser wird von der vorigen Ebene in einem Kegelschnitt getroffen, und dieser ist das Entsprechende zu der Geraden g. Wie A_3, so bestimmt auch A_4 mit g eine Ebene, der ein Kegel zweiten Grades von der Spitze A_2 entspricht; der Schnitt dieses Kegels mit der vorigen Ebene muss denselben Kegelschnitt ergeben, wie vorhin. Diese zwei Kegel zweiten Grades haben somit einen Kegelschnitt gemeinsam und da sie ausserdem noch die gemeinsame Erzeugende $A_1 A_2$ besitzen, so müssen sie sich längs derselben berühren. Wenn somit zwei Ebenen, durch zwei verschiedene Ecken des Fundamentaltetraeders gelegt, durch denselben Punkt der gegenüberliegenden Kante gehen, so entsprechen ihnen zwei Kegel zweiten Grades, die sich längs dieser Kante berühren; der Rest ihrer Durchdringung, ein Kegelschnitt, entspricht der Schnittlinie der zwei Ebenen. Wenn g, statt eine der Seiten des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ zu schneiden, eine der zwei Gegenkanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ trifft, so bleibt das Vorige bestehend, nur entspricht dann die Ebene $A_1 A_3\, g$ oder $A_2 A_4\, g$ sich selbst.

Jede Ebene durch $A_1 A_3$ entspricht sich selbst und schneidet aus dem Fundamentaltetraeder ein Dreieck $A_{24} A_1 A_3$ heraus, so beschaffen, dass der Ecke A_{24} auf $A_2 A_4$ alle Punkte der gegenüberliegenden Seite und den Ecken A_1, A_3 alle Punkte der Seite $A_1 A_{24}$, resp. $A_3 A_{24}$ entsprechen. Ferner schneidet sie aus der Polfläche einen Kegelschnitt, der Punkt für Punkt sich selbst entspricht und die Seiten $A_1 A_{24}$, $A_3 A_{24}$ resp. in A_1 und A_3 berührt. Wir haben somit in einer solchen Ebene nichts anderes als unsere im 1. Theile behandelte Beziehung in einem ebenen System. Dasselbe gilt für Ebenen durch $A_2 A_4$.

Um auch die ebenen Systeme durch die Kanten des windschiefen Vierseits $A_1 A_2 A_3 A_4$ noch näher zu untersuchen, denken wir uns (Fig. 11) durch $A_1 A_2$ z. B. eine beliebige Ebene E gelegt, die ausser der Geraden $A_1 A_2$ aus der Polfläche noch eine zweite Erzeugende $A'_{12} A_{34}$ herausschneidet; dieser Ebene entspricht die Ebene $E^* \equiv A_3 A_4 A'_{12}$.

Den Ecken A_{34}, A_1 und A_2 auf E entsprechen resp. die Punkte der Geraden A_3A_4, $A_4A'_{12}$ und A_3A_{14} auf E* und umgekehrt den Ecken A'_{12}, A_3 und A_4 auf E* entsprechen resp. die Punkte der Geraden A_1A_2, A_2A_{34} und A_1A_{34} auf E. Die zwei Dreiecke $A_1A_2A_{34}$ und $A_4A_3A'_{12}$ stehen somit gegenseitig in derselben Beziehung wie das im ersten Abschnitt aufgetretene Dreieck $A_1A_2A_3$ für sich. Den Strahlen in E aus A_{34} entsprechen die Strahlen aus A'_{12} in E* und zwar gehen zwei sich entsprechende nach entsprechenden Punkten der projektivischen Reihen auf A_1A_2, A_3A_4, welche die Polfläche erzeugen; ferner, den Geraden aus A_1 in E entsprechen die Geraden aus A_3 in E* und je zwei entsprechende schneiden sich auf der Geraden $A'_{12}A_{34}$; analog sind auch A_2 und A_4 Scheitel perspektivischer Strahlenbüschel in E und E* für $A'_{12}A_{34}$ als perspektivische Axe. Man erhält somit am besten zu einem beliebigen Punkte P in E den entsprechenden Punkt P^* in E*, indem man zu den zwei Strahlen A_1P, A_2P die zwei entsprechenden A_3P^* und A_4P^* nimmt. Einem beliebigen Strahlenbüschel in E vom Scheitel P entspricht in E* ein Kegelschnittbüschel von den vier Grundpunkten A_3, A_4, A_{12}, P^* und analog umgekehrt; schneidet g die Seiten des Dreieckes $A_1A_{34}A_2$ in I, II, III, so sind die entsprechenden Geraden zu A_1 II, A_2 I, A_{34} III die Tangenten resp. in A_3, A_4, A_{12} an den der Geraden g entsprechenden Kegelschnitt. Man erhält so auch den Kegelschnitt, welcher der unendlich fernen Geraden der Ebene E und umgekehrt den Kegelschnitt, welcher der ∞ fernen Geraden der Ebene E* entspricht; mittelst dieser zwei Kegelschnitte kann man alsdann entscheiden über das Verhalten der ∞ fernen Elemente der zwei Ebenen. Man sieht, wie man durch Analogie aus dem ersten Abschnitt die ebenen

Systeme durch die Kanten des Vierseits $A_1 A_2 A_3 A_4$ studiren kann. Einem beliebigen Kegelschnitt in E entspricht in E* eine Curve 4. Ordnung, die in $A_3 A_4 A_{12}$ Doppelpunkte mit leicht angebbaren Tangenten besitzt; geht der Kegelschnitt durch eine Ecke des Dreieckes $A_1 A_2 A_{34}$, entspricht ihm nur eine Curve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt und geht er durch zwei Ecken, entspricht ihm wieder ein Kegelschnitt durch zwei Ecken des Dreieckes $A_3 A_4 A_{12}$ etc.

