Einleitung in die Hydrodynamik

von

Jacob Müller.

Bearbeitet und herausgegeben von L. Henneberg.

(Schluss.)

3.

Die Geschwindigkeiten der Translationen und Rotationen in einer incompressibeln Flüssigkeit haben die Eigenschaft, dass, sobald die Translationen u, v, w allein vorkommen

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

und dass, sobald die Rotationen ξ, η, ζ allein vorhanden sind

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}=\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

wobei die Differentiationen auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung bezogen sind. Es sollen umgekehrt diese Relationen durchweg gelten, d. h. mag die Differentiation auf unendlich kleine Grössen erster oder zweiter Ordnung bezogen werden. Dann können jedenfalls keine Rotationen oder keine Translationen, für welche nicht die Gleichungen (3.) des vorigen Abschnittes bestehen, vorkommen.

Die obigen Gleichungen drücken aus, dass im ersten Falle u, v, w, im zweiten ξ, η, ζ als die partiellen Differentialquotienten einer Function der Coordinaten aufgefasst werden können

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\xi = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Diese beiden Functionen φ und ψ werden infolge der Relationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

an die Bedingungen

$$\Delta \varphi = 0, \qquad \Delta \psi = 0$$

geknüpft sein.

Sind also die Geschwindigkeitscomponenten der Translation oder Rotation die partiellen Differentialquotienten einer Function der Coordinaten, so kommen nur Translationen oder nur Rotationen (d. h. abgesehen von einer Bewegung, bei welcher keine Rotationen stattfinden) vor.

Diese Functionen φ und ψ werden als die Geschwindigkeitspotentiale und die Flächen φ = const. und ψ = const. als Niveauflächen bezeichnet. Ebenso wie sich oben herausstellte, dass bei einem Potentiale φ von Massen die resultirende Kraft mit der Normale der Niveaufläche zusammenfällt und die Grösse $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ besitzt, so wird sich auch hier ergeben, dass die resultirende Geschwindigkeit resp. die Richtung der Rotationsaxe normal zur Fläche φ = const. resp. ψ = const. steht und dass die resultirende Geschwindigkeit die Grösse $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ resp. $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ besitzt. Die Linien, welche überall senkrecht zur Niveaufläche des Geschwindigkeitspotentiales stehen, also mit der Richtung der Strömung oder der Rotationsaxe zusammenfallen, werden beziehlich Stromlinien oder Wirbellinien genannt.

Es sollen im Folgenden die Consequenzen der Existenz eines Geschwindigkeitspotentiales entwickelt werden. Es ist hierzu die Herleitung eines allgemeinen für alle derartigen Untersuchungen dienenden Theoremes erforderlich.

Es seien U und V zwei Functionen der Coordinaten x, y, z, die innerhalb eines gegebenen zusammenhängenden Bereiches überall einwerthig, stetig und endlich sind nebst den ersten Differentialquotienten. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen multiplicirt mit dem Volumenelement $d\tau = dx\, dy\, dz$ und integrirt über den ganzen Raum ergibt

$$\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau = -\iiint U \Delta V d\tau$$
$$+\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right\} dx\, dy\, dz.$$

Das letzte Integral rechts lässt sich sofort in ein Oberflächenintegral verwandeln. Bezeichnet $d\sigma$ das Oberflächenelement und n die nach Innen gerichtete Normale, so ist

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz = -\iint U\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n\,x)\, d\sigma,$$

$$\iiint \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy\, dz = -\iint U\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n\,y)\, d\sigma,$$

$$\iiint \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = -\iint U\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n\, z)\, d\sigma.$$

Demnach wird

$$\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = -\iiint U \varDelta V d\tau$$

$$-\iiint U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(nz)\right) d\sigma$$

oder

$$\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = -\iiint U \varDelta V d\tau$$

$$-\iiint U\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma. \quad (a.)$$

Da die linke Seite dieser Gleichung sich bei Vertauschung von U mit V nicht ändert, so muss sein

$$\iiint U\varDelta V d\tau + \iiint U\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \iiint V\varDelta U d\tau + \iint V\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma, \quad (b.)$$

in welcher Gleichung wie überall die dreifachen Integrale über das ganze Innere und die zweifachen Intregale über die ganze Oberfläche des gegebenen Raumes auszudehnen sind.

Die Gleichungen (*a.*) und (*b.*) bilden das gesuchte Green'sche Theorem.

Die gewonnenen Relationen sollen dazu verwandt werden, eine Anzahl Sätze über eine Function, welche der Bedingung $\varDelta U = 0$ genügt, und damit eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften der behandelten Translations- und Rotationsbewegungen herzuleiten.