Wir kehren wieder zurück zu dem Fall, wo die Ebene E (Fig. 12) nur durch die Fundamentalecke A_1 geht; dieselbe schneide die Seiten der gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraeders in den Punkten A_{23}, A_{24}, A_{34} und die Polfläche in einem Kegelschnitt K; dann ist die Gerade $A_1 A_{24}$ Tangente in A_1 an K; ist ferner A'_{12} der entsprechende Punkt zu A_{34} bezüglich der zwei projektivischen Reihen auf $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$, so ist die Ebene $A_4 A_{34} A'_{12}$ Tangentialebene an die Polfläche in A_{34} und schneidet die Ebene E längs der Tangente in A_{34} an den Kegelschnitt K; ebenso bestimmt sich die Tangente an K in A_{23}. Verbinden wir nun die Punkte und Tangenten von K durch Gerade resp. durch Ebenen mit A_3, erhalten wir die Erzeugenden, resp. die Tangentialebenen des Kegels zweiten Grades, welcher der Ebene E entspricht. Derselbe wird offenbar längs $A_3 A_1$, $A_3 A_2$, $A_3 A_4$ von den Ebenen $A_3 A_1 A_{24}$, $A_3 A_2 A_{14}$, $A_3 A_4 A_{12}$ berührt. — Sei g eine beliebige Gerade in der Ebene E, so bestimmt sie ausser mit A_1 z. B. auch mit A_2 eine Ebene, der ebenfalls ein Kegel zweiten Grades von der Spitze A_4 entspricht; dieser und der vorige Kegel haben die Kante $A_3 A_4$ gemeinsam und durchdringen sich daher noch in einer durch die vier Tetraederecken gehenden Curve 3. Ordnung, welche der Geraden g entspricht. Den Ebenen $A_3 g$ und $A_4 g$ würden so auch noch zwei Kegel zweiten Grades von den Mittelpunkten A_1 und A_2 correspondiren; diese vier Kegel haben dieselbe Curve 3. Ordnung gemeinsam und je zwei von ihnen ausserdem noch eine Tetraederkante. Wir sehen somit: Einer beliebigen Geraden des Raumes entspricht eine Curve 3. Ordnung durch die vier Tetraederecken und sie kann als Durchdringung von zwei Kegeln zweiten Grades mit einer gemeinsamen Erzeugenden erhalten werden. Zur Construction der Tangenten der Curve dritter Ordnung in den vier Tetraederecken bedient man sich der Tangentialebenen z. B. der zwei Kegel von den Mittelpunkten A_3 und A_4 längs den Tetraederkanten, die sie enthalten.

Ist P ein beliebiger Punkt in der Ebene E und P^* sein entsprechender, so entspricht dem Strahlenbüschel vom Scheitel P in der Ebene E ein Büschel von Curven 3. Ordnung auf dem Kegel 2. Grades von dem Mittelpunkte A_3, welches A_1, A_2, A_3, A_4, P^* zu Grundpunkten hat. Den Geraden PA_1, PA_{23}, PA_{24}, PA_{34} entsprechen die degenerirten Curven des Büschels und zwar:

PA_1 die Gerade P^*A_3 und der Kegelschnitt, der durch die Ebene A_1 aus dem Kegel geschnitten wird; die Punkte des letzteren entsprechen alle dem Punkte A_1;

PA_{23} der Kegelschnitt, der durch die Ebene $A_1 A_4 P^*$ aus dem Kegel geschnitten wird und die Gerade $A_2 A_3$, deren Punkte alle dem einzigen Punkte A_{23} entsprechen;

PA_{24} der Kegelschnitt, der durch die Ebene $A_2 A_4 P^*$ aus dem Kegel geschnitten wird und die Gerade $A_1 A_3$, deren Punkte dem Punkte A_{24} entsprechen.

PA_{34} der Kegelschnitt, der durch die Ebene $A_1 A_2 P^*$ aus dem Kegel geschnitten wird und die Gerade $A_3 A_4$, deren Punkte dem Punkte A_{34} entsprechen.

Liegt der Scheitel P des Strahlenbüschels in A_1, dann entspricht jedem Strahl des Büschels eine Erzeugende des Kegels, die sich mit ihm auf dem Kegelschnitt trifft, den die Ebene E aus der Polfläche herausschneidet. Den Strahlen $A_1 A_{23}$, $A_1 A_{24}$, $A_1 A_{34}$ speciell entsprechen die Erzeugenden $A_3 A_2$, $A_3 A_1$, $A_3 A_4$; zu jeder von ihnen gehört dann noch als Ergänzung zur Curve dritter Ordnung der Kegelschnitt in der Ebene A_1, den sie aus dem Kegel herausschneidet.

Liegt P irgendwo auf der Geraden $A_1 A_{34}$, dann fällt P^* mit A_4 zusammen; die Curven 3. Ordnung berühren sich in A_4. Der Geraden PA_1 entsprechen die Erzeugende $A_3 A_4$ und der Kegelschnitt in der Ebene E; PA_{24} entsprechen die Erzeugende $A_3 A_1$ und der Kegelschnitt in der Ebene $A_2 A_4 P$; der Geraden PA_{23} endlich entsprechen die Erzeugende $A_3 A_2$ und ein Kegelschnitt durch A_1, A_4. Analog, wenn P auf einer der beiden Seiten $A_1 A_{23}$ oder $A_1 A_{24}$ liegt.

Liegt P auf der Geraden $A_{23} A_{34} A_{42}$, dann berühren sich die Curven 3. Ordnung in A_3; der Geraden $A_{23} A_{34} A_{42}$ selbst entsprechen die 3 Erzeugenden $A_3 A_2$, $A_3 A_1$, $A_3 A_4$; PA_1 entsprechen eine Erzeugende durch A_3 und der Kegelschnitt in der Ebene A_1.

Betrachten wir schliesslich noch einen Kegelschnitt K auf der durch A_1 gehenden Ebene E; derselbe schneide die Seiten $A_1 A_{24}$, $A_1 A_{23}$, $A_{23} A_{24} A_{34}$, $A_1 A_{34}$ resp. in den Punkten K_1^1, K_1^2; K_2^1, K_2^2; K_3^1, K_3^2; K_4^1, K_4^2. Nun bestimmt K mit den Ecken A_2, A_3, A_4 als den Mittelpunkten drei Kegel zweiten Grades, denen, wie analytisch sehr leicht nachweisbar wäre, drei Kegel vierten Grades entsprechen resp. von den Mittelpunkten A_4, A_1, A_2 und den drei durch den betreffenden Mittelpunkt gehenden Tetraederkanten als Doppelerzeugende. Die Tangentialebenen an diese Kegel längs den Doppelerzeugenden sind leicht angebbar: z. B. der Kegel vierten Grades von dem Mittelpunkte A_1 hat längs $A_1 A_2$ die zwei Ebenen zu Tangentialebenen, welche den Ebenen $A_3 A_4 K_2^1$, $A_3 A_4 K_2^2$ entsprechen; längs $A_1 A_4$ die zwei Ebenen, welche den Ebenen $A_3 A_2 K_4^1$, $A_3 A_2 K_4^2$ entsprechen und längs $A_1 A_3$ die Ebenen $A_3 A_1 K_3^1$, $A_3 A_1 K_3^2$. Diese drei Kegel vierten Grades haben mit dem frühern Kegel zweiten Grades aus A_3 ausser einer jeweiligen Doppelerzeugenden dieselbe Curve 6. Ordnung gemeinsam, welche dem gegebenen Kegelschnitte K entspricht; dieselbe hat in den vier Tetraederecken Doppelpunkte; die Tangenten in ihnen entstehen als die Schnitte je einer Tangentialebene eines Kegels vierten Grades und des Kegels zweiten Grades. Durch specielle Lagen des Kegelschnittes kann die Curve 6. Ordnung in gerade Linien und Curven niedriger Ordnung degeneriren und die Doppelpunkte in den vier Tetraederecken können übergehen in Spitzen oder in isolirte Doppelpunkte.