Setzt man zunächst in (*b.*) $V =$ const. und nimmt ferner an, dass $\varDelta U = 0$, so bekommt man

$$\iint \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (c.)$$

Es sei $U = \varphi$ das Potential einer Translationsbewegung und das Intregal über eine Niveaufläche $\varphi =$ const. ausgedehnt. Dann ist $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ die Resultante der Translationsgeschwindigkeit, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma$ somit das Volumen der durch das Flächenelement $d\sigma$ eintretenden Flüssigkeit und (c.) sagt aus, dass in einen von einer Niveaufläche begrenzten Raum ebensoviel Flüssigkeit eintritt wie austritt, ein Satz, der wegen der vorausgesetzten Incompressibilität von vornherein als evident erscheint.

Wird dagegen $V = \psi$ in (c.) eingesetzt und das Intregal über eine Niveaufläche des Rotationspotentiales ψ ausgedehnt, so ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

die resultirende Geschwindigkeit der Rotation und (c.) liefert den Satz

$$\iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\; d\sigma = 0. \qquad (1.)$$

Man nehme nun nicht das ganze Niveau, sondern nur ein unendlich kleines Element q desselben, lege durch alle Puncte seines Umfanges die zu den Flächen $U =$ const. senkrechten Linien und führe letztere bis zu einem zweiten Niveau innerhalb des ersten. So erhält man eine geschlossene cylindrische Fläche von unendlich kleinem Querschnitte und die Gleichung (c.) gibt für sie sofort

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1 q_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_2 q_2\,, \qquad (2.)$$

wobei die Indices sich auf die Querschnitte beziehen.

Diese Relation ist auf die Geschwindigkeiten der Translation und Rotation, die ein Potential haben, übertragbar. Die Linien, deren Richtung überall zum Potentialniveau senkrecht steht, sind dann die Stromlinien und Wirbellinien. Die unendlich dünnen Fäden der Flüssigkeit, welche durch zwei Elemente je eines Potentialniveau und die durch deren Umfang gehenden Strom- oder Wirbellinien begrenzt sind, heissen Strom- oder Wirbelfäden. Daher sagt die Gleichung (2):

Bei Translationen mit einem Geschwindigkeitspotential ist das Product aus der Stromgeschwindigkeit in den Querschnitt des Stromfadens über die ganze Länge des letzteren constant.

Bei Rotationen mit einem Geschwindigkeitspotential ist das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit in den Querschnitt des Wirbelfadens über die ganze Länge des letzteren constant.

Ferner ergibt sich aus der Formel ($c.$) sofort, dass Strom- wie Wirbelfäden in der Flüssigkeit nicht endigen können. Denn endigte ein solcher Faden in der Flüssigkeit, so brauchte man nur ein Endstück von ihm abzuschneiden, und es würde dann das über dasselbe ausgedehnte Integral $\iint \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma$, da nur der eine Querschnitt einen Beitrag liefert, nothwendig entgegen der Formel ($c.$) einen endlichen Werth bekommen.

Die Gleichung ($c.$) kann noch zu einer weiteren Folgerung benützt werden. Sie liefert den Satz, dass die Function U, welche der Gleichung $\Delta U = O$ genügt, in dem ganzen Raume weder Maxima noch Minima besitzen kann. Denn existirte in einem Puncte ein solcher Grenzwerth, so würde in einer unendlich kleinen um ihn gelegten Fläche U entweder einen kleineren oder einen grösseren Werth haben. Dann aber müsste $\frac{\partial U}{\partial n}$ in allen Puncten dieser Fläche dasselbe Vorzeichen erhalten und es könnte also die Gleichung (c.) nicht erfüllt sein.

Aus diesem Satze folgt, dass die Function U, sobald sie in allen Puncten einer geschlossenen Fläche denselben Werth hat, diesen nämlichen Werth im ganzen Innern besitzen muss. Denn wäre diess nicht der Fall, so müsste es Maxima oder Minima in diesem Raume geben, was nicht möglich ist.