4) E *sei eine beliebige Ebene des Raumes.*

Derselben entspricht, wie wir früher schon gesehen haben, eine Fläche dritter Ordnung, welche die sechs Kanten des Fundamentaltetraeders enthält. Die Ebene schneide die Tetraederkanten (Fig. 13) $A_i A_k$ resp. in den Punkten A_{ik}, dann sind die Tangentialkegel in den vier Knotenpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 an die Fläche dritter Ordnung die Kegel zweiten Grades, welche resp. den Ebenen $A_3 A_{14} A_{24}$, $A_4 A_{12} A_{13}$, $A_1 A_{23} A_{24}$, $A_2 A_{13} A_{14}$ entsprechen; die Tangentialebenen längs den Tetraederkanten an die Fläche dritter Ordnung stimmen überein mit den Tangentialebenen an diese Kegel und sind leicht angebbar. Den drei Diagonalen $A_{13}A_{24}$, $A_{12}A_{34}$, $A_{14}A_{23}$ des Vierseits, in welchem die Ebene E das Tetraeder schneidet, entsprechen wieder drei Gerade auf der Fläche dritter Ordnung und zwar entspricht die Gerade $A_{13}A_{24}$ sich selbst; sind ferner A'_{34}, A'_{41}, A'_{12}, A'_{23} die Punkte, welche den Punkten A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41} bezüglich der projektivischen Reihen auf den Seiten des Viereckes $A_1A_2A_3A_4$ entsprechen, so entsprechen den Geraden $A_{13}A_{34}$ und $A_{14}A_{23}$ resp. die Geraden $A'_{34}A'_{12}$ und $A'_{23}A'_{14}$. Diese drei Geraden $A_{13}A_{24}$, $A'_{34}A'_{12}$, $A'_{23}A'_{14}$ bilden ebenfalls ein Dreieck und bestimmen mit den sie schneidenden Tetraederkanten die Tangentialebenen in ihnen an die Fläche dritter Ordnung. Geht die Ebene E speciell durch zwei Erzeugende der Polfläche, so sind die Geraden $A'_{12}A'_{34}$ und $A'_{14}A'_{23}$ resp. mit $A_{12}A_{34}$ und $A_{14}A_{23}$ identisch, indem diese Erzeugenden sich selbst entsprechen.

Einem Strahlenbüschel vom Scheitel P in der Ebene E entspricht ein Büschel von Curven 3. Ordnung auf der Fläche 3. Ordnung, welches A_1, A_2, A_3, A_4, P^* zu Grundpunkten hat. Den sechs Geraden von P aus nach den Ecken des von der Ebene E aus dem Tetraeder geschnittenen Vierseits entsprechen die degenerirten Curven des Büschels und zwar:

PA_{12}	die Ger.	A_1A_2	u.	ein Kegelschn.	i.	d.	Ebene	$A_3A_4P^*$
PA_{23}	,,	A_2A_3	,,	,,	,,	,,	,,	$A_4A_1P^*$
PA_{34}	,,	A_3A_4	,,	,,	,,	,,	,,	$A_1A_2P^*$
PA_{41}	,,	A_4A_1	,,	,,	,,	,,	,,	$A_2A_3P^*$
PA_{13}	,,	A_2A_4	,,	,,	,,	,,	,,	$A_1A_3P^*$ (id. m. A_1A_3P.)
PA_{24}	,,	A_1A_3	,,	,,	,,	,,	,,	$A_2A_4P^*$ (id. m. A_2A_4P.)

Wir sehen, den sechs Strahlenbüscheln in der Ebene E, welche die sechs Ecken des Vierseits zu Scheiteln haben, entsprechen die Systeme von unendlich vielen Kegelschnitten auf der Fläche dritter Ordnung, welche in den Ebenen durch die sechs Tetraederkanten liegen. Die sechs Geraden von P aus nach den Ecken des Vierseits bilden drei Paare einer Involution; hierdurch ordnen sich die Strahlen des Büschels vom Scheitel P in eine Involution und somit auch die Curven dritter Ordnung, welche diesen Geraden entsprechen; den Doppelstrahlen des Strahlenbüschels entsprechen die Doppelcurven des Curvenbüschels. Einem Kegelschnittbüschel in der Ebene E entspricht ein Büschel von Curven 6. Ordnung auf der Fläche, welche die vier Tetraederecken zu Doppelpunkten haben; diese haben zwei verschiedene reelle Tangenten, oder zusammenfallende (Spitzen) oder zwei imaginäre, je nachdem der betreffende Kegelschnitt die Seiten des auf E gelegenen Vierseits schneidet, berührt oder gar nicht trifft. Der Schaar von Kegelschnitten, welche die Seiten des Vierseits berühren, entspricht somit eine Schaar von Curven 6. Ordnung, welche in den Tetraederecken Spitzen haben. Jede dieser Curven wird von jeder der vorigen Curven dritter Ordnung in zwei von den Tetraederecken verschiedenen Punkten getroffen, welche den Schnittpunkten des betreffenden Kegelschnittes mit der entsprechenden Geraden aus P entsprechen; nun gehen durch P zwei Kegelschnitte der Schaar: Es begegnet somit zweimal, dass sich eine Curve 3. Ordnung und eine Curve 6. Ordnung in P berühren. Geht der Kegelschnitt in E durch eine Ecke des Vierseits, z. B. durch A_{14}, sondert sich von der Curve 6. Ordnung die Gerade $A_1 A_4$ ab und es entspricht ihm noch eine Curve 5. Ordnung, die in A_2 und A_3 Doppelpunkte hat. Geht der Kegelschnitt durch zwei Ecken, z. B. durch A_{14} und A_{24}, sondern sich die beiden Geraden $A_1 A_4$ und $A_1 A_3$ ab und es bleibt noch eine Curve 4. Ordnung übrig, die in A_2 einen Doppelpunkt hat etc. Geht weiter der Kegelschnitt durch drei Ecken des Vierseits, z. B. durch A_{12}, A_{13}, A_{14}, sondern sich die drei Geraden $A_1 A_2$, $A_2 A_4$, $A_1 A_4$ ab und es bleibt noch eine ebene Curve 3. Ordnung übrig, die in A_3 einen Doppelpunkt besitzt. Endlich kann man die Tetraederkanten zu drei verschiedenen windschiefen Vierseiten gruppiren: $A_1 A_2 A_3 A_4$, $A_1 A_3 A_2 A_4$, $A_1 A_3 A_4 A_2$. Geht nun ein Kegelschnitt in E durch die Schnittpunkte mit den Seiten des ersten Vierseits, sondern sich von der Curve 6. Ordnung diese vier Seiten ab und es bleibt noch ein Kegelschnitt übrig, der in einer Ebene durch $A_{13} A_{24}$ liegt; denn den Schnittpunkten des gegebenen Kegelschnittes mit dieser Geraden entsprechen wieder zwei Punkte auf ihr selbst. Geht der Kegelschnitt durch die Schnittpunkte mit den Seiten des zweiten oder dritten Vierseits, entspricht ihm ein Kegelschnitt durch die Gerade $A'_{12} A'_{34}$ oder $A'_{23} A'_{14}$. — Wir sehen also noch: den drei Kegelschnittbüscheln in E von den Grundpunkten: $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$; $A_{13}, A_{32}, A_{24}, A_{41}$; $A_{13}, A_{34}, A_{42}, A_{21}$ entsprechen die drei Systeme der unendlich vielen Kegelschnitte in den Ebenen resp. durch die Geraden $A_{13} A_{24}$, $A'_{12} A'_{34}$, $A'_{23} A'_{14}$.