Wird aus dem gegebenen Gebiete ein von zwei concentrischen Kugelflächen mit den Radien a und c ($a > c$) begrenzter Raum geschnitten und auf denselben die Gleichung (b.) angewandt, so ergibt sich unter der Annahme $\Delta U = 0$, $V = \frac{1}{r}$ bei Berücksichtigung der Gleichung (c.)

$$\frac{1}{a^2}\iint U\,d\sigma = \frac{1}{c^2}\iint U\,d\sigma,$$

wo das Intregal auf der linken Seite über die Kugelfläche mit dem Radius a, das auf der rechten über diejenige mit dem Radius c zu erstrecken ist. Geht man nun zur Grenze $c = 0$ über, so wird die rechte Seite $4\pi U_0$, wenn U_0 den Werth von U im Mittelpunct der Kugel mit dem Radius a bedeutet. Man hat somit den Satz

$$U_0 = \frac{1}{4\pi a^2}\iint U\,d\sigma$$

d. h. das arithmetische Mittel aus den Werthen von U auf der Oberfläche einer Kugel ist gleich demjenigen Werth, welchen U im Centrum derselben annimmt.

Aus diesem Satze folgt, dass U in dem ganzen Raume constant ist, sobald diess in einem endlichen Theile der Fall ist. Denn wäre U nicht constant, so könnte man sich immer eine Kugel construiren, deren Mittelpunct in dem

Gebiete liegt, für welches $U =$ const. ist, die ferner aus diesem Gebiete heraustritt und an diesen äusseren Stellen überall einen grösseren oder kleineren Werth als im Inneren besitzt. Für eine solche Kugel könnte dann der Satz nicht erfüllt sein.

Es ergibt sich hieraus für die Flüssigkeitsbewegungen mit Potential, dass keine derartigen Bewegungen in dem ganzen Raume stattfinden, sobald in einem endlichen Theile keine vorhanden sind.

Eine analoge Schlussreihe folgt aus der Form ($a.$) des Green'schen Satzes. Wird nämlich in derselben $U = V$ gesetzt unter der gleichzeitigen Annahme $\varDelta U = 0$, so ergibt sich

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = - \iint U \, \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma .$$

Verschwindet nun an der Oberfläche überall der Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial n}$, so muss

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = 0$$

sein, was nur möglich ist, wenn im ganzen eingeschlossenen Raume

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichungen liefern für die Flüssigkeitsbewegungen mit Geschwindigkeitspotential das interessante Resultat, dass im ganzen Inneren der Flüssigkeit keine Translationen oder Rotationen vorkommen, sobald an der Oberfläche keine vorhanden sind. Jede dieser Bewegungen ist also nothwendig mit einer entsprechenden Bewegung an der Oberfläche verbunden.

Aus dem letzten für U hergeleiteten Satze folgt weiter, dass U im ganzen Inneren des Raumes durch die Werthe von $\frac{\partial U}{\partial n}$ an der Oberfläche bestimmt ist. Denn existirten zwei Functionen U_1 und U_2, welche beide der Gleichung $\Delta u = O$ genügen und für welche an der Oberfläche

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n}$$

ist, so würde die Differenz $U_1 - U_2$ ebenfalls die Gleichung $\Delta U = 0$ erfüllen und es müsste für sie an der Oberfläche $\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial n} = 0$ werden. Daraus würde aber folgen, dass im ganzen Inneren

$$\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial z} = 0,$$

also

$$U_1 = U_2 + \text{const.}$$

ist.

Auf die Flüssigkeitsbewegungen mit Geschwindigkeitspotential übertragen heisst diess, dass durch die Translationen oder Rotationen an der Oberfläche die ganze Translations- oder Rotationsbewegung im Inneren der Flüssigkeit bestimmt ist.

Alle diese Sätze beruhen auf der Voraussetzung, dass die Potentiale der Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten Functionen der Coordinaten x, y, z seien, die nebst den ersten Differentialquotienten den Gesetzen der Endlichkeit, Stetigkeit und Eindeutigkeit genügen, weil sonst das Green'sche Theorem nicht mehr anwendbar sein würde. Enthalten diese Functionen auch die Zeit als Variabele, so beziehen sich die entwickelten Sätze nur auf einen Moment.

4.

Die Geschwindigkeiten der Translation und Rotation wurden im vorhergehenden Abschnitte als Functionen des Ortes vorausgesetzt, welche der Eigenschaft des Potentiales genügen. Es wurde also angenommen, dass in der ganzen Flüssigkeit entweder nur Translationen oder nur Rotationen vorkommen. Jetzt soll der Fall betrachtet werden, in dem beide Bewegungen existiren, die eine derselben aber nur in einzelnen Flüssigkeitstheilchen vorhanden ist. Es frägt sich dann zunächst, in welcher Weise sind diese rotirenden oder strömenden Flüssigkeitstheilchen zu einander geordnet? Zur Beantwortung dieser Frage dient ein allgemeiner Satz, der hier entwickelt werden soll.