Die Construction der Fläche 3. Ordnung F_3^∞, welche der unendlich fernen Ebene entspricht, giebt nichts wesentlich Besonderes; sie enthält ebenfalls die sechs Tetraederkanten; ferner die unendlich ferne Gerade $A_{13} A_{24}$ und noch zwei im Endlichen gelegene Gerade $A'_{12} A'_{34}$, $A'_{23} A'_{14}$, welche den zwei unendlich fernen Geraden $A_{34} A_{12}$, $A_{14} A_{23}$ entsprechen und Diagonalen des Parallelogramms sind, welches ihre Ebene, die zu den Kanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ parallel ist, aus dem Tetraeder herausschneidet. Ich begnüge mich hiermit, die Art und Weise der Analogie dieser räumlichen Beziehung zu der ebenen ins Licht gestellt zu haben und gehe zum Schlusse noch zu einem räumlichen Specialfall über.

Specieller Fall.

Wie im ersten Abschnitte die Theorie der reciproken Radien als Specialfall aus der allgemeinen Beziehung hervorgegangen ist, so fliesst als räumliches Analogon dazu aus unserer allgemeinen räumlichen Beziehung ein Specialfall, sobald wir eine Kugel als Polfläche voraussetzen. Sei $A_1 A_3$ (Fig. 14) ein Durchmesser dieser Kugel vom Radius r, so besitzt das sich involutorisch entsprechende Tetraeder der räumlichen Reciprocität als Ecken die zwei reellen Punkte A_1, A_3 und die zwei imaginären Kreispunkte A_2, A_4 auf der Stellung der Normalebene zu der Kante $A_1 A_3$; von diesem Tetraeder sind somit die zwei Gegenkanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, sowie die zwei Ebenen $A_2 A_1 A_4$ und $A_2 A_3 A_4$ reell, d. h. die Tangentialebenen in A_1 und A_3 an die Polkugel. Man findet leicht, dass die Beziehung zweier doppelt conjugirten Punkte P und P^* ausgedrückt wird durch die Gleichungen:

$$x^* = x \cdot \frac{r^2 - z^2}{x^2 + y^2}$$

$$y^* = y \cdot \frac{r^2 - z^2}{x^2 + y^2}$$

$$z^* = z$$

wobei $A_1 A_3$ als die z Axe und die Normalebene zu $A_1 A_3$ durch den Mittelpunkt M der Kugel als die xy Ebene des Coordinatensystems aufgefasst werden. — Aus der allgemeinen Theorie geht nun für unseren Fall Folgendes hervor:

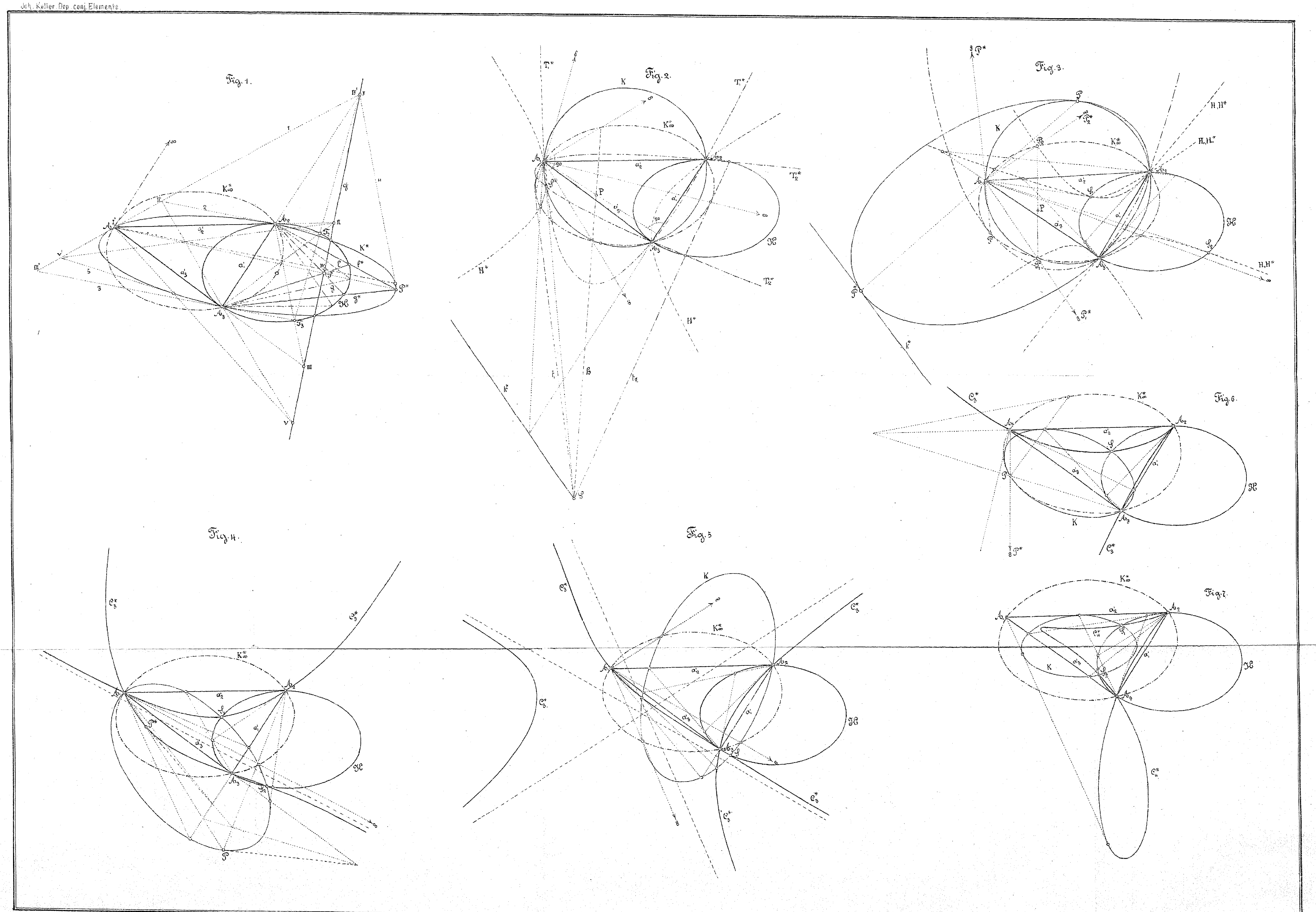
Dem Punkte A_1 entsprechen alle Punkte der Tangentialebene in ihm an die Polkugel; ebenso dem Punkt A_3 alle Punkte der Ebene A_3; irgend einem Punkte auf der Kante $A_1 A_3$ entsprechen alle Punkte der unendlich fernen Geraden $A_2 A_4$ und umgekehrt; die Punkte der Polkugel entsprechen sich selbst. Einer beliebigen Ebene E von der Gleichung $\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$ entspricht eine Fläche 3. Ordnung von der Gleichung: $(\zeta z + 1)(x^2 + y^2) + (\xi x + \eta y)(r^2 - z^2) = 0$; diese enthält A_1, A_3 und die zwei imaginären Kreispunkte A_2, A_4 zu Knotenpunkten. Geht die Ebene E durch $A_2 A_4$, zerfällt die Fläche 3. Ordnung in 3 Ebenen, in E selbst und in die zwei imaginären Ebenen $(x + yi)(x - yi) = 0$, welche den Kreispunkten entsprechen; analog, wenn E durch $A_1 A_3$ geht. Da nun zudem der entsprechende Punkt P^* zu P auf der Polarebene von P in Bezug auf die Polkugel liegt, so ergiebt sich die folgende Construction von P^* aus P: Wir fällen von P das Perpendikel auf $A_1 A_3$, auf diesem liegt P^*; er ist dann der vierte harmonische Punkt zu P in Bezug auf die zwei Schnittpunkte des Perpendikels mit der Polkugel, oder wenn diese imaginär sind, der Schnittpunkt des Perpendikels mit der Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Polkugel. — Zwischen den Gebilden in einer beliebigen Ebene durch $A_1 A_3$ besteht die Beziehung des ersten Abschnittes für den Schnittkreis der Ebene mit der Polkugel als Polkegelschnitt und für $A_1 A_3 A_{24}$ als das sich involutorisch entsprechende Dreieck der Reciprocität. Zwischen den Gebilden in einer Ebene durch $A_2 A_4$ haben wir ferner nichts anderes als die Beziehung der reciproken Radien für den Schnittkreis der Ebene mit der Polkugel als Leitkreis; trifft die Ebene die Kugel nicht, so müssen wir zur Construction entsprechender Elemente die ganze

Kugel selbst zu Hülfe nehmen. (Reciproke Radien mit imaginärem Leitkreis.)

Geht E durch eine der beiden Ecken A_1 oder A_3, z. B. durch A_1, so ist in der allgemeinen Gleichung $\zeta = -\frac{1}{r}$ zu setzen und die Fläche 3. Ordnung, welche der Ebene entspricht, degenerirt in die Tangential-Ebene A_1 und in einen Kegel zweiten Grades von der Spitze A_3 und von der Gleichung $x^2 + y^2 + r(\xi x + \eta y)(r + z) = 0$. Dieser Kegel wird von der Ebene E in einem Kreise geschnitten, nämlich in demselben, den sie mit der Polkugel gemeinsam hat. Die zweite Schaar von Kreisschnittebenen des Kegels ist normal zur Kante $A_1 A_3$; diese Kreise entsprechen den Schnittlinien ihrer Ebenen mit der Ebene E. Die Tangentialebene des Kegels längs $A_1 A_3$ wird bestimmt durch die Tangente in A_1 an den Kreis, den E aus der Polkugel schneidet.

Von der Fläche 3. Ordnung, welche einer beliebigen Ebene E correspondirt, ist ein grosses Drahtmodell angefertigt worden. Sie besitzt in den zwei Knotenpunkten A_1, A_3 Tangentialkegel, welche resp. den Ebenen $A_3 a_1$ und $A_1 a_3$ entsprechen, wobei a_1, a_3 die Schnittlinien der Ebene E mit den Tangential-Ebenen in A_1 und A_3 an die Polkugel sind. Von dem Vierseit, in welchem E das Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ schneidet, sind nur die zwei Seiten a_1, a_3, ferner die zwei Ecken A_{13}, A_{24} und von den drei Diagonalen nur die eine $A_{13} A_{24}$ reell. Einem Strahlenbüschel auf E vom Scheitel P entspricht auf der Fläche ein Büschel von Curven 3. Ordnung von den fünf Grundpunkten $A_1 A_2 A_3 A_4 P^*$. Dem Strahl PA_{13} entspricht die Gerade $A_2 A_4$ und ein Kegelschnitt in der Ebene $A_1 A_3 P$; ebenso entspricht der Geraden PA_{24} die Gerade $A_1 A_3$