Es seien X, Y, Z irgend welche Functionen der Coordinaten x, y, z, die nebst den ersten Ableitungen in einem gegebenen Raume einwerthig, stetig und endlich sind. Dann ist

$$\iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$-\iint d\sigma\,(X\cos(nx) + Y\cos(ny) + Z\cos(nz)), \qquad (a.)$$

wo $d\sigma$ das Oberflächenelement des Raumes bedeutet. Fasst man X, Y, Z auf als die Componenten der Geschwindigkeit des Punctes x, y, z, so ergibt sich für die Resultante

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und X, Y, Z nehmen die Form an

$$X = R\cos(Rx)\,, \qquad Y = R\cos(Ry)\,, \qquad Z = R\cos(Rz)\,.$$

Die rechte Seite der Gleichung $(a.)$ wird daher

$$\iint d\sigma\; R\cos(Rn)\,.$$

Die Functionen X, Y, Z mögen nun der Bedingung genügen

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Dann wird die linke Seite von (a.) verschwinden und es muss somit sein

$$\iint d\sigma\ R\ \cos(Rn) = 0. \qquad (b.)$$

Diese Gleichung soll auf die Rotations- und Translationsgeschwindigkeiten angewandt werden, die in einer incompressibeln Flüssigkeit als solche Functionen X Y, Z der Coordinaten vorgeschrieben sind. Hierbei soll jedoch diejenige Bewegung, welche nur in einzelnen Theilen des Raumes vorhanden ist, in Flüssigkeitsfäden angeordnet (Strom- oder Wirbelfäden) gedacht werden.

Würde ein solcher Faden innerhalb der Flüssigkeit endigen, so könnte man immer in der Flüssigkeit eine geschlossene Fläche construiren, über welche das Intregal (b.) nicht verschwände. Eine solche Fläche brauchte z. B. nur ausserhalb des Fadens kugelig zu verlaufen und mit einem cylindrischen Fortsatz in den Faden hinein zu ragen; das Ende des Fortsatzes, das immer rechtwinklig zu der gekrümmten Seitenfläche angenommen werden kann, würde dann allein einen endlichen Term in dem Intregale liefern und letzteres also nicht, wie es die Formel (b.) vorschreibt, verschwinden können. Partielle Rotationen und Strömungen müssen daher so angeordnet sein, dass jeder Faden entweder in der Oberfläche endigt oder in der Flüssigkeit in sich selbst zurückläuft. Eine derartige Anordnung soll im Folgenden immer vorausgesetzt sein. Die vorhandenen Wirbel- und Stromfäden entsprechen ihrer Construction gemäss ganz den gleichnamigen Fäden des vorigen

Abschnittes, nur dass die letzteren die Flüssigkeit stetig erfüllen, während die jetzigen isolirt in derselben vorkommen. Aus dieser Analogie entsteht die Frage, ob hier Rotations- und Stromgeschwindigkeit ebenfalls in einer Beziehung zum Querschnitt des Fadens stehn, wie sie sich dort herausstellte.

Diese zweite Frage beantwortet die nämliche Gleichung (b.), wenn dieselbe auf ein Stück eines Fadens angewandt wird, das von zwei zu seiner Richtung senkrechten Querschnitten begrenzt wird. Für alle Theile der gekrümmten Oberfläche dieses Stückes ist $\cos(R n) = O$, für den einen Querschnitt q_1 an dem die Geschwindigkeit R den Werth R_1 haben möge, ist $\cos(R_1 n) = +1$, für den andern Querschnitt q_2 mit der Geschwindigkeit R_2 ist dagegen $\cos(R_2 n) = -1$ und es muss somit sein

$$R_1 q_1 = R_2 q_2, \qquad (1.)$$

d. h. Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit in den Querschnitt des Wirbelfadens oder das Product aus der Stromgeschwindigkeit in den Querschnitt des Stromfadens ist über die ganze Länge des Fadens constant.

Der nämliche Satz wurde oben für die die Flüssigkeit continuirlich erfüllenden Wirbelfäden und Stromfäden unter der Voraussetzung von Potentialen hergeleitet. Dagegen werden die anderen Sätze, die sich auf die Bestimmung der Bewegung im Inneren aus derjenigen an der Oberfläche beziehen, wegfallen, resp. sie werden nur für einen solchen Raum gelten, der aus dem gegebenen Raume durch Ausschliessung der einzelnen Wirbel- oder Stromfäden entsteht.

Die Componenten u, v, v der Translationsgeschwindigkeit oder die der Rotationsgeschwindigkeit ξ, η, ζ sind in dem vorliegenden Falle Functionen der Coordinaten x, y, z.