und ein Kegelschnitt durch $P^* A_2 A_4$, also ein Kreis. Einem Kegelschnitt auf E entspricht auf der Fläche eine Curve 6. Ordnung, die A_1, A_3 zu reellen und A_2, A_4 zu imaginären Doppelpunkten hat. Geht der Kegelschnitt durch A_{13}, sondert sich von der Curve 6. Ordnung die unendlich ferne Gerade $A_2 A_4$ ab und es bleibt noch eine Curve 5. Ordnung übrig, die A_2, A_4 als einfache Punkte, A_1, A_3 als Doppelpunkte enthält; analog, wenn der Kegelschnitt durch A_{24} geht. Geht der Kegelschnitt durch die zwei imaginären Punkte A_{12}, A_{14} auf a_1, sondern sich die zwei imaginären Geraden $A_1 A_2$, $A_1 A_4$ ab und es bleibt noch eine Curve 4. Ordnung übrig, die A_3 zum Doppelpunkt, A_2, A_4 zu einfachen Punkten hat; analog, wenn der Kegelschnitt durch A_{32} und A_{34} geht. — Enthält der Kegelschnitt die drei Ecken A_{13}, A_{12}, A_{14}, sondern sich die drei Geraden $A_2 A_4$, $A_1 A_2$, $A_1 A_4$ ab und es bleibt daher noch eine Curve 3. Ordnung übrig, die in A_3 einen Doppelpunkt hat; analog, wenn der Kegelschnitt die drei Ecken A_{13}, A_{32}, A_{34} enthält. Geht endlich der Kegelschnitt durch die vier imaginären Punkte A_{12}, A_{14}, A_{32}, A_{34}, entspricht ihm wieder ein Kegelschnitt auf der Fläche 3. Ordnung und zwar in einer Ebene durch die Gerade $A_{13} A_{24}$, die ganz auf der Fläche liegt. Fig. 15 stellt die Haupttypen der Kegelschnitte durch A_{12}, A_{14}, A_{32}, A_{34} dar; denselben entspricht die Schaar von Kegelschnitten auf der Fläche 3. Ordnung in Ebenen durch $A_{13} A_{24}$. Eine zweite Schaar von Kegelschnitten der Fläche 3. Ordnung liegt in den Ebenen durch $A_1 A_3$, welche den Strahlen des Büschels vom Scheitel A_{13} auf E entsprechen. Eine dritte Schaar von Kegelschnitten auf F_3 besteht aus lauter Kreisen in Ebenen durch $A_2 A_4$, denen die Strahlen auf E durch A_{24} entsprechen.



Druck v. C. Knüsli Zürich

Fig. 8.

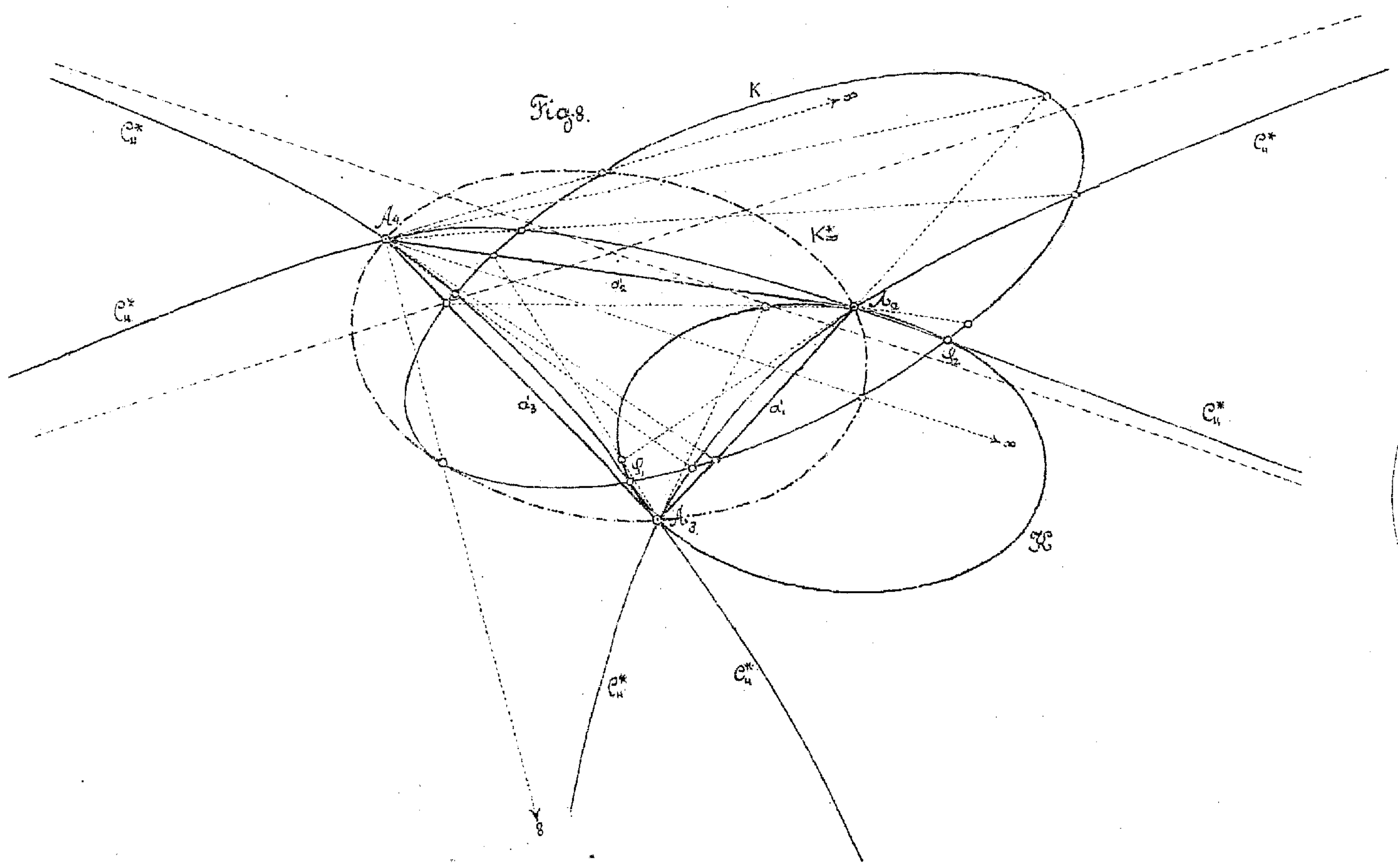


Fig. 9.

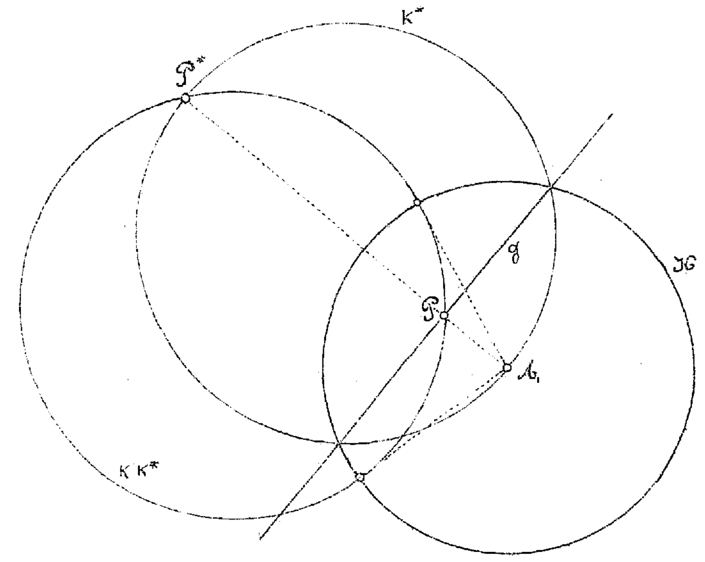


Fig. 15.

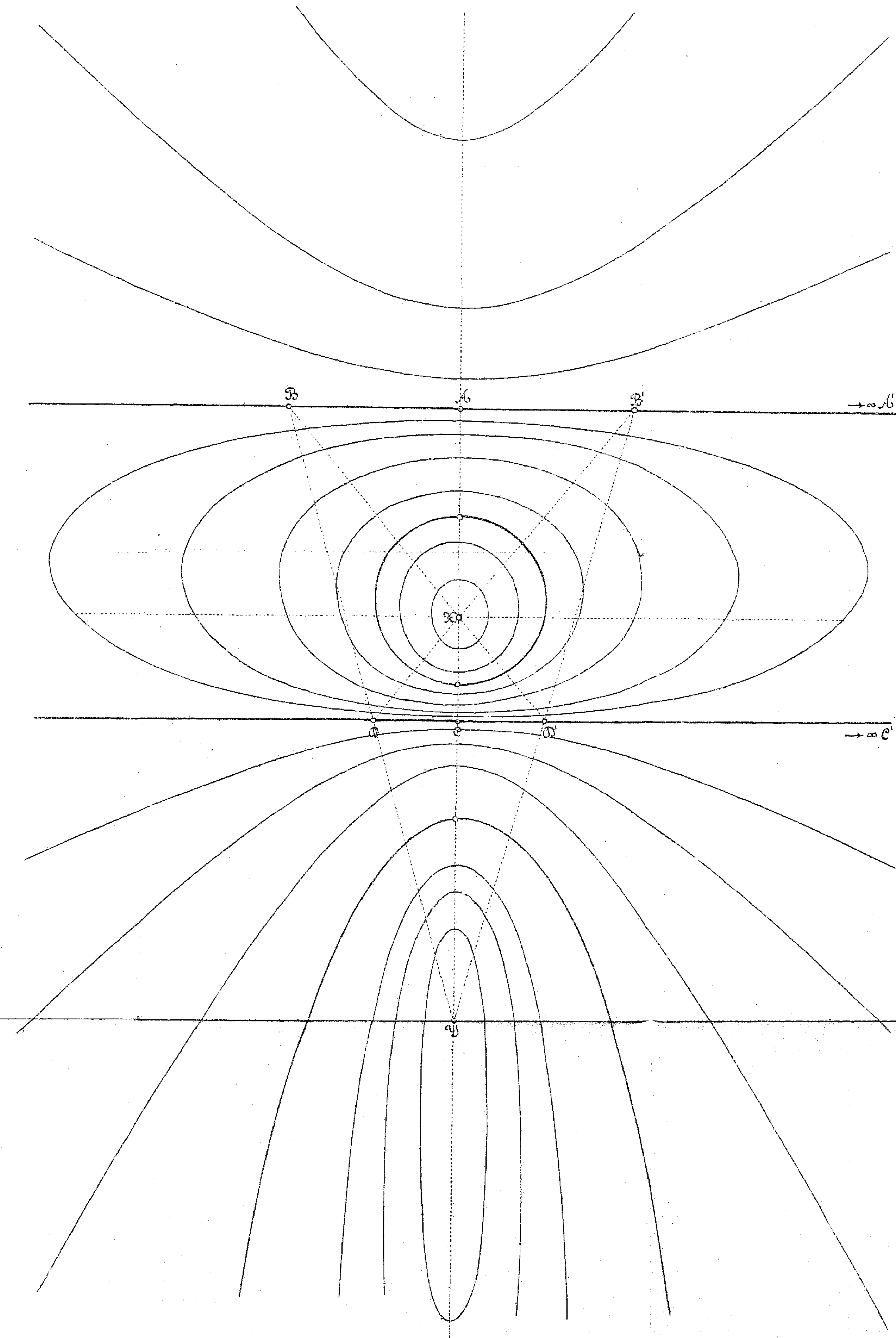


Fig. 10.

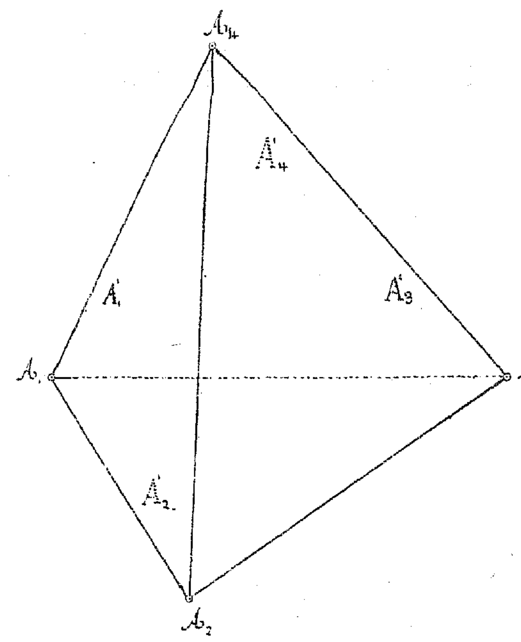


Fig. 11.