Wie müssen dieselben beschaffen sein, damit in einzelnen Fäden Rotationen oder Translationen auftreten, während sonst solche in endlicher Grösse nicht vorkommen? Diese Frage ist für die Rotationen schon durch die Formeln (2'.) des zweiten Abschnittes beantwortet. Vortheilhafter ist jedoch die folgende Lösung:

Die Componenten u, v, w der Translationsgeschwindigkeit haben in der ganzen Flüssigkeit die Bedingung zu erfüllen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \qquad (l.)$$

ausserdem muss sein

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\xi, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\eta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\zeta, \qquad (m.)$$

wo die Grössen ξ, η, ζ an den Orten, an denen Wirbelbewegungen stattfinden, die gegebenen Werthe annehmen, während sie sonst überall verschwinden. Wo Werthe von ξ, η, ζ vorhanden sind, genügen sie der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \qquad (n.)$$

Diese drei Gleichungen können befriedigt werden durch die Annahme

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi}{r}\, da\, db\, dc\,, \\ M &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\eta}{r}\, da\, db\, dc\,, \\ N &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\zeta}{r}\, da\, db\, dc \end{aligned}\right\} \qquad (2'.)$$

und die Intregale über den Raum, in welchem Wirbelbewegungen vorkommen, zu erstrecken sind.

Dass durch (2.) und (2′.) die Bedingungsgleichung (l.) erfüllt ist, stellt sich bei Differentiation von (2.) sofort heraus. Die Gültigkeit der Gleichungen (m.) ergibt sich auf folgende Weise:

Bei Differentiation von (2.) erhält man unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen $\Delta L = -2\,\xi$, $\Delta M = -2\eta$, $\Delta N = -2\zeta$, denen die Functionen L, M, N genügen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= 2\,\xi + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= 2\,\eta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 2\,\zeta + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

und es werden daher jedenfalls die Gleichungen (m.) befriedigt, sobald in der ganzen Flüssigkeit

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi\,(a-x)}{r^3}\, da\, db\, dc\,, \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\eta\,(b-y)}{r^3}\, da\, db\, dc\,, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\zeta\,(c-z)}{r^3}\, da\, db\, dc$$

oder bei Anwendung der Methode der theilweisen Integration

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\xi}{r}\, db\, dc - \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{1}{r}\,\frac{\partial \xi}{\partial a}\, da\, db\, dc,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\eta}{r}\, da\, dc - \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{1}{r}\,\frac{\partial \eta}{\partial b}\, da\, db\, dc,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\zeta}{r}\, da\, db - \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{1}{r}\,\frac{\partial \zeta}{\partial c}\, da\, db\, dc.$$

Die Summe der drei ersten Terme dieser Gleichungen verschwindet nach der Gleichung (*b.*) und die Summe der drei letzten Terme nach Gleichung (*n.*), da je die Differentiation nach a, b, c hier identisch ist mit der nach x, y, z in (*n.*). Durch (2.) und (2'.) ist somit wirklich eine particuläre Flüssigkeitsbewegung für den Fall, dass in einzelnen Theilen vorgeschriebene Wirbelbewegungen stattfinden, dargestellt. Wie dies im zweiten Abschnitt geschehen ist, so lässt sich auch hier wieder zeigen, dass die allgemeine Flüssigkeitsbewegung sich von der vorliegenden nur durch eine solche Bewegung unterscheidet, bei welcher keine Rotationen vorhanden sind *).

Die mechanische Bedeutung von (2.) und (2'.) ergibt sich in folgender Weise: Werden die Werthe von L, M, N aus (2'.) in (2.) eingesetzt und die unendlich kleinen Theile von u, v, w, welche in den Integralen von dem Elemente $da\, db\, dc$ herrühren, mit du, dv, dw bezeichnet, so ist

$$du = \frac{1}{2\pi}\,\frac{(c-z)\,\eta - (b-y)\,\zeta}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

$$dv = \frac{1}{2\pi}\,\frac{(a-x)\,\zeta - (c-z)\,\xi}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

---

*) Kirchhoff, Analytische Mechanik pag. 251.