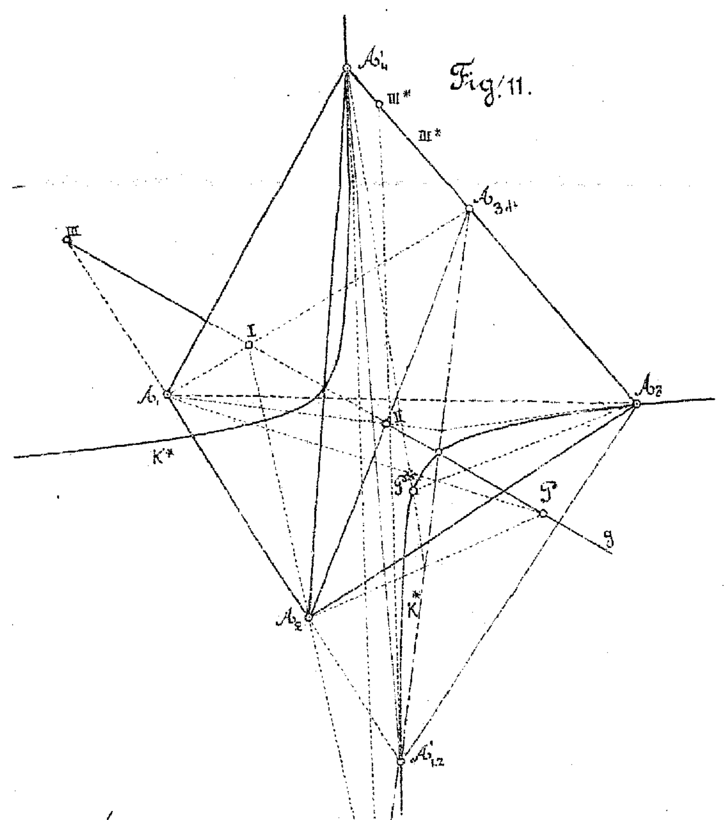


Fig. 14.

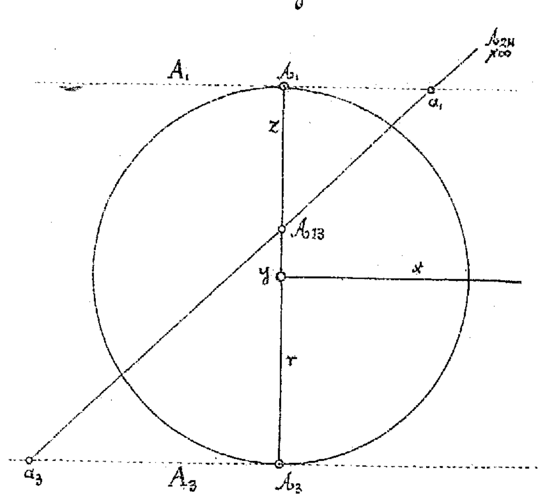


Fig. 12.

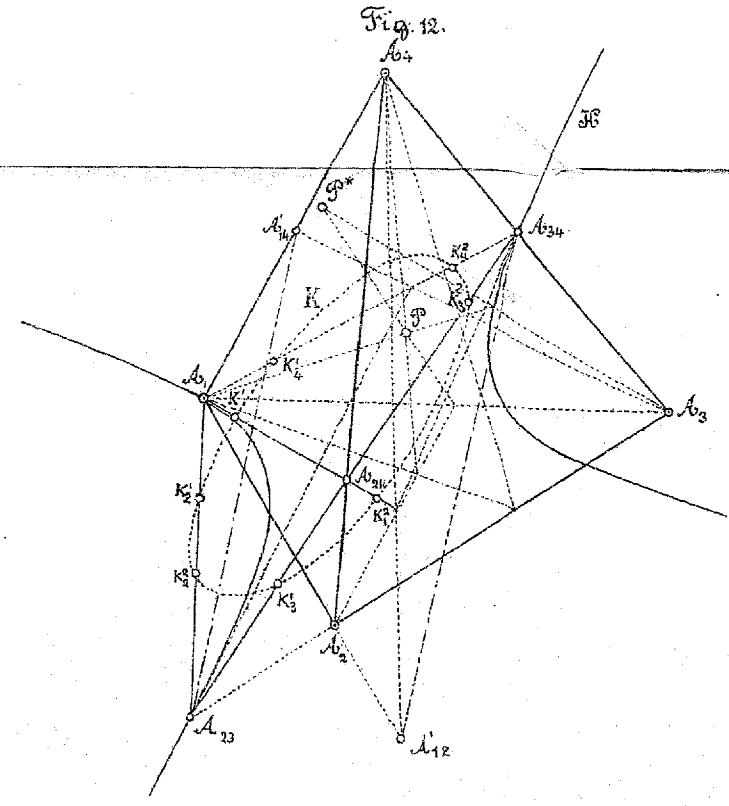
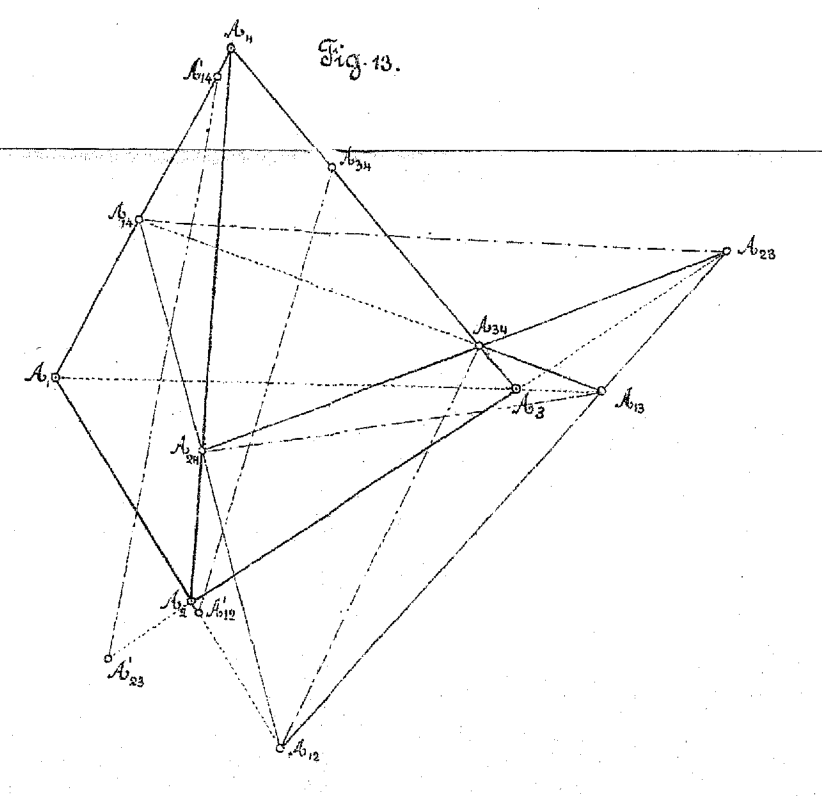


Fig. 13.



Druck v. C. Knüsli, Zurich.