$$dw = \frac{1}{2\pi} \frac{(b-y)\,\xi - (a-x)\,\eta}{r^3}\, da\, db\, dc\,.$$

Aus diesen Gleichungen geht nun hervor, dass

$$du\,(a-x) + dv\,(b-y) + dw\,(c-z) = 0,$$
$$\xi\, du + \eta\, dv + \zeta\, dw = 0$$

d. h. dass die Resultirende dp von du, dv, dw sowohl mit r, wie mit der Resultirenden q von ξ, η, ζ einen rechten Winkel bildet. Endlich ist

$$dp = \sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2} = \frac{da\, db\, dc}{2\pi r^2}\, q \sin\nu\,,$$

wo r durch die Gleichung bestimmt ist

$$\cos\nu = \frac{a-x}{r}\,\frac{\xi}{q} + \frac{b-y}{r}\,\frac{\eta}{q} + \frac{c-z}{r}\,\frac{\zeta}{q}\,,$$

also den Winkel zwischen q und r bedeutet. Man hat somit den Satz:

Jedes rotirende Wassertheilchen a bedingt in jedem anderen Theilchen b derselben Wassermasse eine Translationsgeschwindigkeit, welche senkrecht gegen die durch die Rotationsaxe von a und das Theilchen b gelegte Ebene steht. Die Grösse dieser Geschwindigkeit ist direct proportional dem Volumen von a, seiner Rotationsgeschwindigkeit und dem Sinus des Winkels zwischen der Linie ab und der Rotationsaxe, umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung der beiden Theilchen.

Es soll jetzt in entsprechender Weise untersucht werden, wie die Rotationen ξ, η, ζ beschaffen sein müssen, damit in gegebenen Fäden Ströme entstehen, während sonst solche in endlicher Grösse nirgends vorkommen.

Die Componenten ξ, η, ζ der Rotation haben überall die Identität zu erfüllen, dass

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0. \qquad (l'.)$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\varDelta u}{2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\varDelta v}{2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\varDelta w}{2} \qquad (m'.)$$

und die Grössen $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ werden an die Bedingung geknüpft sein

$$\frac{\partial \varDelta u}{\partial x} + \frac{\partial \varDelta v}{\partial y} + \frac{\partial \varDelta w}{\partial z} = 0. \qquad (n'.)$$

Von diesen Gleichungen lässt sich sofort ein particuläres Integral angeben, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ \eta_1 &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ \zeta_1 &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (3.)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{1}{8\pi}\iiint \frac{\varDelta u}{r}\, da\, db\, dc, \\ M &= -\frac{1}{8\pi}\iiint \frac{\varDelta v}{r}\, da\, db\, dc, \\ N &= -\frac{1}{8\pi}\iiint \frac{\varDelta w}{r}\, da\, db\, dc \end{aligned}\right\} \qquad (3'.)$$

und die Integrale über diejenigen Theile des Raumes auszudehnen sind, in welchen sich Stromfäden befinden.

Existirte nun ausser diesem particulären Integrale ein zweites ξ_2, η_2, ζ_2, so würde durch die Differenzen $\xi_3 = \xi_1 - \xi_2, \eta_3 = \eta_1 - \eta_2, \zeta_3 = \zeta_1 - \zeta_2$ ebenfalls eine Flüssigkeitsbewegung dargestellt sein und es müsste nach den Gleichungen $(m'.)$ dieselbe ein Rotationspotential besitzen.

$$\xi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \eta_3 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \zeta_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Aus den Gleichungen ($m.$), welche überall, wo Strömungen vorhanden sind, gelten, folgt nun, dass in den Stromfäden $\xi_3 = 0, \eta_3 = 0, \zeta_3 = 0$, somit $\psi =$ const. sein wird. Es muss daher ψ in dem ganzen Gebiete einen constanten Werth haben. Ausser der durch (3.) und (3'.) beschriebenen Bewegung wird deshalb keine weitere möglich sein.

Die Gleichungen (3.) und (3'.) lassen sich in ähnlicher Weise wie (2.) und (2'.) mechanisch deuten. Diese Deutungen sind natürlich entsprechend complicirter, da in (3'.) nicht die Grössen u, v, w, sondern die Verbindungen $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ auftreten.

Besitzt die Translationsbewegung an den Stellen, an welchen eine solche vorhanden ist, ein Potential, so ist überall $\varDelta u = 0$, $\varDelta v = 0$, $\varDelta w = 0$, somit $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ und daher auch $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Es folgt somit der Satz: Hat die Translationsbewegung ein Potential, so können nirgends in der Flüssigkeit Wirbelbewegungen auftreten, also auch dort nicht, wo gar keine Translationen existiren.

5.

Alle die Relationen des vorigen Abschnittes beziehen sich auf einen Zeitmoment. In einem Momente ist das Product aus Rotationsgeschwindigkeit in den Querschnitt des Wirbelfadens constant. Es muss nun untersucht werden, wie sich diese Producte zu verschiedenen Zeiten verhalten, wobei jedoch vorausgesetzt werden soll, dass die Wirbelfäden stets aus den nämlichen Flüssigkeitstheilchen gebildet seien. Auf die Flüssigkeit bezogen wird dann der Wirbelfaden explicite von der Zeit nicht abhängen, sondern nur von der in den Coordinaten implicite enthaltenen Zeit;

auf die Raumtheilchen bezogen wird dagegen der Faden explicite ebenfalls von der Zeit abhängen, da er an demselben Orte entsteht und verschwindet. Sind also φ und ψ zwei Functionen, welche gleich Null gesetzt eine Wirbellinie darstellen, so sind die Variabeln derselben, sobald sie auf die Flüssigkeitstheilchen bezogen werden, x, y, z (Grössen die allerdings wieder von t abhängen), sobald sie aber auf die Raumtheilchen sich beziehen x, y, z, t, wobei dann aber x, y, z von t unabhängig sind.

Zunächst sollen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ eine flüssige Wirbellinie darstellen. Dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0$$

und die Grössen x, y, z beziehen sich auf einen bestimmten Moment. Gehören nun dx, dy, dz der Wirbellinie zur Zeit t an, so ist

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta,$$

wenn ξ, η, ζ die Componenten der Rotation zur Zeit t bezeichnen, und es wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \zeta = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \zeta = 0.$$

Diese Gleichungen ergeben bei Berücksichtigung der Bedingung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

für ξ, η, ζ die Werthe

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),\\
\eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\\
\zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha.)$$

Bezeichnen dagegen jetzt $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ eine Wirbellinie im Raume, so gibt die Differentiation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,dz + \frac{\partial\psi}{\partial t}\,dt = 0.$$

Diese Gleichungen gelten für irgend eine Variation dx, dy, dz, also auch für diejenige, welche ein Flüssigkeitselement in dem Zeitelement dt erfährt d. h. für

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt, \quad dy = \frac{dy}{dt}\,dt, \quad dz = \frac{dz}{dt}\,dt$$

oder

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt.$$

Dann bekommt man aber

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x}u + \frac{\partial\varphi}{\partial y}v + \frac{\partial\varphi}{\partial z}w + \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial\psi}{\partial x}u + \frac{\partial\psi}{\partial y}v + \frac{\partial\psi}{\partial z}w + \frac{\partial\psi}{\partial t} &= 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(\beta.)$$

Es haben diese Gleichungen Gültigkeit für ein Raumtheilchen, welches ein Flüssigkeitstheilchen erreicht, das sich während der Zeit dt von der Lage x, y, z aus mit der Geschwindigkeit u, v, w bewegt; folglich beziehen sie sich auf die Wirbellinie desselben Theilchens, auf welches sich die Gleichungen $(\alpha.)$ beziehen, und beide Gruppen $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ können daher combinirt werden. Durch Differentiation der Gleichungen $(\beta.)$ nach y und z erhält man

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}u+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}v+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}w=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}u+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}v+\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}w=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}u+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}v+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}w=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}u+\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}v+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}w=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Wird das so gewonnene System der Reihe nach mit

$$-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

multiplicirt und werden dann die beiden ersten und die beiden letzten Gleichungen unter Berücksichtigung von (α.) addirt und schliesslich die Resultanten unter Beachtung der Relation

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

verbunden, so ergibt sich

$$\frac{\delta\xi}{\partial t}=\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z},$$

wenn $\delta\,\xi$ die vollständige Differentiation nach der implicite und explicite Zeit bedeutet.

Auf analoge Weise lassen sich zwei andere die Aenderungen von η und ζ darstellende Gleichungen gewinnen, und man hat daher das System

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta\zeta}{\partial t}&=\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z},\\ \frac{\delta\eta}{\partial t}&=\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}+\zeta\frac{\partial v}{\partial z},\\ \frac{\delta\xi}{\partial t}&=\xi\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial y}+\zeta\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(1.)$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort, dass ein Flüssigkeitstheilchen niemals rotiren kann, sobald es zur Zeit $t = 0$ nicht rotirt.

Nach den Gleichungen (1.) im ersten Abschnitt ist

$$a' = udt + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) a + \frac{\partial u}{\partial y}\,dt\,b + \frac{\partial u}{\partial z}\,dt\,c,$$

$$b' = vdt + \frac{\partial v}{\partial x}\,dt\,a + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\,dt\right) b + \frac{\partial v}{\partial z}\,dt\,c,$$

$$c' = wdt + \frac{\partial w}{\partial x}\,dt\,a + \frac{\partial w}{\partial y}\,dt\,b + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\,dt\right) c.$$

In dem Zeitelement verschiebt sich das zweite Theilchen um eine Strecke, deren Projectionen auf die Axen sind

$$a' - a, \qquad b' - b, \qquad c' - c$$

und das erste Theilchen um eine Strecke, deren Projectionen sind

$$udt, \qquad vdt, \qquad wdt.$$

Daher sind die Veränderungen, welche die Projectionen a, b, c erleiden

$$\begin{aligned} \delta a &= a' - a - udt, \\ \delta b &= b' - b - vdt, \\ \delta c &= c' - c - wdt. \end{aligned}$$

Demnach wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta a}{dt} &= a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y} + c\,\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\delta b}{dt} &= a\,\frac{\partial v}{\partial x} + b\,\frac{\partial v}{\partial y} + c\,\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\delta c}{dt} &= a\,\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.)$$

Das System (2.) ist dem Systeme (1.) ähnlich. Beide werden in den rechten Seiten bis auf einen constanten Factor identisch, wenn gesetzt wird

$$a = \xi\,\varepsilon, \qquad b = \eta\,\varepsilon, \qquad c = \zeta\,\varepsilon, \qquad (\gamma.)$$

wo ε eine unendlich kleine Constante bedeutet. Dann ist

$$\left.\begin{aligned}\delta a &= \delta\,\xi\,\varepsilon\,,\\ \delta b &= \delta\,\eta\,\varepsilon\,,\\ \delta c &= \delta\,\zeta\,\varepsilon\,.\end{aligned}\right\}\qquad(2'.)$$

Wenn also für zwei Flüssigkeitstheilchen zur Zeit t die Gleichungen (γ.) bestehen, so sind sie auch zur Zeit $t + dt$ in Gültigkeit, d. h. sie bestehen immer. Die Gleichungen (γ.) drücken aus, dass

$$a : b : c = \xi : \eta : \zeta\,.$$

Stimmt somit in einem Augenblicke die Richtung der Verbindungslinie zweier Flüssigkeitstheilchen mit derjenigen der Drehungsaxe überein, so findet diese Uebereinstimmung zu allen Zeiten statt. Dieses hier hergeleitete Resultat liefert jedoch keinen neuen Satz, denn es ist identisch mit der ursprünglichen Annahme, dass die Wirbelfaden stets aus den nämlichen Flüssigkeitstheilchen gebildet werden.

Infolge der Gleichung (γ.) nimmt die Rotationsgeschwindigkeit in der Wirbellinie

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

die Form an

$$R = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,,$$

d. h. sie ist proportional mit der Entfernung zweier in der Wirbellinie unendlich wenig entfernter Flüssigkeitstheilchen. Ist q der Querschnitt des Wirbelfadens, so ist $q\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ das Volumen eines Elementes. Da nun die Flüssigkeit von constanter Dichte und der Wirbelfaden stets aus den nämlichen Flüssigkeitstheilchen gebildet sein soll, so muss $q\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ unabhängig von der Zeit, also

$$q\,R = \text{const.}$$

sein.

Der früher für einen Zeitmoment hergeleitete Satz, nach welchem das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit in den Querschnitt des Wirbelfadens eine Constante ist, gilt somit allgemein, sobald die Wirbelfäden stets aus den nämlichen Flüssigkeitstheilchen gebildet werden.

Bekanntlich ist die gemachte Annahme mit derjenigen identisch, dass die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte ein Potential besitzen.

Was schliesslich den entsprechenden Satz anbelangt, nach welchem das Product aus der Stromgeschwindigkeit in den Querschnitt des Stromfadens constant ist, sobald die Stromfäden stets aus den nämlichen Flüssigkeitstheilchen gebildet werden, so bedarf er keiner weiteren Herleitung. Er ist infolge der vorausgesetzten Incompressibilität von vornherein evident.

Die Inductionsvorgänge im Telephon

von

H. F. Weber.

[Der Züricher naturforschenden Gesellschaft in der Sitzung vom 1. Juli 1878 mitgetheilt.] *)

Hr. Dubois-Reymond hat in dem Aufsatze: «Zur Kenntniss des Telephons [Archiv für Physiologie, 1877,

*) Zusatz. Zehn Tage später, am 11. Juli 1878, hat Hr. Helmholtz der Berliner Academie der Wissenschaften eine Abhandlung überreichen lassen, in welcher er denselben Gegenstand in derselben Weise behandelt.

Dass ich bereits am 1. Juli den Inhalt der folgenden Mittheilung bekannt gemacht habe, geht u. A. aus dem folgenden Zusatz